Akademy
EDITORA

SADDO AG ALMOULOUD

RENATO BORGES GUERRA

JOSÉ MESSILDO VIANA NUNES

JOSÉ CARLOS DE S. PEREIRA

(organizadores)

Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática:

Contribuições para a Educação Matemática

Saddo Ag Almouloud
Renato Borges Guerra
José Messildo Viana Nunes
José Carlos de S. Pereira
(organizadores)

GRUPO DE ESTUDOS E PESQUISAS EM DIDÁTICA DA MATEMÁTICA: CONTRIBUIÇÕES PARA A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

Akademy
EDITORA
2024

Editor-chefe: Celso Ribeiro Campos
Diagramação e capa: Editora Akademy
Revisão: Profa. Dra. Emília Pimenta Oliveira (IEMCI da UFPA)

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

A452g

Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática: Contribuições para a Educação Matemática / organização: Saddo Ag Almouloud, Renato Borges Guerra, José Messildo Viana Nunes, José Carlos de S. Pereira – 1ª ed. - São Paulo: Editora Akademy, 2024.

Vários autores
Bibliografia
ISBN 978-65-80008-34-6

1. Didática da Matemática 2. Processos de ensino e aprendizagem 3. Educação fiscal 4. Educação estatística 5. Percursos de estudo e pesquisa
I. Título

CDD: 371.9
CDU: 376

Índice para catálogo sistemático:

1. Educação 370

Editora Akademy – São Paulo, SP

Corpo editorial

Este livro foi avaliado e aprovado por pareceristas ad hoc.

Sumário

Prefácio

Sobre testemunhos e (com)figurações formativas na pesquisa em Didáticas da Matemática

> O testemunho apresenta uma faceta relacional. Não há testemunho sem diálogo, pois não se é testemunha para si, nem testemunha sozinha. O testemunho é, também um testemunho diante e para os outros.
>
> Jean-Philippe Pierron (2010)

As palavras de Jean-Philippe Pierron, mencionadas como epígrafe neste prefácio, têm a função e uma chave para que se possa abrir as portas que permitirão ao leitor adentrar por todo um movimento de constituição de um coletivo de pensamentos e práticas em pesquisa-formação que convergiram para a gênese e desenvolvimento de um grupo de pesquisa em torno dos conceitos, fundamentos e métodos conformadores da didática da matemática como um campo de pesquisa voltado à formação e professores de Matemática e sua práxis.

Após fazer a leitura dos originais deste livro me pus a refletir sobre o modo como estava organizada a publicação, e como seu teor acadêmico caracteriza um conjunto de testemunhos[1] acerca das convivências formativas e de integração profissional docente. Ao mesmo tempo identifiquei que ao longo dos textos seus autores manifestam suas ideias e reflexões a respeito dos modos como se processaram as múltiplas formas de atestações dos diversos encaminhamentos dados às pesquisas no âmbito da formação pós-graduada no campo da Didática da Matemática, sob a ótima dos fundamentos teórico-epistemológicos advindos de estudiosos franceses.

Com foco central no aspecto mencionado no parágrafo anterior, desde a sua parte inicial até a final, o livro denota uma face de publicação acadêmica do tipo ***Festschrift***. O sentido atribuído a esse tipo de produção acadêmica é originado de um vocábulo alemão, também denominado *Festgabe* ou *Liber Amicorum*, que se constitui em um trabalho acadêmico publicado em uma ocasião comemorativa. O termo pode ser traduzido livremente como "livro de homenagem" ou "livro de celebração"[2]. Na França

---

[1] A esse respeito ver PIERRON, Jean-Philippe. **Transmissão**: uma filosofia do testemunho. Tradução Luiz Paulo Rouanet. São Paulo; Edições Loyola, 2010.

[2] Conforme abordado por LEWIS, Ricki. Festschriften Honor Exceptional Scientific Careers, Scholarly Influences. **The Scientist**, September 2, 1996.

costumeiramente se usa o termo *Mélanges* para esse tipo de publicação, quando se trata de um livro que homenageia uma pessoa influente ou reconhecida, especialmente um pesquisador[3]. Geralmente essas publicações são lançadas enquanto o homenageado é vivo.

As contribuições para este tipo de produção acadêmica são geralmente escritas por alunos, amigos ou colegas de trabalho, para um momento especial da trajetória do homenageado, sendo consideradas uma fonte importante para a História da Ciência, posto que, de um modo geral, um *Festschrift* contém contribuições inéditas de colegas do homenageado, podendo incluir seus ex-alunos. Ocasionalmente, essas publicações contêm, também, alguns ensaios do homenageado, bem como dedicatórias, que consistem total ou parcialmente em saudações e agradecimentos das pessoas que participam da publicação.

Geralmente é publicado na ocasião da aposentadoria do homenageado, ou quando ele completa certo tempo de carreira (trinta anos ou mais), o *Festschrift* pode ser qualquer tipo de publicação, como um livro pequeno ou mesmo uma obra com vários volumes. Quando os homenageados são pesquisadores respeitados e celebrados nacional ou internacionalmente, são feitos vários *Festschrift*, particularmente se os pesquisadores atuam em diferentes campos do conhecimento[4].

O primeiro *Festschrift* do mundo foi publicado em Leipzig em 1640 com contribuições de muitos poetas alemães, por ocasião do bicentenário da invenção da imprensa, e foi editado por Gregor Ritzsch (1584-1643)[5]. Alguns cientistas também são homenageados com várias dessas cerimônias, por exemplo, uma bem destacada, ocorrida no Brasil em 2007, que foi realizada na Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP, Campus de Rio Claro), por ocasião do 75º aniversário do professor Ubiratan D'Ambrosio, momento em que a Sociedade Brasileira de História da Matemática lançou um Número Especial da Revista Brasileira de História da matemática intitulado *2007: Festschrift Ubiratan D'Ambrosio*, como uma publicação comemorativa organizada e estruturada por 41 textos que o presentearam naquele momento[6].

---

[3] De acordo com MAZEAUD, Antoine. Que sont et que sont les Mélanges devenus? In: **À droit ouvert**: Mélanges en l'honneur d'Antoine. Lyon-Caen, Dalloz, 2018, p. 595-610

[4] Conforme mencionado por Endel Tulving. Are there 256 different kinds of memory ? In: James S. Nairne (ed.). **The foundations of remembering**: essays in honor of Henry L. Roediger III. Psychology Press, 2007.

[5] Foi um impressor e escritor de hinos protestantes do período barroco Alemão.

[6] Maiores detalhes ver: Festschrift Ubiratan D'Ambrosio. **Revista Brasileira de História da Matemática**. Edição Especial, 2007.

Nessa mesma esteira de publicações, um trabalho mais recente foi organizado e publicado internacionalmente, tendo novamente como centro de reflexões o professor Ubiratan D'Ambrosio. Trata-se do livro intitulado *Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education: Trajectory, Legacy and Future* (Ubiratan D'Ambrosio e a Educação Matemática: Trajetória, legado e futuro), publicado após o seu falecimento, no qual seus organizadores/editores[7], reuniram um grupo de autores que direta ou indiretamente conviveram com Ubiratan D'Ambrosio ou conheceram o seu trabalho de educador, autor, pensador e líder de um movimento internacional em torno da educação em geral, da educação para a paz, do pensamento transdisciplinar e especialmente acerca das atividades socioculturais concernentes à etnomatemática. O livro foi organizado em 19 capítulos que se referem diretamente às relações de Ubiratan D'Ambrosio com a história da Matemática, à Etnomatemática e à Educação Matemática, dentre outros aspectos.

Pode-se considerar que esse tipo de publicação representa uma forma de testemunho do tempo e do trabalho de intelectuais que se dedicaram a constituir uma trajetória acadêmica estruturada por importantes e decisivas contribuições aos rumos de um campo de estudos e pesquisas. Conforme já mencionei anteriormente, esse tipo de publicação constitui-se em uma fonte da história científica, pois também documenta conexões dos homenageados com relação aos setores que vão além do contexto científico ou privado, ou seja, compreende todo um contexto socioambiental e cultural coletivo em que cada homenageado se inseriu e se insere ao longo de sua trajetória pessoal e profissional. Isto porque não só as pessoas, mas também as instituições são homenageadas de maneira direta ou indireta, por meio dessas publicações comemorativas.

Neste sentido, pesquisadores e professores traçam suas vidas, planejadas ou mesmo por acasos fortuitos, em torno de inquietações, interesses acadêmicos, oportunidades variadas ou chamados institucionais dando vida e corpo a um campo de conhecimento específico. A esse respeito, um exemplo recente refere-se à Sociedade Brasileira de Sociologia, que organizou um projeto de pesquisa que consistiu na edição de três volumes pelos quais foi possível catalogar boa parte da dinâmica de uma disciplina afetada pelas conjunturas ao mesmo tempo que as afeta igualmente. Como resultado, foi estruturada uma publicação organizada em três volumes, por meio dos quais a Sociedade Brasileira de Sociologia publicou entre 2021 e 2023, lançou um dossiê em forma de E-

[7] BORBA, Marcelo C.; OREY, Daniel C. (Ed.). **Ubiratan D'Ambrosio and Mathematics Education**: Trajectory, Legacy and Future. Springer Nature, 2023.

Book intitulado *Memória Retratos: sociólogos e sociólogas brasileiras*[8]. com a finalidade de facilitar o trabalho de identificação dos sociólogos e sociólogas que transitaram no tempo e atuaram nesses diferentes momentos arbitrados para a recuperação da história da sociologia brasileira.

Nessa mesma esteira de trabalhos, as mais diversas trajetórias intelectuais podem atualmente ser consideradas importantes fontes que iluminam a multiplicidade de caminhos de pesquisa e da produção de conhecimento nos mais diversos campos científicos. Trata-se de uma das maneiras de se investigar, refletir e compreender os processos que envolvem a sociologia da ciência, da educação e, no caso deste livro, da sociologia da Educação Matemática, ou seja, dos modos como se registra a história social da produção de conhecimentos[9] acerca das pesquisas em Didática da Matemática ao redor e no interior das ações de programas de pós-graduação, com destaque para um coletivo de pensamento[10], como se identifica no Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática - GEDIM do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará – PPGECM/UFPA.

É com essa finalidade que o livro intitulado *Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática: contribuições para Educação Matemática*, produzido por diversos pesquisadores e estudantes de pós-graduação que se dedicam a essa temática, apresentam seus testemunhos na forma de agradecimentos, descrições, reflexões e apontamentos de resultados de suas pesquisas, com vistas a caracterizar o coletivo e estilo de pensamento que configura o grupo em seus modos de ser e estar no campo da Educação Matemática nacional e internacional em suas conexões com as ideias discutidas conjuntamente com o professor Renato Guerra, homenageado pelo grupo e os diversos pesquisadores franceses, espanhóis e brasileiros, dentre outros.

É nesse formato de publicação que o livro está organizado em duas partes. A primeira é composta por um bloco de depoimentos reflexivos sobre a vivência formativa no grupo, na forma de agradecimento e de valorização do empreendimento acadêmico

---

[8] LIMA, Jacob Carlos; BOMENY, Helena. (Orgs**.). SBS Memória Retratos** [recurso eletrônico]: sociólogos e sociólogas brasileiras. 1. ed. Florianópolis: Tribo da Ilha, 2021. V. I.; LIMA, Jacob Carlos; BOMENY, Helena. (Orgs**.). SBS Memória Retratos** [recurso eletrônico]: sociólogos e sociólogas brasileiras. 1. ed. Florianópolis: Tribo da Ilha, 2022. V. II.; LIMA, Jacob Carlos; BOMENY, Helena. (Orgs**.). SBS Memória Retratos** [recurso eletrônico]: sociólogos e sociólogas brasileiras. 1. ed. Florianópolis: Tribo da Ilha, 2023. V. III.

[9] De acordo com BURKE, Peter. **Uma história social do conhecimento**: de Gutenberg a Diderot. Tradução Plínio Dentzien. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2003.; BURKE, Peter. **Uma história social do conhecimento II**: da Enciclopédia a Wikipédia. Tradução Denise Bottmann. Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 2012.

[10] Conforme estabelecido por FLECK, Ludwik. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico**. Tradução Georg Otte, Mariana Camilo de Oliveira. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.

estabelecido desde a gênese do grupo até o contexto atual das disseminações de ideias em outros subcampos aos quais se inseriram seus membros após a conclusão de seus mestrados e doutorados, bem como na inserção continuadas de novos membros ao grupo.

Na segunda parte o livro está estruturado em 14 capítulos que abordam uma diversidade de temas em torno e no interior das discussões refletidas nos estudos e pesquisas realizados pelo grupo, com base nos aportes teóricos e metodológicos que caracterizam o tipo de estudos relacionados à Didática da Matemática advindos de princípios epistemológicos fundamentados principalmente em autores como Yves Chevallard, Michelle Artigue, Gerard Vergnaud, Raymond Duval, Saddo Ag Almouloud, Guy Brousseau, Régine Douady, dentre outros.

Cabe aos leitores adentrarem na leitura de cada um e de todos os capítulos a fim de mergulharem fundo nos temas abordados, para assim poderem extrair as essências que emanam de cada texto e do livro como um todo. Somente assim se tornará possível compreender a essência das leituras, discussões e reflexões que demarcam a territorialização epistêmica que compõe a Epistemologia Didática do GEDIM em seu movimento singular e plural no campo da Didática da Matemática Nacional e Internacional.

Desejo uma ótima e enriquecedora leitura

Iran Abreu Mendes
Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas
Universidade Federal do Pará

Editorial

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) é certificado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) desde 2012. Os estudos desenvolvidos estão concentrados em duas linhas de pesquisas: **Didática da Matemática** e **Percepção Matemática, Raciocínios, Saberes e Valores**.

O GEDIM tem difundido seus trabalhos em pesquisas em nível de mestrado e doutorado do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (PPGECM-UFPA). A repercussão é evidenciada em publicações em periódicos e eventos nacionais e internacionais, além de publicações de livros e capítulos de livros ligados às temáticas estudadas pelo grupo.

Assim, no âmbito das produções do GEDIM, esta obra, **além de ser uma marca de reconhecimento ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra –** precursor do GEDIM **-** por suas importantíssimas contribuições na área de Didática da Matemática, mais especificamente, nas construções teórico-metodológicas da Teoria Antropológica do Didático que realizou, tem o intuito de difundir os resultados das pesquisas realizadas pelos membros do grupo de pesquisa GEDIM.

Nessa perspectiva, esta obra, intitulada "**Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática: Contribuições para Educação Matemática**", é composta, além do prefácio e de uma homenagem coletivas ao **Prof. Dr. Renato Borges Guerra**, de quinze artigos que versam sobre diferentes perspectivas teórico-metodológicas voltadas para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos. Descrevemos de forma sucinta os propósitos de cada capítulo.

No primeiro capítulo "**Sobre minhas relações com a Teoria Antropológica do Didático",** solicitamos ao nosso homenageado **Prof. Dr.** Renato Borges Guerra de falar sobre a relação pessoal com a Teoria Antropológica do Didático construída como pesquisador em Didática da Matemática e como professor universitário de matemática. Para isso, os preceitos metodológicos dessa teoria encaminham a narrativa da própria pessoa, considerando a impossibilidade de se acessar seu universo cognitivo. A narrativa destaca o estudo de obras e experiências profissionais extra a educação matemática, como condições para o encontro íntimo desse professor com essa teoria.

O capítulo **"Educação fiscal na formação de professores articulando saberes não matemáticos e práticas sociais"** de Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo e Saddo Ag Almouloud. Tem por objetivo tecer reflexões sobre as condições e restrições institucionais existentes que impactam na necessidade da compreensão das funções do papel de saberes não matemáticos presentes em modelos matemáticos, relacionados às situações concernentes à Educação Fiscal, usando como exemplo o Imposto de Renda para Formação Inicial e continuada de Professores. Apresentam-se essencialmente o desenho experimental de um Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP) e os resultados da análise dos achados oriundos dessa formação focando a educação fiscal, apoiando-se na Teoria Antropológica do Didático. Os autores observam que que o PEP-FP criou os participantes condições favoráveis para elaborarem propostas didáticas relativas à Educação Fiscal.

Teodora Pinheiro Figueroa e Saddo Ag Almouloud**,** no capítulo intitulado "**Proposta de um modelo didático para o desenvolvimento de situações potencialmente acessíveis didaticamente à luz da teoria antropológica do didático"**, abordam a questão da Educação Inclusiva no que se refere a seguinte questão: Como devem se dar as relações professor, aluno, saber diante da perspectiva da Educação Matemática Inclusiva para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente? Para responder a esta questão, os autores fundamentam-se no conceito de Continente Didático, na Teoria Antropológica do Didático e, a Teoria das Situações Didáticas, os quais juntamente com resultados de pesquisas na área de Educação Matemática Inclusiva possibilitaram a construção de um Modelo Didático para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente.

No capítulo **"Um cenário da matemática financeira escolar sob a modelagem matemática reversa",** Gleison De Jesus Marinho Sodré e Renato Borges Guerra, apoiando-se apresentam-se reflexões na Teoria Antropológica do Didático, apresentam a modelagem matemática reversa como dispositivo para evidenciar e tratar do desconhecimento de professores sobre os contextos que tratam os problemas do mundo real, que permitam compreender modelos da matemática financeira escolar. Uma empiria realizada com professores frente à modelagem matemática reversa, a partir de problemas da matemática financeira da escola, revelou as dificuldades desses professores em delimitar tipos de situações com matemática a partir de modelos da matemática financeira previamente dados, por não identificar o adequado regime de juros, independente das qualidades das relações dos professores com os saberes matemáticos.

"**Um modelo epistemológico de referência para o ensino de métodos de resolução de sistemas lineares"** é o título do capítulo escrito por **Fernando Cardoso de Matos e José Messildo Viana Nunes**. Nele, os autores, apoiando-se na TAD, apresentam um Modelo Epistemológico de Referência, sobre o estudo qualitativo dos sistemas lineares, que sirva de entendimento mínimo, para analisar as praxeologias institucionais presentes em instituições de ensino superior. A ideia do modelo foi minorar as limitações das atividades matemáticas no que diz respeito ao estudo de Álgebra Linear, e provocar articulações por intermédio da presença da tecnologia. O modelo permitiu estabelecer as praxeologias matemáticas de referência para o estudo qualitativo dos sistemas lineares.

No capítulo "**Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de frações**: i**ntrodução a Adição e Subtração de Frações**, **Raquel Soares do Rêgo Ferreira** e **Renato Borges Guerra** tecem reflexões em torno da seguinte questão: O que ensinar de operações com frações e como ensiná-las para nos anos iniciais da escola básica? Estes autores se concentram na esfera das condições que podem contribuir, impedir ou que são neutras para a difusão ou aquisição de saberes a serem ensinados sobre frações, tendo em conta aspectos da história e da epistemologia do uso de frações, como conhecimentos indispensáveis sob o olhar da Teoria Antropológica do Didático, considerando que a manipulação de saberes para o ensino necessariamente requer que seja mantido uma proximidade epistemológica com o saber eleito para ser ensinado. Essa compreensão pode permitir construir uma resposta, mesmo que parcial, para a questão formulada, por meio do dispositivo metodológico denominado de Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP) relativa a um ou mais saberes da profissão docente. O PEP-FP é um PEP apoiado por um Modelo Epistemológico de Referência (MER) como alternativo ao modelo epistemológico vigente relativo ao saber fração que habita uma dada instituição.

Ana Karine Dias Caires Brandão, Maria José Ferreira da Silva e Saddo Ag Almouloud, no seu capítulo "**Um percurso de estudo e pesquisa para a relação da integral dupla com as obras de Antoni Gaudí"**. Analisam a relação da Integral Dupla com as obras de Antoni Gaudí baseada nos significados e nas praxeologias mobilizados por estudantes das engenharias e da licenciatura em matemática no desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Pesquisa para o ensino e a aprendizagem da Integral Dupla. As reflexões tecidas foram construídas apoiando-se nos pressupostos da Semiótica de Charles Sanders Peirce e na Teoria Antropológica do Didático. Do ponto de vista metodológico, os procedimentos de um Percurso de Estudos e Pesquisa foram acionados para o ensino da Integral Dupla no cálculo da medida de Superfícies Quádricas, durante cinco encontros, com a participação de treze estudantes matriculados nos cursos de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e das Engenharias (civil, elétrica e ambiental) do Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia. A análise dos achados apresenta indícios de que os estudantes conseguiram aplicar os conceitos dos objetos matemáticos escolhidos de forma coerente e autônoma ao construírem e resolverem situações-problemas que envolvem conhecimentos dos cursos dos quais são egressos e do Cálculo Diferencial e Integral. As formas presentes nas obras de Antonio Gaudí possibilitaram aos estudantes associarem os objetos matemáticos a uma linguagem estética, ao pragmatismo e ao desenvolvimento de raciocínios abdutivos que permitiram alinhar o uso deles em diferentes situaçõe*s*.

No capítulo "**Regra de três inversa: uma criação didática genuína para escola"**, **Denivaldo Pantoja da Silva** e **Renato Borges Guerra** constroem uma compreensão da Regra de Três Inversa como uma Criação Didática, no sentido teórico da noção de uma transposição didática específica para o ensino escolar. Para isso, os autores recorrem aos recursos teóricos e metodológicos da TAD que conforma um modelo praxeológico de análise e interpretação de fenômenos didáticos associado à história social do conhecimento matemático e aos dispositivos envolvidos. Os resultados apontam que a Regra de Três Inversa se configura no campo de práticas escolares como uma Criação Didática para facilitar o seu ensino no contexto da Matemática hindu por meio de algoritmos para tipos de problemas específicos que subsidiam os fazeres da regra de três ainda hoje.

Nazaré do Socorro Moraes da Silva e **José Messildo Viana Nunes**, no capítulo "**Medida de comprimento: uma sequência didática na perspectiva da grandeza e medida"**, tecem reflexões sobre a construção de uma sequência didática para o ensino de medida de comprimento nos domínios da grandeza e da medida. A concepção desta sequência composta de 8 atividades apoiou-se nos princípios da Engenharia Didática, da Teoria das Situações didática e, em um modelo didático referente a articulação dos quadros: geométrico, das grandezas e numérico. Tal sequência oportuniza ao aluno agir, refletir, criar estratégia, comunicá-la e justificá-la.

No capítulo "**Práticas Sociais com Matemática e o Método de Redução à Unidade, uma Epistemologia do Saber Prático", Carlos Alberto Gaia Assunção e Renato Borges Guerra** discutem elementos teóricos conceituais das práticas sociais articulando a noção de práticas sociais com matemática enquanto saber prático. Os autores partem da premissa de que existe uma epistemologia do saber prático, fundada na teoria histórico-cultural da atividade humana, que sustentam a noção de práticas sociais com matemática. As construções argumentativas estão embasadas teoricamente na Teoria-Histórico-Cultural que nos concede a discussão a partir das quatro dimensões das práticas sociais; na Teoria Antropológica do Didático enquanto fundamento teórico de análise de práticas humanas, com base em quatro noções fundamentais de uma praxeologia, e da noção de problema didático da modelização matemática nas dimensões ecológica e epistemológica.

José Carlos de Souza Pereira e **José Messildo Viana Nunes**, no capítulo "**Possível caracterização para a álgebra elementar escolar em confluência com a teoria antropológica do didático**", expõem várias ideias concatenadas que levam a uma possível caracterização da álgebra elementar clássica e escolar, seja na perspectiva do modelo clássico aritmético ou outro modelo capaz de tornar compreensível a evolução histórico-epistemológica de alguns objetos matemáticos que constituem esse tipo de álgebra. Para concretizar nossa intencionalidade, os autores fizeram uma análise ecológica de várias obras, matemáticas ou não, de maneira que possamos extrair algumas conclusões sobre o que essas obras revelam ou discutem das possíveis características da Álgebra Escolar. A extensão dessa análise dialoga com o bloco do saber-fazer e do saber, elementos constituintes da Teoria Antropológica do Didático.

No capítulo "**Construindo praxeologias matemáticas de geometria analítica plana como prática docente em um percurso de estudo e pesquisa", Roberto Carlos Dantas Andrade e Renato Borges Guerra** tecem reflexões sobre o ensino da matemática nas escolas, essas reflexões giram em torno de questões iniciais do tipo: *Que critérios devo utilizar para elaborar as organizações matemática e didática que proporcionem o encontro do aluno com um determinado objeto matemático de saber do ensino básico, de forma inteligível e articulada com outros objetos? Quais instrumentos didáticos posso utilizar ou construir que possibilitem a preparação dos alunos para os* *concursos vestibulares e ENEM*[11]*? Como desenhar uma organização matemática e didática que evidencie a articulação entre vetores e outros temas da Geometria Analítica Plana?* Esses questionamentos motivaram os autores a realizarem investigações em busca de enfrentar e compreender o impacto que exercem sobre a formação e a prática docente. Nesse caminhar investigativo, encontram com o Programa Epistemológico de Investigações em Didática das Matemáticas, em que as questões em destaque parecem convergir para o problema da desarticulação entre os conteúdos de estudo no ensino básico. À luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida por Yves Chevallard (1992), que fornece os subsídios para analisar e desenvolver organizações matemáticas e didáticas para os processos de estudos da Matemática, modelados a partir das noções de praxeologias matemáticas e didáticas, estes autores constatam que a problemática da desarticulação entre os conteúdos de estudo da Matemática tem se constituído a veia principal de onde pululam ramificações como as problemáticas relativas aos currículos, as quais, por sua vez, estão inclusas em problemáticas relativas à prática docente .

No capítulo **"GEDIM: Reflexões e Avanços nas Abordagens Teórico-Metodológicas em Educação Matemática**", **Saul Rodrigo da Costa Barreto** e **José Messildo Viana Nunes**, apresentam as contribuições multifacetadas do GEDIM na Educação Matemática, destacando a importância dos grupos de pesquisa e como o GEDIM se destaca por seu papel colaborativo e reflexivo, especialmente na utilização e desenvolvimento da Teoria Antropológica do Didático e do Percurso de estudo e Pesquisa (PEP). Estes autores analisam as perspectivas futuras do grupo, avultando as linhas de pesquisa emergentes que incorporam tecnologias digitais e inteligência artificial. Discutem também a influência significativa dos professores líderes do GEDIM na formação de novos educadores e pesquisadores. . Este capítulo ressalta o GEDIM como um modelo de inovação e colaboração na pesquisa educacional, reforçando seu papel vital na evolução da Educação Matemática. Influenciada pelas discussões no GEDIM, a tese de Barreto (2023) disponibiliza uma análise profunda do uso do PEP em teses brasileiras, contribuindo para uma melhor compreensão da Educação Matemática no Brasil

No capítulo "**Gedim statistic: experiência exitosa do grupo de estudo e pesquisa da didática da matemática"**, **Vera Debora Maciel Vilhena, José Messildo**

[11] Exame Nacional do Ensino Médio.

Viana Nunes, Jacqueline Agnes da Silveira Santos, Silvia Caroline Salgado Pena e **Matheus Raphael Lopes Dinelli** apresentam o primeiro grupo de Educação Estatística da Amazônia Brasileira, GEDIM STATISTIC, fundado no ano de 2019 no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas do Instituto de Educação Matemática e Cientifica da Universidade Federal do Pará. O referido grupo tem como missão contribuir para o desenvolvimento de uma postura investigativa, reflexiva e crítica em toda comunidade educacional. Sua existência se justifica pela necessidade de investigações que levem à comunidade de professores em formação e em exercício e alunos em geral discussões e intervenções que trabalhem a educação estatística, na perspectiva do pensamento, raciocínio e letramento estatístico, bem como de intervenções junto a alunos dos anos iniciais, onde se evidenciou lacunas na assimilação de conceitos da literacia, do pensamento e do raciocínio estatísticos. Além disso, com o Projeto GEDIM STATISTIC vai à Escola, o grupo realizou diversas oficinas e minicursos para professores e alunos das redes públicas e particulares no estado do Pará.

Reginaldo da Silva, Mariana Angelim Lobato Cardoso e **José Messildo Viana Nunes**, autores do capítulo **"Transposição didática interna pluricultural: o ensino das matemáticas transversalizado pelos saberes étnico-raciais"**, tecem reflexões sobre o fazer docente do professor de matemáticas na perspectiva pluricultural em oposição ao eurocentrismo, que coloca outras civilizações na invisibilidade frente às construções e contribuições dos saberes, por exemplo, matemáticos. O intuito é chamar atenção para a degradação que sofre um saber ao ser designado pela noosfera para compor um currículo oficial, bem como o quanto a construção e gestão destas praxeologias matemáticas são afetadas na Transposição Didática Interna. Os autores fizeram uso do Modelo de Praxeologia Docente Relativo de Silva (2013) para evidenciar os Milieux distintos do professor de matemáticas que estão presentes no processo de transposição didática interna, nos quais emergem as variáveis e seus respectivos valores que determinam a construção e gestão destas praxeologias. Focam também a construção do conhecimento matemático-didático pluricultural necessário para uma educação com equidade, adotando a Etnomatemática como o caminho metodológico capaz de conduzir um fazer matemático na perspectiva do multiculturalismo, a partir do reconhecimento das matemáticas praticadas pelos diferentes grupos étnicos.

Homenagens ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra

O Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (PPGECM-UFPA) presta homenagem **ao Prof. Dr. Renato Borges Guerra** que, além **de ser uma marca de reconhecimento**, destaca seu papel precursor do GEDIM, por suas importantíssimas contribuições na área de Didática da Matemática, mais especificamente, nas construções teórico-metodológicas da Teoria Antropológica do Didático que realizou. Neste texto, apresentamos algumas manifestações de reconhecimento ao **Prof. Dr. Renato Borges Guerra**:

================== & =================== & ==================

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud

Algumas pessoas deixam sua marca em nossas vidas, deixando mensagens que nunca desaparecem de nossas mentes, que se tornam lições que carregamos conosco para sempre. E nem sempre é por meio de palavras que aprendemos. Ética, generosidade, amizade e humildade são atitudes e qualidades que se traduzem em ações e permanecem como exemplo e inspiração.

Prof. Dr. Renato Borges Guerra é uma das pessoas mais marcantes em todos os processos de formação e pesquisa da UFPA, especialmente no GEDIM. Sua família, seus colegas e aqueles para quem o senhor contribuiu na formação de mestrado e/ou doutorado estão reunidos neste livro para homenageá-lo. Estamos aqui reunidos para agradecer-lhe.

Estou muito feliz por ter compartilhado uma parte do patrimônio didático com o Prof. Dr. Renato Borges Guerra que tem talento para cultivar a amizade e o bom humor, e tornou os momentos compartilhei com ele alegres e únicos. Como posso esquecê-los, se esses momentos são parte integrante de quem eu sou? Ele é um amigo leal e generoso, uma pessoa única que continuarei a valorizar pelo resto da minha vida.

Reconhecido nacional e internacionalmente, o Prof. Dr. Renato Borges Guerra sempre procurou transmitir seu fascínio e paixão pelos estudos da Didática da Matemática, principalmente pela Teoria Antropológica do Didático. Ele construiu um grande legado científico na forma de publicações e formação de professores. Sempre me lembrarei do Prof. Dr. Renato Borges Guerra como uma pessoa gentil e generosa, que sempre será lembrada por muitos alunos e professores como um grande exemplo de dedicação e amor pela matemática e seu ensino.

Por tudo o que o Prof. Dr. Renato Borge Guerra foi capaz de nos trazer em diferentes graus e no que diz respeito às suas ações de pesquisa e às suas principais posturas científicas, elogiamos as perspectivas estimulantes que ele desenvolveu e que nos deixa como legado. Graças às suas reflexões sobre a Teoria Antropológica do Didático e às inovações que propôs em inúmeras encruzilhadas, portadoras de inovações futuras em vários campos, incluindo os da pesquisa em Didática da Matemática e da formação, nós o saudamos com uma homenagem respeitosa e grata.

================== & =================== & ==================

Prof. Dr. José Augusto N Fernandes

Renato Guerra, um formador de pesquisadores. Tive a oportunidade de conviver com o professor Renato Borges Guerra em diversos ambientes ao longo desta vida, daí, talvez, o motivo de o chamar de Renatão e ele me chamar de Zezão.

O início foi no ambiente de estudos, quando, há mais de 50 (cinquenta) anos, fomos do Colégio Estadual Magalhães Barata, no bairro do Telégrafo Sem Fio, ele uns poucos anos mais adiantado do que eu.

Depois, no espaço universitário, fui aluno seu em um curso de álgebra linear, ministrado em Período Letivo Intermediário, PLI, cujos conhecimentos me serviram bastante, pois em 1985 prestei concurso para professor de álgebra da Faculdade de Matemática, e logo em seguida me submeti à seleção de mestrado para UNICAMP, onde os saberes exigidos foram de álgebra linear e de cálculo diferencial e integral.

Em 1986, quando cheguei em Campinas para realizar o mestrado em Matemática Aplicada e Computacional, três professores do nosso departamento na UFPA lá se encontravam, concluindo o doutoramento, no mesmo Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica (IMECC): Renato Borges Guerra, Adilson Oliveira do Espírito Santo e Hermínio Simões Gomes.

A convivência com esses três antecessores na pós-graduação, tanto para mim como para outros paraenses que faziam o mestrado, foi muito salutar, sendo comum irmos às suas casas, tanto para estudar quanto para nos reunirmos e até comemorarmos o Círio de Nª Srª de Nazaré. Em todas as defesas de teses deles, e comemorações é claro, a turma do Pará sempre se fazia presente.

Esses professores paraenses que nos antecederam na UNICAMP eram muito respeitados pelos docentes e demais pós-graduandos, e, se não fossem os compromissos deles em retornar para a docência em Belém, certamente não teriam dificuldade em tornarem-se professores da Universidade Estadual de Campinas.

Por ocasião do seu doutoramento, além das atividades acadêmicas, o Renato também se destacou em estágios extramuros do ambiente da UNICAMP, com proposição e testes de modelos de otimização em instituições que faziam uso da matemática aplicada e computacional.

De volta a Belém passamos a trabalhar no mesmo espaço, o Departamento de Matemática do Centro de Ciências Exatas e Naturais da UFPA (CCEN) da UFPA, sendo que o Renato, além da docência e da pesquisa, ocupou as posições de chefe do departamento e de diretor eleito do Centro, em cuja campanha eu e outros professores do departamento nos engajamos como cabos eleitorais.

A convivência profissional com o Renato, também nos aproximou quando fizemos parte da Comissão Permanente do Vestibular da UFPA (COPERVES), ele como diretor de um centro básico (CCEN) e eu como diretor do Departamento de Apoio ao Vestibular (DAVES). Depois ele também atuou na Pró-Reitoria de Planejamento da UFPA, em uma época em que eu também ocupava cargos na administração superior da instituição.

Depois de alguns cargos administrativos na UFPA fiz uma incursão na iniciativa privada, como sócio em colégios, cursinhos e faculdades, e pouco vivenciei as proposições que desembocaram nas mudanças do Estatuto e do Regimento da UFPA, e que, dentre outras, resultou na transformação dos colegiados dos cursos e dos departamentos em faculdades e dos centros em institutos.

Na implantação das mudanças estruturais da UFPA, a Faculdade de Matemática do Instituto de Ciências Exatas e Naturais (ICEN), na minha opinião, sofreu significativa perda nos seus quadros de ensino, pesquisa e extensão, com a saída de três de seus professores (Tadeu Oliver Gonçalves, Renato Borges Guerra e Adilson Espírito Santo). A decisão pela mudança de local de trabalho desses docentes não foi algo simples, natural e não traumático, ao contrário, resultou de tumultuadas reuniões.

No mesmo período, depois de muitas idas e vindas, o CONSEPE e o CONSUN da UFPA, deliberaram pela criação do curso de Licenciatura Integrada em Ciências, Matemática e Linguagens, o que possibilitou a existência do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), abrigando os três egressos da Faculdade de Matemática. Como membro dos colegiados supracitados, vivenciei a participação de muitos nessa luta, em particular dos professores Tadeu Oliver Gonçalves e Terezinha Valin.

Em 2010 fiz parte de um grupo de 13 professores do ICEN, que possuíam mestrado e que pretendiam realizar o doutorado. Procuramos o Instituto de Educação (ICED) e o IEMCI para verificar essa possibilidade. O IEMCI nos ofereceu a oportunidade de participarmos dos grupos de pesquisa e das aulas das disciplinas na condição de ouvintes, com a possibilidade de convalidar os créditos, caso fôssemos aprovados nos processos de seleção. Foi aí que voltei a me aproximar do Renatão, e o primeiro contato foi interessante.

Chegando como calouro de ouvinte no IEMCI, falei para o prof. Renato que precisava realizar o doutorado, necessitando preparar um projeto de pesquisa para concorrer, no semestre seguinte, ao processo de seleção. Ele me perguntou sobre o que eu gostaria de pesquisar, e eu, para risada dele, disse-lhe “qualquer coisa”.

A mudança no tratamento que passei a me dirigir ao Renato Guerra, visível nos dois últimos parágrafos, deu-se em razão de quê, a partir de então, ele passou a ocupar outras posições em relação a mim, a de professor, como fora antes, e de possível orientador, como viria a ser.

Fomos conversando na busca de um tema e, primeiramente, ele me propôs pesquisar matemática crítica, com leituras de Ole Skovsmose. Por termos estudado e ensinado em cursos de engenharia, também chegamos a pensar em uma problemática para ser tratada sob a ótica da Engenharia Didática, com textos de Michelle Artigue. Foi quando em uma das muitas conversas do cafezinho, tratamos da radical modificação pela qual passou o currículo do curso de Engenharia Civil da UFPA, de onde eu era egresso e no ano de 2009 havia sido professor.

O “novo” PPC (Projeto Pedagógico do Curso) transformou 4 disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, uma de Álgebra Linear e outra de Cálculo Numérico, que totalizavam 420 (quatrocentos e vinte) horas, em duas de Matemática Aplicada à Engenharia, somando 102 (cento e duas) horas. Os professores das “novas disciplinas” do curso de Engenharia Civil, ainda designados pela Faculdade de Matemática, forçadamente teriam que fazer escolhas sobre o que deveriam ter como objetos a ensinar e outros que necessitariam “negligenciar”, em razão do afunilamento que a proposta curricular impunha.

Foi aí que o prof. Renato enxergou a possibilidade de tratar-se de uma problemática ecológica, à qual Yves Chevallard se referiu no posfácio da segunda edição do seu livro “A Transposição Didática: do saber sábio ao saber ensinado”. A partir de então passamos a tratar de um problema didático, que é aquele que o professor se depara ao ter que ministrar um determinado objeto de ensino, sob o olhar da dimensão ecológica.

Definimos então o tema “Ecologia didática: o ensino de limite em um curso de engenharia”, que nos acompanhou na seleção e durante toda realização do doutoramento. No doutoramento foram quatro anos de maior proximidade com o professor Renato Guerra, e com o agradável Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) do IEMCI da UFPA.

A ecologia didática procura investigar quais as condições são necessárias para que um objeto de ensino “nasça”, “viva”, “morra”, e nesse último caso o que necessitará para ter a possibilidade de “renascer”, em determinado ecossistema que pode ser de ensino ou de pesquisa, por exemplo, verificando seus habitats, onde se situam, e quais são os seus nichos, ou seja, quais são as suas funcionalidades, para que servem, quem nutrem e de quem são nutridos, naquele ambiente.

Para melhorar o entendimento da problemática, por conta de recomendação do orientador Renato Guerra, fiz diversas incursões, nos bastidores da Faculdade de Engenharia Civil, estudando seus projetos pedagógicos, frequentando seus laboratórios e entrevistando professores do curso, além de um historiador do mesmo. Me recomendou também entrevistar um professor da UFOPA, que desenvolvia modelos matemáticos, onde as convergências não eram, necessariamente, primordiais, como os teóricos matemáticos preconizam, o quê, para nós era importante pois os engenheiros, ao lidarem com seus “limites”, por vezes não valorizam muito o saber matemático, realizando alguns procedimentos a seus modos sob o argumento de que “é assim que se faz, porque é assim que dá certo”. Na engenharia, o saber empírico, por necessidade do que precisa ser realizado, não raras vezes se sobrepõe ao saber teórico.

A realização do doutoramento me foi um período de acumulação de muitos conhecimentos, aquisições de muitos livros, do Brasil e do exterior, e que nos renderam bons frutos, pois, além da tese, tivemos oportunidade de apresentar a pesquisa no Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (Cobenge), produzimos artigos, escrevemos um livro, proferimos palestras e, graças à indicação do professor Saddo, tivemos a honra de ter um capítulo no livro A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos. Em todas essas situações as autorias dos trabalhos sempre foram conjuntas, entre mim e o professor Renato Guerra.

O modelo de análise didática, que o orientador Renato e eu propusemos na nossa tese, destaca a necessidade de se considerar os elementos primitivos provenientes da ecologia estudados na biologia, ao se tratar de uma problemática sob a ótica da dimensão ecológica. Na minha opinião a abrangência do modelo é antropológica na medida em que pode abarcar relacionamentos humanos, como, por exemplo, nos que citei anteriormente, em ambientes comuns, que se interceptam ou sejam disjuntos (ecossistemas), em posições peculiares (habitat) e cada um exercendo as suas funcionalidades (nichos).

Hoje eu e Renatão temos nichos diferentes, de habitat diversos em ecossistemas disjuntos, mas para quem teve a oportunidade de conviver em tantas situações, sabemos que se por necessidade de alguma problemática precisarmos juntar forças, estaremos dispostos a nos ajudar.

Concluindo, acredito na gratidão dos componentes do GEDIM em relação ao professor Renato Guerra, que muito nos auxiliou academicamente, daí vê-lo como um formador de pesquisadores.

Muito obrigado Renatão.

================== & =================== & ==================

Prof. Dr. José Carlos de S. Pereira.

O PROFESSOR DAS LIÇÕES PRAXEOLÓGICAS: O ato de ensinar parece ser simples para aquele que consegue gerenciar as relações aos saberes de forma teórica e prática. Essa habilidade ou genialidade parece estar em um gene definidor da excelência docente. É claro, que possuir esse gene não significa saber tudo, mas ser capaz de estudar algo, criar seu texto transpositivo e ensinar outros.

Essa dinâmica cognitiva de realizar a transposição didática do texto de saber complexo para um texto de saber mais simples ou torná-lo compreensível revela o *topos* das praxeologias de professor. Nesse sentido, o professor Renato Guerra, consegue ser um bom exemplo para nós. Digo isso, porque no ano de 2011, quando ingressei no mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM), do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), da Universidade Federal do Pará (UFPA), ele era o tradutor e disseminador das ideias da Transposição Didática (TD) e da Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Yves Chevallard.

Compreender as ideias da TD e da TAD parecia ser algo não possível para um simples professor – denominação anunciada por Yves Chevallard, em um de seus artigos de 2009 – mas, o Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM), contava com a fluência de estudos comanda pelo professor Renato Guerra e seu discípulo, professor José Messildo, os dois líderes do GEDIM.

A fluência praxeológica do professor Renato Guerra predominava nas reuniões do GEDIM, às vezes, complexas para entendimento de um simples professor (Eu), porque as ideais eram tão complexas e distantes do meu *topos* e do meu universo cognitivo, sem contar que possuía um equipamento praxeológico raso para entender o discurso do professor Renato Guerra nas reuniões de estudos do GEDIM. Porém, assumi a posição de um bom sujeito no sistema didático comandado pelos líderes do GEDIM. Após seis meses, esse bom sujeito, já possuía um *topos* mínimo para entender, de forma básica, os textos de saber transpostos pelo professor Renato Guerra.

Uma entre as várias qualidades docentes do professor Renato Guerra é conseguir potencializar o estudo de objetos matemáticos. Presumo que aprendi mais matemática nas disciplinas que ele ministrou no mestrado e doutorado, que quando cursei a graduação.

Não posso esquecer o tradicional café das manhãs, na lanchonete do IEMCI. Foi nesse espaço que várias pesquisas surgiram a partir de conversas – que eram verdadeiras aulas proferidas pelo professor Renato Guerra. A facilidade com que esse professor tinha para propor e agregar ideias as pesquisas do grupo GEDIM revelavam possuir um equipamento praxeológico constituído de múltiplos saberes.

De 2011 a 2017, vivi uma ecologia formativa diferenciada. A primeira etapa, do mestrado – 2011 a 2012 -, a segunda, do doutorado, de 2014 a 2017, ambas contaram com as praxeologias docente do lente Renato Guerra.

As influências praxeológicas desse lente, tornaram-me o pesquisador que sou, não com o mesmo grau de sapiência, porque Renato Guerra é reverberação intelectual além da fronteira da instituição UFPA. Ele é uma instituição docente que formou e continua formando professores. É o professor das lições praxeológicas com "selo" institucional do GEDIM em nossas vidas.

Nesse simples texto, externalizo minha gratidão e aplausos ao nosso Mestre dos mestres: Prof. Dr. Renato Borges Guerra. Suas praxeologias são resposta ótimas registradas em minha formação científica.

Obrigado, pelas lições praxeológicas!

================= & ================== & =================

José Messildo Viana Nunes

A um grande professor, parceiro de pesquisas e amigo, com admiração e respeito.

Para falar de Renato Guerra começo pelo meu ingresso em 2005 no mestrado do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas da Universidade Federal do Pará (PPGCEM-UFPA), onde fiz amigos ou fortaleci amizades que perduram até hoje. Dois desses amigos comungavam de vários pontos de vistas comigo; refiro-me a Roberto Andrade e Reginaldo da Silva, juntos formamos um grupo de estudos que se fortalecia a cada disciplina que cursávamos no programa.

Numa dessas disciplinas (Tópicos Especiais de Matemática - relações entre aritmética, álgebra e geometria.) ministrada pelo Prof. Dr. Renato Borges Guerra tivemos um grande desafio no enfrentamento de tarefas contidas no livro Medida e Forma em Geometria de autoria de Elon Lage Lima. Essa disciplina nos fez refletir sobre a importância do enfoque de objetos específicos no ensino de matemática nas pesquisas da Educação Matemática.

Nesse sentido, procuramos (eu Reginaldo e Roberto) o professor Renato para nos orientar, assim pudemos direcionar/aprofundar nossos estudos para os conteúdos específicos de ensino de matemática.

Uma das obrigatoriedades do curso de mestrado era a participação em grupos de pesquisa, mas não nos adequamos a nenhum dos grupos existentes, em decorrência do nosso interesse nos estudos de conteúdos da matemática. Assim solicitamos ao Prof. Dr. Renato instituir um grupo onde pudéssemos discutir sobre os objetos específicos da matemática, nesse momento Renato estava iniciando estudos referentes a Didática da

Matemática Francesa - provavelmente por influência de Luiz Carlos Pais e Iran Abreu Mendes, que ao participarem das bancas de Renato apontaram semelhanças entre as propostas de pesquisas orientados por ele e as pesquisas desenvolvidas no âmbito da Didática da Matemática de influência francesa.

Assim nasce o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) – na época denominado grupo do Renato - a denominação GEDIM foi cunhada e institucionalizada por mim junto ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) em 2012, após meu ingresso no PPGCEM.

Renato encontrou assim um discurso teórico compatível com suas práticas de questionador das organizações matemática escolares. As práticas professorais de Renato, desde que o conheço, eram cotejadas pelo desafio a seus alunos na busca do que ele sempre denominou de *problemas concretos* que justificassem - *dessem uma razão de ser* - o porquê de se ensinar tal e tal objeto na escola ou na universidade.

Para me referir ao Renato lanço mão de duas expressões: Admiração e respeito são esses os sentimentos que representam bem a parceria que estabeleci com Renato, seja como seu aluno ou colega de trabalho. A construção desses sentimentos se deu ao longo do tempo, a partir da convivência com um professor que eu, Reginaldo e Roberto nos acostumamos a chamar de MESTRE.

Nesse breve relato tenho que dizer obrigado MESTRE pelos ensinamentos! Construir compreensões sobre as noções da Didática da Matemática é tarefa árdua e complexa, pois é necessário fundamentalmente um olhar diferenciado para os objetos de ensino e suas organizações, sejam matemáticas ou didáticas, e, isso amigo é de sua natureza. Digo que aliar teoria e prática é o grande desafio da profissão do professor e você o faz de forma magistral e nos desperta a necessidade e a busca do estabelecimento de novas relações com os objetos – considerando, como diz Chevallard, que tudo é objeto.

================= & ================== & ==================

Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo

Agradecer é um momento de demonstrar reconhecimento, de quem te apoiou, que deu uma palavra de incentivo, que mostrou um gesto de compreensão e empatia na hora que mais você precisava.

O professor Dr. Renato Borges Guerra é essa pessoa que devo minha gratidão, pois me socorreu nas horas mais difíceis da minha vida acadêmica, me orientando no Mestrado, e é um amigo que levo para vida. Conheço-o desde 2015, participando do Programa de Pós-graduação de Educação em Ciências e Matemáticas nas disciplinas ofertadas, e do grupo de pesquisa GEDIM.

Hoje me vem à memória os momentos e situações de convívio em que ele me apoiou e me inspirou como pesquisador, professor e amigo. Ter sido sua orientanda foi um privilégio, e ter recebido sua coorientação no doutorado ensinou-me a ser uma pessoa comprometida com a pesquisa, disciplinada e focada, sempre trago seus conselhos e orientações sobre a Teoria Antropológica do Didático.

Dessa forma, embora tenha muito mais a agradecer, quero deixar registrado todo meu carinho e admiração por essa pessoa incrível que ele é. Obrigada por tudo Professor e amigo Dr. Renato Borges Guerra.

================== & =================== & ==================

Mario Junior

Conheci o professor Dr. Renato Guerra em 2012 no IEMCI, onde comecei minha pós-graduação em Didática da Matemática e também nas inúmeras participações das reuniões do GEDIM.

Falar desse incomensurável profissional não é muito difícil, pois, alguns "bate-papos" já aconteciam no rol da lanchonete do IEMCI no meio de alguns outros colegas que faziam gosto em sentar-se ao seu lado pra falar sobre inumeráveis situações vivenciadas sobre suas práxis e da sua satisfação como pesquisador em defender a TAD.

Vivenciei e ficará sempre na memória as grandes aulas que tive, quando aluno de pós-graduação nos meados de 2012 a 2014, sempre compartilhando suas técnicas de entender a razão de ser de um objeto matemático em relação a um universo didático de conhecimentos, sempre interpretados de maneira elegante e refinado com cadências de uma regente didático.

Com isso, fica um grande legado das premissas e teses bem colocadas para definir essa trajetória profissional desse magnífico professor que com toda certeza não só eu, mas, vários amigos, alunos, professores, funcionários e todos que tiveram o privilégio de conhecê-lo.

Parafraseando, as discussões, orientações, formações, cursos, palestras e inúmeras bancas, tais: TCC, Defesas de Dissertações e Teses, teve um significado ímpar para as IES. Esse marco, registra o seu grande carisma com todos nós, e sem dúvida o nosso crescimento profissional, com reflexos nas nossas pesquisas.

Jamais posso esquecer, quando participei de duas disciplinas: Tópicos I e II, já como mestrando e pude acompanhar o passo a passo do processo de ensino e aprendizagem de um objeto matemático estudado, alcançando grandes escalas de sua potencialidade desse mesmo objeto. Foi como passear em grandes escalas, mostrando os movimentos aritméticos, algébricos e geométricos espaciais e analíticos.

Portanto, e com grande admiração que deixo essa pequena homenagem para esse grande professor que não mediu esforços para nos repassar a sua compreensão de ensinar.

================== & =================== & ================

Denivaldo Pantoja da Silva

Homenagear uma pessoa, em princípio, não parece uma tarefa fácil. Com efeito, se podemos pensar em atributos de admiração, complacência e sobretudo respeito a alguém que consideramos importante e, que em dado momento, marcou seu percurso nesta vida, então o Prof. Renato Borges Guerra faz jus à expressão no sentido pleno.

Na qualidade de orientador acadêmico sempre jogou o papel que vai além de auxiliador, promovendo a orientação necessária para formação integral da pessoa, apoiando a condução dos estudos em diferentes áreas do conhecimento política, Engenharia, legislação dentre outras, com destaque na Matemática, Didática da Matemática e Teoria Antropológica do Didático. Isso implica concentração, foco, pois em algum momento se faz necessário a tomada de decisão, ainda que impactantes, inclusive para vida acadêmica e profissional. Portanto, esse labor profissional, de excelência é notável, se assim podemos dizer magistral!

Não queremos com isso, esgotar os aspectos que qualificam o Prof. Renato, mas destacar alguns que considero imprescindíveis e se juntam à inteligência, sabedoria, parceria, amizade, engajamento, seriedade e compromisso com a qualidade do serviço entregue e à ajuda ao outro. Agradeço a Deus por tê-lo como professor, orientador e amigo. Abraço fraterno. Estaremos sempre à sua disposição.

================= & =================== & ===================

Teodora Pinheiro Figueroa

Prof. Dr. Renato Borges Guerra, quão grande é o seu legado para a área de Educação Matemática, o que podemos comprovar através do seu percurso acadêmico, passando pela engenharia e se consolidando como matemático, com um alvo muito bem definido: as preocupações com o ensino de matemática em sala de aula e, consequentemente com a formação do professor de matemática, o que demonstra a sua paixão pelo saber matemático e a sua seriedade e comprometimento para que o saber-fazer matemático seja de fato compreendido no cerne do conceito de transposição didática dos saberes sábio, ao saber a ensinar e a ser ensinado.

Rumo a este alvo, quantas experiências acadêmicas neste seu percurso de muitas questões, mas também de muitas respostas que envolvem saberes da matemática aplicada, sob o seu olhar de matemático aplicado de formação (mestrado e doutorado), saberes que se interconectam e, lhe dão uma visão refinada sob as várias faces da matemática trazendo ricas contribuições por intermédio de suas produções acadêmicas, palestras e encontros científicos. Este seu extraordinário percurso não tem fim, o que podemos comprovar pelo GEDIM (Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática), do qual é precursor. A sua vida de comprometimento e seriedade com o ensino e a pesquisa é uma relíquia de infinitas perspectivas e infinitos percursos para aqueles que desejam seguir essa mesma trilha, que tem um fio condutor muito bem definido: o amor à matemática e a área de Educação Matemática. Parabéns!

================== & ===================== & ================

Flávio Mesquita

Antes de ingressar nos programas de pós-graduação do IEMCI, já tinha sido aluno do professor Renato na graduação em Engenharia, na disciplina Álgebra Linear II. Desde aquele momento foi notório sua excelência e seu compromisso Renato na docência. Já na pós-graduação, desde o tempo em que fui aluno da especialização em Educação Matemática para o Ensino Médio, passando pelo mestrado e doutorado em Educação em ciências e Matemáticas, sendo orientado pelo professor nesses dois últimos, considero que houve uma verdadeira revolução para mim no pensar o ensino e a formação a partir de problemas da profissão discutidos com ele, formal e informalmente.

Um dos maiores aprendizados que tive com o prof. Renato, foi o desenvolvimento de uma compreensão sobre a prática de ensino relacionada a objetos da matemática escolar que pareciam não problemáticos, como por exemplo, a fatoração do trinômio do 2º grau e a equação do 2º grau, a partir da compreensão da teoria da transposição didática, depois desenvolvida para a teoria antropológica do didático. Além disso, a partir de seus conhecimentos que extrapolam e muito sua área de atuação, pude ampliar meu repertório teórico com conhecimentos que contribuíram sobremaneira no jeito de fazer e pensar o ensino e a formação de professores.

Por fim, não poderia deixar de agradecer ao professor Renato pela sua grande contribuição na pesquisa em didática da matemática não só para o PPGECM/IEMCI e a UFPA, mas para o Brasil e até mesmo para além das fronteiras desse país.

==================== & ================== & ===============

Raquel Rêgo

Falar do professor Renato Guerra é falar de crescimento, amadurecimento, superação e amizade, como aluna e orientanda dele me sinto lisonjeada em poder prestar-lhe essa breve e pequena homenagem e a ele devoto minha gratidão, reconhecimento e aprendizado que acomodo em minha bagagem praxeológica.

Por diversas vezes ruminei por horas e dias cada palavra-frase dita por ele nas aulas, nas orientações e até mesmo durante seu café matinal na cantina da universidade, local onde informalmente um pequeno grupo o rodeava enquanto tomava seu café da manhã, sim isso mesmo, todos sempre queriam estar com ele e ouvi-lo falar sobre suas experiências docente e sobre a diversidade de informações e conhecimentos que compartilhava conosco como: livros, textos, autores e parágrafos inteiros que ele memorizava.

Durante os encontros ele discutia detalhadamente da teoria e quem se beneficiava era quem o escutava, pois sempre se reportava individualmente e cuidadosamente com cada aluno (orientando dele ou não) sobre como a teoria poderia contribuir nas pesquisas, despertando nosso interesse em aprofundar os estudos e no ensinando a ser pesquisador. A verdade é que ele tinha o poder de falar e escrever de uma forma intensa que nos levava ao encontro de situações que permitisse refletir sobre nós mesmos e sobre nossas práticas.

Suas articulações com a palavras eram sempre bem-postas, leves e didáticas, ele dominava a arte de fazer as melhores analogias, a partir de metáforas, relacionadas à vida, à natureza, aos infinitos universos, os relacionava a formação docente e ao processo de ensino-aprendizagem e desse modo pouco a pouco nos desmistificava a teoria antropológica do didático – TAD nos apresentava e desvendava o Chevallard, o pai da Teoria da Didática Francesa.

Desde então minha relação com o mundo ganhou nova forma e significados no que diz respeitos a vida, a pesquisa e principalmente sobre minha docência, pois em cada conversa eu era alfabetizada, especificamente em matemática e na educação matemática, me sentia uma eterna aprendiz, pois sempre havia algo novo a aprender em suas ricas combinações de palavras somadas a de diversos outros autores.

Ele tratava de tudo de forma interessante e curiosa despertando em mim a vontade de aprofundar as leituras e aperfeiçoar minha escrita, aqui resumo o meu processo de formação docente que comparo como uma metamorfose passei um precioso e longo período de casulo até "fechar" o ciclo para então expandir com minhas asas e poder voar e levar o que há de melhor para uma sociedade sedenta e carente de ensino, a aprendizagem.

Professor Renato você é o autor que escreveu muitas histórias, marcou vidas, compartilhou alegrias, foi mão amiga, parceiro e um homem muito humano deixou o legado de inteligência, competência e sabedoria receba meu reconhecimento e agradecimento, por dedicar sua vida e acreditar que é possível construir uma sociedade com vida melhor por meio do ensino.

1- Sobre minhas relações com a TAD

Renato Borges Guerra

Introdução

Aqui busco, sem preocupações acadêmicas formais, descrever brevemente como construí minhas relações com a teoria antropológica do didático. Para isso, assumo uma narrativa com relativas preocupações sincrônicas e nem tanto diacrônicas, pois falo sobre meu universo cognitivo um pouco, senão bastante, embaçado pelo tempo de não uso recorrente de objetos e relações teóricas entre eles, ainda que se escondam em algum lugar de minhas memorias.

Procuro ser espontâneo seguindo os "flashs" de minhas memórias na narrativa tentando, conscientemente, evitar cair no modelo canônico de publicações científicas do tipo problema-teoria-metodologia-empiria- análise-conclusão, mas isso não é tarefa fácil para todo sujeito de saber imbuído de seus *habitus* acadêmicos.

1.1 Estudar um saber é uma atividade humana de construção e reconstrução de organizações de saberes em situação

A teoria antropológica do didático (TAD) parte da compreensão de que as atividades humanas regularmente realizadas no interior de qualquer espaço social, por menor que o seja, como uma empresa, um laboratório ou uma escola, por exemplos, acontecem segundo condutas instituídas por esses espaços.

Assim, a TAD denomina esses espaços sociais de ***instituições e seus fundadores e ou mantenedores são seus sujeitos, no sentido de serem seus agentes em conformidade, nem sempre em totalidade, com elas.***

Frente a essas noções teóricas, vejo a matemática como uma instituição, já que pode ser vista como um espaço sociocultural de atividades humanas específicas, ditas atividades matemáticas, que se realizam de modo regrado pela instituição matemáticas, nem todo necessariamente escrito, que lhe dão legitimidade e conformidade institucional. De modo geral, Bolea, Bosch & Gascón (1999, p. 136) assim referem as atividades matemáticas.

> Como a utilização de uma organização matemática ou um trabalho matemático. Mas é também, ao mesmo tempo, uma produção (ou re-produção) de realidades matemáticas que conduzirão a novas organizações matemáticas. O termo inglês "work" (traduzido do francês oeuvre) permite-nos falar da matemática como uma atividade humana - dado que a matemática é algo que fazemos, como um artefato que é produzido e reproduzido nessa atividade - o trabalho dos matemáticos - uma obra matemática é algo para ser utilizado e algo para ser produzido ou reproduzido.

Os humanos são sujeitos de diferentes instituições desde seu nascimento, a começar pelos que tornam possível sua sobrevivência nos anos iniciais, como a família, por exemplo, e de seu entorno mais imediato, entre elas, a língua falada, a religião e a escola, além da comunidade social em que está inserida.

Assim, compreendo uma pessoa como uma multitude de sujeitos de diferentes instituições que constituem o entorno de conformidades, em que ela vive ou viveu, que dão sentido, mesmo que não percebido, as atividades que essa pessoa realiza. Desse modo, se essa pessoa for privada, ou excluída, de uma ou mais afiliações institucionais, os sujeitos dessas instituições deixarão de existir, embora suas relações não sejam de todo esquecidas por essa pessoa. Em todo caso, sob o risco de deixar de existir socialmente, ela se reforma em outra pessoa.

Sob essa minha compreensão a vida de instituições e de seus sujeitos são interdependentes e se desenvolvem segundo uma **dialética** ***entre eles.*** O que um sujeito faz ou deixa de fazer no interior de uma instituição acontece segundo os ***modos institucionalmente adequados de agir e pensar*** as ***situações*** reconhecidas e aceitas nessa instituição. Grosso modo, a legitimidade de uma conduta de um sujeito numa instituição depende de tríades do tipo **(*situação, práxis, logos)*** vigentes no interior dessa instituição.

Cada ***situação*** em uma instituição é entendida por mim como uma abstração de uma realidade ordinária ou problemática, mesmo que em potencialidade, que é compartilhada de modo invariável, ou quase, entre seus sujeitos.

As situações são construídas frente a contextos de realidades, concretos ou não, a partir de um conjunto de condições que agem em dialética para determinar os tipos de situações e os tipos de ações, dentre os tipos de relações com os objetos ***institucionalizados,*** o que inclui *os* ***conhecimentos institucionalizados ou logos*** *que justificam, explicam ou até produzem as práxis acionadas para essas situações.*

Pra mim, a noção de objeto institucionalizado é tomada como um objeto material ou imaterial que, de algum modo, é reconhecido pelos sujeitos de uma ou mais instituições. Nesse sentido, tudo pode ser ou se tornar um objeto institucional. Para isso, basta que seja reconhecido como indispensável numa ação institucional, ou melhor, "qualquer prática, ou seja, qualquer produto intencional da atividade humana é um objeto. (CHEVALLARD, 2009b, p.5)

As ações com objetos institucionalizados, em sentido amplo, que inclui o modo de fazer e pensar uma ação, frente as situações institucionalizadas são denominadas praxeologias com objetos institucionais, ou simplesmente praxeologia institucional. Ela em sua forma mais simples, dito específica ou pontual, é teoricamente descrita pela TAD como uma unidade celular constituída de duas partes que lhe dão o nome; a práxis, que refere a tarefa a ser executada e a técnica de como se executa essa tarefa e; o logos, grosso modo, refere como se pensa a técnica que faz a tarefa, mesmo que nada se pense na hora que se faz.

Nesse sentido, a coordenação de condições que levam uma pessoa a conhecer ou reconhecer a situação e encaminhar a praxeologia suposta adequada para enfrentá-la é entendida por mim como *habitus* inculcados por instituições nessa pessoa, enquanto sujeitos dessas instituições, que a faz agir de modo adequado sem que tenha necessariamente que planejar o que tem que ser feito, como me diz Bourdieu (1998, p.23) no seguinte extrato de texto.

> o *habitus* (.....) é uma regra feito homem ou, melhor, *um modus operandi* (....) que funciona em estado prático segundo normas (....) sem ter essas normas em sua origem: é essa espécie de sentido do jogo (....) que faz com que se faça o que é preciso fazer no momento próprio, sem que tenha havido a necessidade de tematizar o que haveria de fazer e, menos ainda, a regra que permitiria gerar a conduta adequada

Sob essa minha compreensão, as situações no interior de uma instituição são conhecidas ou reconhecidas por seus sujeitos, quando eles constroem respostas a essas situações a partir das técnicas que relacionam objetos de modos institucionalmente adequados, cuja consecução final revela, de algum modo, o propósito da utilização das técnicas como um engendramento de tarefas para atender certos tipos de condições reconhecidas por eles, enquanto sujeitos dessas instituições.

Figura 01: Situação Estruturada

Fonte: Próprio autor

A situação somente se realiza quando encontra os objetos e relações entre eles que lhe dão a estrutura para agir sobre ela, como se engendrada pelos *habitus*. Na figura procuro ilustrar uma situação que pode ser criada a partir da presença de dois numerais frente a um sujeito(aluno) da escola básica.

Essa poderia ser uma das muitas situações que podem ser criadas pelos alunos, com multiplicar os numerais, calcular o MMC, dentre tantas outras dos possíveis da escola. Essas predisposições dos alunos acontecem pelo *habitus* escolar inculcado pelo uso recorrente de tarefas escolares.

Destaco que a estrutura da situação refere apenas os objetos e as tarefas. A execução dessas tarefas se dá por meio de técnicas supostamente observáveis, de modo que para um tipo de situação, como adição de numerais, por exemplo, pode haver distintas praxeologias e, reciprocamente, um tipo de praxeologia pode servir à diferentes situações. A mudança de técnica, por exemplo, indica uma mudança de praxeologia, mesmo que seja a mesma tarefa, mas não altera a situação.

Seguindo essa minha compreensão, posso dizer que em uma instituição nem toda situação se fará percebível ou reconhecida por um sujeito, estranho ou não à essa instituição e, não menos importante, nem toda situação reconhecida e aceita por um sujeito de uma instituição será reconhecida nessa instituição e, nesse caso, essa situação será fruto da multitude de conformidades dessa pessoa, enquanto sujeito, de outras instituições, inclusive de si mesmo.

As respostas praxeológicas dadas às situações são chamadas pela TAD de *organizações praxeológicas (OP)* e podem ser observadas, em geral, por meio de suas formas reduzidas em questões/tarefas com suas técnicas acompanhadas, mas não sempre, de discursos justificativos. Essa forma reduzida chamo de *organizações de saberes (OS)*, mas quando situadas na matemática são ditas *organizações matemáticas* (OM).

Parece-me claro que em algum momento pode-se pensar que a distinção entre OP's e OS's associadas não se faz presente, mas a OP necessariamente pressupõe ação em situação, enquanto uma OS se reduz ao papel de planejamento da ação e, talvez por isso, goze de maior e indiscutível prestígio perante os estudiosos.

Em todo caso, entendo que o logos de uma OP não é necessariamente visível e, não raro, até para os sujeitos da instituição que a executam. Posso dizer que esse é o caso mais comum, no sentido de mais rotineiro, uma vez que um sujeito frente à uma situação rotineira numa instituição tem uma adequada e pronta resposta praxeológica que lhe foi incorporada pelo *habitus* durante as realizações das práxis institucionalizadas. Assim, quando as enfrentam, podem agir "sem comos, nem porquês", sem preocupações especiais com um planejamento prévio dum roteiro organizado de tarefas e técnicas a serem executadas.

No entanto, o logos de uma OS pode crescer em complexidade independentemente ou não do crescimento de complexidade da OP associada, sobretudo, com o crescimento evolutivo do conhecimento sobre as práxis de modo independente de situações. Esse é o caso das instituições acadêmicas, por exemplo, onde os logos de cada práxis, dito tecnologias, é parte de um logos maior e mais inclusivo, dito teoria, que pode por sua vez ser parte integrante de uma teoria unificadora de teorias.

No entanto, fazer funcionar um OS complexa, não raro, exige saberes práticos que funcionam como o ***habitus acadêmico para reger*** a OP associada como resposta a uma ou mais questões de interesse institucional criado por uma ou mais situações acadêmicas.

As OP's regidas por *habitus* superestruturais inculcados pela cultura das práticas realizadas no interior de uma instituição, denomino de ***organizações praxeológicas complexas*** (OPC), cuja, OS's são denominados de complexos praxeológicos (CP) (CHEVALLARD,1999, p.226) por agregar diversas outras OS's correspondentes a diversas teorias, sem que tenha uma teoria unificadora responsável pela regência dessas teorias.

Essa noção não pode ser confundida com a noção de organizações praxeológicas globais referido por CHEVALLARD (1999) como organizações de saberes regidos por uma teoria unificadora, muito frequente na instituição matemática, por exemplo. Nesse caso, muitas OM's podem ser vistas como partes de uma organização matemática global (OMG), por serem regidas por diferentes tecnologias de diferentes teorias, mas todas subordinadas a uma teoria unificadora. Por exemplo, o saber denominado de análise linear pode parecer estar regendo o saber álgebra linear, o saber teoria das matrizes, ou ainda, o saber espaços euclidianos n-dimensionais.

Nesses casos, há uma teoria das teorias que regem essas organizações, mas as OP's associadas não estão necessariamente livres de fragmentos de práxis socioculturais da matemática que são regidas por *habitus* desse campo de práticas, embora isso não seja o suficiente para a torne uma OPC. Estas não regidas por uma teoria unificadora, mas regidos por saberes práticos que somente são alcançados pelos *habitus* do campo de práticas em que se insere a OP em situação.

A noção de *habitus* como superestrutura demanda que as atividades realizadas no interior de uma instituição estejam subordinadas não somente aos seus próprios fazeres regrados, mais também que estejam condicionadas por níveis mais externos, entre eles, e em invisibilidade decrescente, como da humanidade, da cultura e da sociedade, o que inclui outras instituições dessa sociedade.

Nesse sentido, como as atividades, os sujeitos e as situações que eles criam estão também assim condicionados, de modo que o que se faz em uma instituição pode implicar no que se faz em outra instituição, até mesmo quando não estejam sob o mesmo manto social.

Em geral, as condições que agem no interior de uma instituição, ou entre instituições, que possam produzir situações que levem a construções ou reconstrução de OP, em geral, não são conhecidas e tampouco são conhecidas como elas agem condicionando essas construções ou reconstruções das OP como respostas às situações.

Entendo que uma diferença importante entre as OM's e OP's associadas pode ser notada no ensino de matemática. As primeiras partem de situações já estruturadas, com seus objetos e tarefas, enquanto a segunda precisa considerar as condições, inclusive restritivas, que podem levar àquelas situações já estruturadas.

Isso expõe um dos grandes problemas de investigação e pesquisa enfrentados no campo da TAD, cujo encaminhamento dado por Chevallard (2009) reside no engendramento de percursos de estudos e pesquisas (PEP) por uma comunidade de estudo, com objetivo de fazer emergir situações em busca de validar ou não as condições dadas e ou observadas como catalizadoras da situação e como condicionantes, inclusive as restritivas, à construção ou reconstrução de respostas OP's durante esse percurso.

O PEP caracteriza-se, então, por articulações e integrações de diversas situações e OP's, que fundam e refundam sistemas didáticos com uma comunidade de estudo, em busca de uma resposta desejada, no sentido possível de jamais ser completamente alcançada, mas que em algum de seus estágios parciais pode atender os interesses que moveram a execução da investigação.

De outro modo, os PEP são um tipo de OPC que envolvem diferentes situações com utilizações de distintos logos e práxis de modos não necessariamente planejados e relacionados entre si por uma ou mais teorias, mas que são regidos por um *habitus* acadêmico/escolar vigente na instituição que o legitima e lhe dá razão.

É nesse contexto de criação de situações com usos de práxis de modos diversos, ora espontâneos, ora planejados, que são propiciados pela dialética *habitus*-situação que o PEP promove empirias ricas para as investigações sobre quais condições agem para produzir e ou reproduzir situações e OP's como respostas a essas situações.

O contexto do PEP, para além de dispositivo de investigações, é um dispositivo para aprendizagens, considerando que os agentes do PEP estudam saberes necessariamente mobilizando outros saberes, que são relacionados de modo não arbitrário, em busca em atender seus próprios interesses, o que dá a razão para esse empreendimento.

Entendo que fazer ciência, em qualquer campo, começa quando se deflagra uma OPC em forma de PEP aberto (CHEVALLARD, 2009a) para gerar situações que geram sistemas didáticos que produzem respostas parciais à resposta desejada jamais alcançada. Essas respostas, que são abstraídas teoricamente, se constituem o farto adubo para produções OS's em forma de relatórios e artigos científicos.

1.2 Um sujeito aprende um saber institucional quando passa a ter uma relação com esse saber em conformidade com a relação da instituição com esse saber

Entendo que a TAD assume o princípio de que "o homem nasce condenado a aprender" tudo o que lhe desperta o interesse pela potência que desperta ou por sua carência. Assim, grosso modo, acato a teoria da transposição didática quando diz que a sociedade elege os saberes a serem aprendidos, a pedagogia evidencia a dimensão do papel desse saber segundo o público alvo, observado o socialmente desejado, a escola para dar-lhe a forma segundo a sua vocação finalística frente a pedagogia e a sociedade e, finalmente, que ao didático cabe a tarefa de recriar esses saberes de modo a atender as condições impostas pelos níveis anteriores, mas que encaminhem o aluno como o sujeito de saber por meio de situações provedoras de encontros com antigos e novos saberes por carências, e com isso as aprendizagens, com esses saberes.

Entendo que aprender um conhecimento/saber é encontro do sujeito de saber com esse conhecimento/saber no desenrolar de OP's em uma instituição. Nesse caso, se diz que esse sujeito passou a ter uma relação com esse conhecimento/saber que, como qualquer encontro, pode ser formal ou informal, breve ou demorado, de modo volátil ou sólido, e que pode vir a se tornar um encontro com intimidade.

Nessa linha, a relação de uma pessoa com um dado objeto necessariamente comporta todas as OP's com esse objeto e, portanto, com uma diversidade de situações reconhecidas nas diferentes instituições que essa pessoa vive ou viveu enquanto sujeito.

A TAD considera um de seus objetos de interesse o conjunto de todos os objetos que uma pessoa conhece e as suas relações com esses objetos, que inclui as OP's com esses objetos, que denomina de *Universo Cognitivo da pessoa (UCP)*, e também o conjunto de todas as OS's conhecidas pela pessoa que denominado de *Equipamento Praxeológico da Pessoa (EPP)*.

Uma pessoa, enquanto uma multitude de sujeitos institucionais, quando livre de paixões institucionais, pode ser um agente de mudanças praxeológicas para si e para as instituições. Isso começa por meio de dinâmicas cognitivas, que inclui as dinâmicas praxeológicas, que a pessoa realiza sobre seu UCP, com ajuda do EPP, em busca de construir ou reconstruir novas OP's relativas a um ou mais objetos de seu UCP em busca de encontrar outras OP's de maior alcance para velhas e novas situações.

Essa linha de pensamento, encontra-se a problemática da desconexão de saberes escolares abordadas por (Gascón et al, 2004), bem como a formação didática de professores por autoformação no sentido da pessoa "reformar" seu universo cognitivo e, consequentemente, seu equipamento praxeológico, melhorando a qualidade de suas relações com os novos e velhos objetos conhecidos, por meio da incorporação de novas situações e ou novas OP's relativas a esses objetos produzidas por suas dinâmicas cognitivas.

Isso quer dizer que a pessoa como agente de mudanças, mesmo que seja minimamente, nunca está em total conformidade com as instituições, podendo inclusive ser agente de mudanças institucionais quando uma instituição passa a aceitar as mudanças sugeridas por essa pessoa. De outro modo, as instituições também podem vir a ter dinâmicas cognitivas.

Assim, uma pessoa pode ser agente de transposições didáticas interinstitucionais, de modo que um OP de uma instituição pode ser significativamente alterada noutra instituição, inclusive se tornar um conhecimento prático, no sentido de ser esvaziada de teorias. A esse respeito Chevallard (2009a, p. 35) que:

> Se $\Pi \oplus \Lambda$ denota uma praxeologia $[T / \tau / \theta / \Theta]$ existente em uma instituição I, a sua transposição para outra instituição I *, denotada por $(\Pi \oplus \Lambda)^*$, pode

> em alguns casos (aproximadamente) se escrever $\Pi \oplus (\Lambda^*)$; Neste caso, a práxis será (essencialmente) a mesma, mas o logos terá mudado. A praxeologia transposta $(\Pi \oplus \Lambda)^*$ pode ser da forma $(\Pi^*) \oplus \Lambda$, em que o logos é mantido, mas a práxis alterada, e às vezes esvaziada de sua substância (quando temos $\Pi^* \approx \emptyset$). Alterações e recombinações praxeológicas são, portanto, um fenômeno no coração da história social das praxeologias.

Foi nesse sentido, o das dinâmicas cognitivas, que residia meu interesse no ensino da matemática, embora nunca houvera encontrado essa noção teórica em meus caminhos enquanto professor na instituição matemática.

Inicialmente focado nas organizações matemáticas como transposições didáticas, no sentido da "adequação" do saber matemático acadêmico para ser ensinado nas escolas. Esse pensar foi paulatinamente se alterando quando em minhas investigações tive encontros com saberes da matemática escolar que jamais foram tomados pela academia como saberes matemáticos e, não menos importante, que muitos saberes matemáticos foram antes saberes de uma matemática escolar.

Esses encontros, levou-me a considerar que a minha forma inicial de pensar foi-me inculcada pela instituição docente da matemática, muito influenciada por Klein (1945) e que ainda é seguida por instituições com supostos interesses sobre o ensino da matemática, entre elas, a SBM com diversas publicações (Coleção Professor de Matemática), além de um periódico RPM, como meios, supostos fundamentais, para formação de professores de matemática, além da manutenção de cursos de pós-graduação em ensino de matemática.

Considero que essa linha de pensamento toma, como suposto, que certos saberes matemáticos e fragmentos da história da matemática são suficientes para a formação de professores de matemática para a escola básica. Esse suposto restringe as problemáticas relativas ao ensino e aprendizagem de matemática como decorrentes do distanciamento das OM's escolares dos saberes matemáticos, bem como pela baixa qualidade de formação matemática dos professores que, então, não seriam capazes de reparar essas OM's sob o olhar dos saberes da matemática acadêmica.

Mas a transposição didática necessária para isso nunca é problematizada, pois tal trabalho é tomado como uma atividade ordinária ao alcance de todo aquele que seja portador de saberes matemáticos acadêmicos.

A minha compreensão até então esboçada leva-me a pensar que a formação uma pessoa em professor de matemática já começa na escola básica, enquanto aluno da instituição docente da matemática, com fortes inculcação dos vigentes e duradouros *habitus* docentes da matemática.

Isso pode implicar que uma alteração nesses *habitus* exige uma mudança da pessoa e isso não acontece sem custo, apesar do ganho esperado (CHEVALLARD, 2009b, p. 10). Nessa linha, considero útil ouvir Chevallard (2009b, p. 9).

> (..) formação profissional de uma pessoa, supõe assim uma dinâmica cognitiva e praxeológica que resulta da operação de adequação de novos condicionamentos imprimidos especificamente para a pessoa, o que implica um trabalho de identificar e tratar os conflitos relacionados ao choque dos novos condicionamentos com os condicionamentos anteriores, quando os primeiros são experimentados pela pessoa como incompatíveis com a sua identidade. (aqui entendemos a "identidade da pessoa" como o equipamento praxeológico sensível da pessoa (...)

Como notei, a formação de professores não pode ignorar o amplo leque de hipóteses humanísticas consideradas pela educação matemática, entre elas, a forte linha cognitivista, as correntes filosóficas, sociológicas e antropológicas as quais passei a ter encontro no meio acadêmico que se dedicava ao estudo da educação matemática.

Os meus estudos, entre diferentes e obras, envolveram a filosofia da matemática Newton da Costa (2004) que me levaram ao encontro de obras de Wittgenstein (1999), Bourdieu (1980, 1989), Charlot (2003) e, sobretudo, as obras de Bruno D'Amore (1999).

A obra de D'Amore me abriu as portas para a compreensão do que poderia vir a ser para mim a Educação Matemática, no caso, a didática da matemática em suas complexas relações com outros campos de saber, entre eles, a epistemologia, semiótica, sociologia, pedagogia, psicologia e, não menos importante, a matemática da escola.

Nela encontrei elementos teóricos, o que inclui suas referências, que permitiram encontrar outras obras para além das supracitadas, que guardavam estreita relação com práxis matemática com conexões de saberes, entre elas, a teoria da Aprendizagem Significativa (MOREIRA,1997) a dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 2003), a Teoria da Transposição Didática (CHEVALLARD, 2005), a Teoria das Situações (BROUSSEAU, 1998), a Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD,1993), além da história da matemática (HOYRUP, 2007) e da Modelagem Matemática (NISS E BLUM, 2015).

As leituras de obras de Costa, Wittgenstein, Charlot, Bourdieu, dentre outras, parecem ter me encaminhado a compreender a transposição didática e TAD, como seu fundamento, como teorias provedoras de situações que se revelavam fértil campo de investigações e pesquisas, isoladamente ou com contribuições doutras correntes teóricas supracitadas. Isso me afastou em definitivo do campo nebuloso em que topara, com todo tipo de conhecimento pedagógico, em geral, muitos distantes dos conhecimentos matemáticos da escola, e que se fazem frequentes nas obras brasileiras de educação matemática.

Assim nasceram minhas investigações e pesquisas que geraram dissertações e teses sobre organizações matemáticas para o ensino sustentadas não somente pela matemática, mais também a luz das correntes teóricas da educação matemática.

1.3 Aprendemos as praxeologias de pesquisas fazendo o que vimos fazerem nas praxeologias desse tipo na academia

As metodologias de pesquisas podem render boas discussões no seio da filosofia das ciências, mas o método de pesquisa no seio das práticas científicas realizadas não está previamente determinado, mas em construção nas investigações como meio de validação de hipóteses levantadas a partir de relações, nem sempre claras, entre objetos concretos como objetos teóricos, que podem levá-las a alguma sustentação de uma tese proposta teoricamente ante uma problemática, real ou abstrata.

No campo das investigações matemáticas, onde o fazer regrado independe de situações, isso não chega ser problema, de modo que a metodologia da pesquisa é um aspecto jamais tratado nas obras matemáticas. No entanto, na educação matemática isso não é simples e constitui um grande nó no desenvolvimento de investigações, principalmente sobre problemáticas sobre situações em contextos concretos, pois exigem a complexidade de traduzir objetos concretos em objetos teóricos que permitam ser tratados teoricamente a partir de suposto fazer regrado de um tipo de metodologia de pesquisa antes disponível.

É nesse mar de complexidade que a TAD emerge como bote salvador, pois ao mesmo tempo que nos dá os recursos teóricos, ela cria seus objetos teóricos e os relacionam genericamente de modo a se constituir como eixo de uma metodologia de investigação e pesquisa.

O PEP, parece-me, por nascer assentado sobre os postulados da TAD tornou-se um dispositivo de investigação por dar as condições de tornar objetos concretos em objetos teóricos e as relações entre eles como os possíveis entre os objetos teóricos, que somente são determinadas em situações sob outras condições nem sempre conhecidas.

Vejo que o PEP, como percurso de sistemas didáticos, tem sido usado como um método da pedagogia ativa e, sobretudo, como um dos dispositivos para a formação de professores, considerando que esse percurso de sistemas didáticos não acontece isoladamente, mas em meio a condições em transversalidade desse percurso, que geram situações e OP's como respostas.

Essa característica do percurso do PEP pode ajudar o formador/professor a identificar praxeologias sensíveis aos professores/alunos em formação e ajudá-los na mudança delas julgadas necessária para essa formação. Nessa linha é útil considerar o estudo das obras intitulada percurso de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático, volumes 1 e 2, Saddo Ag Almouloud *et al*. (2022).

A questão metodológica se reduz, portanto, a questão "Como realizar um PEP?" A resposta a essa questão não parece simples de ser construída, assim como não é simples responder à questão "Como andar de bicicleta?". Quem sabe andar de bicicleta, anda. Mas não sabe dizer precisamente como faz pra andar. Em geral, reponde que aprendeu andar de bicicleta após algumas quedas andando de bicicleta.

De modo similar, eu diria, aprendi a realizar um PEP realizando PEP's. Algumas quedas notadamente ridículas, aprendemos a realizar PEP's que ficam cada vez melhores com a repetição, tal como andar de bicicleta.

Claro, alguns princípios precisam ser observados em sua realização para se obter maior chance de sucesso, embora nunca saibamos antecipadamente quando e como usar esses princípios. Pensar fixamente neles atrapalha a realização do PEP. Ignorá-los frusta os objetivos do PEP. Mas aprender a usá-los adequadamente é aprender a realizar o PEP. Assim, conhecer esses princípios é o início necessário para a realização de qualquer PEP.

Em última instância, é preciso considerar que qualquer prática regida por *habitus* acontece quando se aprende a fazer fazendo o que viu outros fazerem em tal e tal situação. O PEP é uma OPC que, como tal, é regida por *habitus* e, portanto, foi preciso eu pôr as mãos às obras.

1.4 A vida continua

As linhas que escrevi, ainda que possam parecer ingênuas, buscam mostram um pouco do que realmente precisei estudar para atender minhas dinâmicas cognitivas encaminhadas pelos sistemas didáticos instaurados sempre que emergiam questões sobre OM's vigentes nas escolas ou sobre formação de professores de matemática, a luz de compreensões disponibilizadas pela TAD.

Muitas obras, entre livros e artigos, de diferentes autores, de diferentes grupos de pesquisas, de diferentes universidades, nacionais e internacionais, foram recorridos em meu PEP pessoal que veio a se constituir num amplo estudo da TAD em relações com diferentes saberes, sobretudo, mas não somente, como a indispensável história e epistemologia das praxeologias matemáticas escolares, intimamente ligada ao desenvolvimento social do conhecimento; parece ser mais uma área a ser considerada, mas que se mostra gigante para compreender a matemática escolar com ajuda da TAD, pois responde e levanta questões não alcançadas pela instituição matemática acadêmica.

As leituras de obras de Newton da Costa, Wittgenstein, Charlot, Bourdieu frente a minha formação matemática com axiomáticas, matemática aplicada, engenharia de sistemas, além de experiências adquiridas com modelagem matemática em contextos concretos de engenharia e economia, me parecem se constituir em boas condições para o desenvolvimento desse PEP pessoal que, sem dúvida, encaminhou meus encontros mais íntimos com a TAD.

Os encontros parecem ainda continuar, pois o PEP pessoal é aberto enquanto a vida continua.

Referências

ALMOULOUD *et al*. *Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático: fundamentos teórico-metodológicos para a formação.* Curitiba: Editora CRV, volumes 1 e 2, 2022.

BOLEA, *et al.* The role of algebraization in the study of a mathematical organization. In I. Schwank (dir.), *European Research in Mathematics Education. Proceedings of CERME,* vol. 1 (p. 135-145). Osnabrücke: Forschungsinstitut fuer Mathematikdidaktik. 1999.

BOURDIEU, P. *O poder simbólico*. Rio de Janeiro: Editora Bertand Brasil, 1989.

BOURDIEU, P. *Le sens pratique*. París: Editions de Minuit, 1980.

BOSCH, M. et. Al. Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2004. 24 (2-3), 205-250.

BROUSSEAU, G. *Théorie des situations didactiques*: Didactique des mathématiques 1970–1990 (N. Balacheff, M. Cooper, R. Sutherland and V. Warfield, Eds.). Grenoble: La Pensée Sauvage, Éditions 1998.

CHARLOT, B. *O sujeito e a relação com o saber*. In: BARBOSA, Raquel Lazzari Leite (Org.). Formação de educadores: desafios e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 2003. p.23-33.

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19/2, 221-226, 1999.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

Chevallard, Y. (2009a). La notion de PER : problèmes et avancées, 2009a, (*in* http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER_problems_et_avancees.pdf

CHEVALLARD. Y. *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder*: questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD, 2009b. Disponível em: http://yves.cheva-llard.free.fr/ . Acesso em: 24 out. 2023.

CHEVALLARD, Y. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). *A teoria antropológica do didático*: Princípios e Fundamentos. Curitiba: Editora CRV, 2018.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

D'AMORE, B. *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora, 1999.

HØYRUP, J. *Jacopo da Firenze's Tractatus algorismi and early Italian abbacus culture*. Springer Science & Business Media, 2007

KLEIN, F. *Elementary mathematics from an advanced standpoint* - geometry. [trad. E. R. Hedrick e C. A. Noble]. New York: Dover Publications, Inc, 2004.

KLEIN, F. *Elementary Mathematic*. Fron an advanced Standpoint. Disponível em: https://dl1.cuni.cz/pluginfile.php/730464/mod_resource/content/2/Felix%20Klein%20-%20Elementary%20Mathematics%20From%20an%20Advanced%20Standpoint_%20Arithmetic%2C%20Algebra%2C%20Analysis%20%281945%29.pdf . Acesso em 10 nov. 2023.

MOREIRA, M. A. Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. In: Encuentro Internacional sobre el aprendizaje significativo. 1997, Burgos. MOREIRA, M.A. et al. (Orgs.) *Actas. Burgos*: Universidade de Burgos, 1997, p. 19-44.

NISS, M. Prescriptive modeling - challenges and opportunities. *In*: STILLMAN, G. A.; BLUM, W.; BIEMBENGUT, M. S. (ed.). *Mathematical modelling in education research and practice*: cultural, social and cognitive influences. Cham: Springer, 2015. p. 67-79.

VERGNAUD, G. Teoria dos campos conceituais. In Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26, 1993.

WITTGENSTEIN, L. *Investigações filosóficas*. Tradução: José Carlos Bruni. São Paulo: Editora Nova Cultural, 1999 (Coleção Os Pensadores).

2- Educação fiscal na formação de professores: articulando saberes não matemáticos e práticas sociais

Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo
Saddo Ag Almouloud

Introdução

Este trabalho aborda um delineamento da pesquisa que foi produzida durante o doutorado da primeira autora. Nela, apresentou-se os elementos fundamentais para composição de um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo do Imposto de Renda para Pessoa Física (IRPF). O objetivo é analisar o problema que ocorre com as condições e restrições de como o professor em sua formação inicial e continuada, utilizando a modelagem matemática na Educação Financeira e Fiscal, deverá direcionar para a razão de ser dos conteúdos que os órgãos reguladores determinam para o ensino Básico.

É interessante salientar que o Modelo Epistemológico de Referência (MER) que desenvolvemos nesta pesquisa, não é uma opção única e exclusiva para se trabalhar o tema sobre a Educação Fiscal com impostos e tributos na educação básica. Contudo, este modelo que consideramos, na nossa concepção, parece-nos favorável para alcançar os objetivos, habilidades e competências determinadas para a Educação Básica em concordância com os documentos reguladores e oficiais brasileiros.

Neste capítulo, tecemos reflexões essencialmente sobre o desenho experimental e os achados oriundos da fase experimental de nosso dispositivo construído no intuito da formação inicial e continuada de professores de matemática, apoiando-se em constructos da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

2.1 Problemática

A Base Nacional Curricular Comum (Brasil, 2018) trouxe a Educação Fiscal e Financeira para os currículos brasileiros, apresentados em todas as disciplinas, principalmente em Matemática. Considerando a maneira como a BNCC incentiva a prática de metodologias ativas, como resolução de problemas, modelagem e ensino por projetos, sempre associadas a questões de grande impacto socioeconômico, político, cultural e ambiental, considerou-se relevante nesta perspectiva investigar a importância do conhecimento contextual no ensino financeiro e fiscal na formação inicial e continuada de professores. A pesquisa de Santo e Guerra (2018), baseada em modelagem, apontou que a falta de domínio do conhecimento não matemático envolvido, pode dificultar ou impossibilitar a realização das tarefas que utilizam planejamento financeiro e fiscal, como no caso da simulação de uma declaração de Imposto de Renda e, em outras situações que surgirem.

Tendo em conta que na formação inicial de futuros professores de matemática, eles não trazem em seu equipamento praxeológico as práticas voltadas para o ensino da modelagem matemática utilizando as funções de saberes não matemáticos associados ao IRPF para o ensino da Educação Fiscal, trazemos a perspectiva de expandir, reestruturar ou até mesmo estimular esses saberes com um projeto para formação, mediante nosso dispositivo "Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP).

2.2 Modelo Epistemológico de Referência do IRPF para a formação de professores

Alicerçados nas obras de Gascón (2014) que se refere ao que compõe o Modelo Epistemológico de Referência (MER), direcionamos para o que o autor denomina modelos que estabelecem mecanismos metodológicos e teóricos. Como afirma:

> modelos epistemológicos de referência (MER) construídos no âmbito da TAD podem ser considerados como tipos ideais que permitam a emancipação da didática das matemáticas em relação aos modelos epistemológicos dominantes nas diversas instituições que fazem parte do seu objeto de estudo, e, graças à sua função fenomenológica, os MER tornam visíveis novos fenômenos didáticos (GASCÓN, 2014, p. 106, tradução nossa).

Para estudar esse problema docente precisamos utilizar um Modelo Epistemológico de Referência (MER), levando em conta os desenhos dos currículos e obras que consultamos para essa pesquisa.

Com isso, propomos um modelo alternativo para o estudo da Educação Matemática, Fiscal e Financeira utilizando o IRPF. Com esse novo modelo feito após a transposição didática interna, queremos revelar o caráter emancipatório das didáticas das matemáticas em relação aos modelos epistemológicos dominantes nas instituições, o modelo proposto torna visíveis novos fenômenos didáticos, segundo Gascón (2014).

2.3 Problema didático

Na perspectiva de Gascón (2011), um problema didático pode ser representado por dimensões elementares, que são respectivamente: epistemológica, econômica-institucional e ecológica. Podemos contemplar sua simbologia, tal como está na Figura 1:

Figura 1: Problema didático

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta \text{ em que } P_1, P_2, P_3$$

Fonte: Adaptado de Gascón (2011)

P_0: simboliza uma formulação inicial do problema, que Gascón denomina de problema docente e que alude aos problemas que o professor esbarra na ocasião que tem necessidade de ensinar um tema ou assunto com objetos matemáticos aos seus discentes.

P_1- Constitui a dimensão epistemológica;

P_2 - Constitui a dimensão econômica;

P_3- Constitui a dimensão ecológica;

P_δ- Problema didático que espelha as três dimensões, que podem gerar novos questionamentos;

$\oplus$:"Incompletude" de P_0 , essa ***incompletude*** diz respeito, ou está relacionada no sentido de cada dimensão completar a outra;

$\hookrightarrow$:significa uma inclusão (formulação completa).

Nessa elaboração, Gascón (2011) caracteriza de problema didático de modelização matemática, e este esquema explorador é utilizado para contar ou expor de forma coerente e coesa como deve ser um problema didático, quando produzido segundo os contextos da TAD.

O problema didático da modelização matemática que vamos considerar a partir daqui é ***MM****, que diferenciamos da modelagem matemática MM. Explicamos melhor segundo a perspectiva de Chevallard a modelização matemática no parágrafo seguinte.

Para Chevallard, em seus primeiros trabalhos falando sobre o ensino de álgebra (CHEVALLARD, 1985; 1989), sua perspectiva antropológica dispõe a modelização matemática como a parte central da atividade matemática, concordando que a modelização não é apenas um aspecto das matemáticas, do contrário, em certo sentido, toda atividade matemática pode ser interpretada com uma atividade de modelização.

Nesta perspectiva, o teórico postula que qualquer atividade científica e, em particular, a atividade matemática, conseguirá ser retratada em termos de correlação entre sistemas e modelos conforme Figura 2.

Figura 2: Problema de modelização matemática

$$\{[(P_0\,(MM^*) \oplus P_1\,(MM^*)\,) \hookrightarrow P_2\,(MM^*)] \hookrightarrow P_3(MM^*)\,\} \hookrightarrow P_\delta\,(MM^*)$$

Fonte: Adaptado de Gascón (2011)

em que P_1, P_2, P_3 são as dimensões:

P_1(MM*) - Constitui a dimensão epistemológica do problema da MM*;

P_2(MM*) - Constitui a dimensão econômica do problema da MM*;

P_3(MM*) - Constitui a dimensão ecológica do problema da MM*;

P_δ-MM* Problema didático que espelha as três dimensões, que podem gerar novos questionamentos para o ensino do Imposto de Renda Pessoa Física, direcionando para a Educação Fiscal;

***IR*-** Imposto de Renda Pessoa Física.

Gascón (2011) afirma que não é possível contemplar todas as questões envolvidas nessas dimensões, contudo haverá uma configuração boa de trabalhar. A fim de dar uma coerência ao significado do esquema heurístico, o autor propõe um tipo de resposta provisória R_{ij} que na TAD fornecerá à questão Q_{ij} sem pretender que seja uma resposta completa e muito menos seja uma resposta definitiva, configura a forma de interpretar e descrever a MM* e sua compatibilidade com o modelo epistemológico geral da atividade matemática proposta para o problema docente ***P_0(MM*)***.

Todavia para Barquero, Bosch, Gascón (2013), esses problemas docentes lidam, de início com a elaboração que o professor concebe em suas articulações para ministrar um conteúdo matemático. Nessa concepção, os autores dizem que esses problemas são concebidos com fundamento na manipulação de "noções disponíveis na cultura escolar importadas, habitualmente, dos documentos curriculares, a forma como é explicado na cultura escolar e a matemática vinculada no problema em questão" (BARQUERO, BOSCH, GASCÓN, 2013, p. 3, tradução nossa).

Chevallard (2013) e Licera, Gascón, Bosch (2019) afirmam que o problema docente está enquadrado em uma instituição ***I***. Em nosso caso, a Universidade Federal do

Pará, especificamente o curso de Licenciatura integrada, a respeito de que pesa uma totalidade de restrições K de inúmeros tipos e, permitidas algumas obras O, como por exemplo, o IRPF na Educação Matemática, Financeira e Fiscal, em que haverá de indicar as condições C que movimentam os sujeitos de I, a achar, estudar e conhecer a obra O para utilizá-la em sua formação inicial.

Assim sendo, o problema didático dos IRPF $\mathbf{P_0(\mathit{IR})}$ é esquematizado da seguinte forma na Figura 3:

Figura 3: Problema didático do IRPF

$$\{[(P_0(IR) \oplus P_1(IR)) \leftrightarrows P_2(IR)\ ] \hookrightarrow P_3(IR)\} \hookrightarrow P_\delta(IR).$$

Fonte: Adaptado de Gascón (2011)

Deste modo, foi designado o problema inicial $\mathbf{P_0}$*(IR)*: Qual a relação que o professor tem com a Educação Financeira e Fiscal? Para que esse problema inicial possa tornar-se um problema de investigação didática, é necessário discutir e evidenciar o Modelo Epistemológico Vigente para o ensino de IRPF não só nas instituições escolares, mas também na noosfera e nas pesquisas em educação matemática, financeira e fiscal.

Em vista disso, apoiados no esquema investigativo, para expandir o problema docente $P_0(IR)$, averiguamos a dimensão epistemológica $P_1(IR)$: Qual o equipamento praxeológico que o professor deve dispor para o ensino da Educação Financeira e Fiscal? Que praxeologias são necessárias para isso? Neste questionamento, trata-se **praxeologias matemáticas** e **praxeologias não matemáticas**, assim como **praxeologias didáticas**. **praxeologias matemáticas** relacionadas com a regra de três, funções lineares, proporcionalidade, Matemática financeira etc. Trata-se também de praxeologias não matemáticas com a legislação fiscal, economia, contabilidade, direito tributário, direito da família etc. Com isso, podemos observar o entrelaçamento entre essas praxeologias e os saberes envolvidos, conforme o Modelo Praxeológico Expandido de Castela e Romo Vázquez (2006) que se baseia no modelo praxeológico de Chevallard, para clarificar o modelo estudado a fim de explicitar sua relevância na atividade matemática e na formação do professor.

Em continuação, desenvolvemos a averiguação na dimensão econômica-institucional, $P_2(IR)$ procurando respostas à seguinte pergunta: De que forma, o Imposto de Renda na Educação Financeira e Fiscal, no âmbito institucional, pode compreender suas regularidades e indicativos didáticos?

Posteriormente, estudamos a dimensão ecológica, $\boldsymbol{P_3(IR)}$, a fim de identificar as restrições $\boldsymbol{K}$ e as condições $\boldsymbol{C}$ institucionais que são impostas à Educação Financeira e Fiscal.

Trazemos a perspectiva das dimensões do problema didático segundo Gascón (2011), como uma estruturação das dimensões básicas e essenciais na investigação da didática da matemática à luz da TAD, em que apresenta a dimensão epistemológica, que focaliza, o que é matemático, que se encontra no centro do problema;

A dimensão econômico-institucional, por sua vez, é direcionada na despersonalização da problemática didática, que encaminha a unidade mínima de análise desses processos de pesquisa; ao que diz respeito à dimensão ecológica, ela destaca as condições que serão necessárias para que ocorra o estudo institucionalizado da matemática, destacando a forma que revela as restrições de todos os tipos que irão aparecer na pesquisa. Na próxima seção trazemos a construção e experimentação do nosso Percurso de Estudo.

2.4 Construção e experimentação de um Percurso de Estudo e Pesquisa para formação de professores (PEP-FP)

O PEP-FP foi desenhado com o objetivo de criar condições, no sentido da TAD, para que os professores em formação construíssem suas organizações praxeológicas, em um conjunto de questões, levando em consideração experiências tidas em sala de aula com ênfase voltada para as atividades matemáticas para o ensino básico.

A formação ocorreu em sete sessões, buscando-se em cada uma delas alcançar nossos objetivos voltados à formação dos participantes. Os registros das sessões ocorreram por meio de vídeos e fotografias. Contudo, registramos com filmagens apenas a primeira sessão. As demais sessões foram registradas somente por meio de áudios das narrativas dos participantes, com o uso de smartphone. Incentivamos nesses períodos momentos de questionamentos com a colaboração dos participantes da pesquisa, para fomentar a interação dos professores, a fim de poder saber quais as condições e restrições existentes.

2.4.1 Sujeitos da pesquisa e contexto institucional

O público-alvo a que se destinou o PEP-FP, na modalidade de um curso de formação, foi composto de professores em formação inicial e continuada que ensinam Matemática nos variados níveis, etapas e modalidades da educação escolar no ensino básico. O curso deu-se no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) que faz parte das atividades desenvolvidas pelo Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI).

2.4.2 Construção e análise do PEP-PF

O PEP-FP ocorreu no segundo semestre de 2022, iniciando em 17 de outubro de 2022 e terminando em 16 de dezembro de 2022, no Instituto de Educação de Matemática e Ciências (IEMCI) do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) da Universidade Federal do Pará, ofertada como planejamento do Curso de Extensão–Práticas Sociais com Modelagem Matemática no ensino básico: o caso da Educação Fiscal, em sete sessões híbridas, presencial e, simultaneamente, remoto. Relatamos a seguir o contexto e descrição praxeológica das sessões da execução do PEP-FP.

2.4.3 Descrição praxeológica das sessões do Percurso de Estudos e Pesquisa (PEP-FP)

Inicialmente foi elaborado um planejamento do projeto de curso de formação juntamente com o orientador, e foi estabelecida uma carga horária de 30h, para ser submetido como proposta à coordenação do PPGECM, a fim de apreciação do Coordenador do Programa que, após ter lido a proposta, sinalizou o aceite. Foi sugerido a expansão da carga-horária para 45h, a qual foi acatada. No entanto, optamos por uma carga-horária de 50h visando um melhor desenvolvimento do projeto, já que as atividades aconteceriam na modalidade de ensino híbrido presencial e online/domiciliar, ou seja, Bimodal.

Os organizadores do curso também foram ministrantes (formadores) da respectiva formação, os quais foram denominados pelas nomenclaturas FEF01, FEF02, FEF03, onde o prefixo “FEF” significa “Formadores de Educação Fiscal”, e os numerais representam, respectivamente, suas posições institucionais em relação à pesquisa de tese doutoral. A formadora FEF01 é a autora da tese doutoral e ministrante do curso. O formador FEF02 é o orientador da tese doutoral. O formador FEF03 é um pesquisador auxiliar que participou junto com os demais formadores no processo de organização e realização do curso de formação.

Ofertamos vagas e 8 participantes confirmaram participação. Diante disso, prorrogamos as inscrições. No desenvolvimento, no entanto, apenas 4 participaram, de fato, da formação, sendo estes considerados na análise dos dados.

Para o desenvolvimento da formação criamos um ambiente virtual, por meio do *Google Classroom*, para gerenciar as atividades e todo conteúdo do curso, para simplificar as dinâmicas de criação, a distribuição e a avaliação de trabalhos.

Os participantes receberam acesso à sala virtual na plataforma Google Meet , como também poderiam participar presencialmente da formação, que ocorreu nas dependências do PPGECM/UFPA, em Belém-PA.

A fim de preservar suas identidades, nomeamos os participantes pelas nomenclaturas AEF01, AEF02, AEF03, AEF04, nas quais o prefixo "AEF" significa "Aprendiz da Educação Fiscal", e os numerais representam a letra inicial de seus verdadeiros nomes, seguindo a ordem alfabética.

O participante EF01 é graduado em Matemática, estudante de pós-graduação (mestrado profissional) e docente da rede estadual de educação da Bahia. A participante EF02 é graduada em Matemática, mestra em Ensino da Matemática e docente da rede estadual de educação do Pará. O participante EF03 é estudante de graduação (Licenciatura Integrada - FIEMCI /UFPA) e a participante EF04 é licenciada em Matemática, estudante de pós-graduação (mestrado acadêmico) e docente de uma escola particular do município de Belém-PA.

Os diretores de estudo respeitaram o tempo de estudo e desenvolvimento de cada participante, observando os avanços no decorrer das sessões que serão apresentadas nas atividades do PEP-FP.

2.4.4 Análise das produções orais dos professores, sujeitos da pesquisa

Para a análise das sessões, observamos as primeiras respostas dos participantes em relação ao questionário aplicado no ato da inscrição (Google Forms). Continuamente desenvolvemos o PEP-FP com a observação e análise de cada sessão (Quadro 1).

Quadro 1: Questão Q_1

Questão (Q_1)	Respostas
Q_1: O que você entende por Educação Fiscal?	**$R_1^{\diamond}$:** É a apropriação de conhecimentos relativos à tributação etc. (AEF01). **$R_2^{\diamond}$:** Corresponde às aplicações (ou não) dos impostos pagos à sociedade (AEF02). **$R_3^{\diamond}$:** Entendo que tem a ver com tributos e impostos. Mas não possuo conhecimento profundo na área (AEF03). **$R_4^{\diamond}$:** São ensinamentos sobre gestão fiscal (AEF04).

Fonte: Santo, p.196, 2023.

Para a maioria dos cursistas, conforme o Quadro 1, a Educação Fiscal englobava assuntos relacionados aos tributos, principalmente no que tange a arrecadação destes. Nesse sentido, convém ressaltar que esta é apenas uma das dimensões da EF, pois conforme observado em Borges (2012) a Educação Fiscal compreende todo o processo educativo destinado a fazer com que o cidadão comum possa entender o real papel do Estado nas relações com a sociedade, seus mecanismos de financiamento e o desempenho das funções públicas.

Um dos pontos específicos, é a função socioeconômica do tributo e o combate à desigualdade e exclusão social, assim como a promoção da justiça, a promoção da ética distributiva, a relação harmoniosa entre o Estado e a sociedade, o exercício do controle social com a finalidade de propiciar eficiência e qualidade do gasto público, o combate à corrupção, a sonegação fiscal, o mau uso de recursos públicos, a disseminação de práticas eficientes de gestão pública, transparência, ética e, sobretudo, justiça fiscal, entre outras. As respostas a esse questionamento inicial evidenciaram que os participantes dispõem de certa relação pessoal com o objeto de estudo em questão. Dessa forma percebemos que essas relações pessoais com a Educação Fiscal representam uma condição favorável.

2.4.4.1 Descrição e análise das produções dos professores sujeitos da pesquisa

Nossa metodologia foi pautada nos termos de um PEP-FP, considerando a prática com Modelagem Matemática como meio de acesso ao saber, constituído a partir de problematizações de situações nos variados contextos de uso da Matemática. A presente proposta do projeto desenvolveu-se por meio de situações próximas às do mundo concreto, compartilhadas socialmente no contexto da Educação Financeira e Fiscal, com os elementos internos às práticas com matemática como a discussão do trabalho de técnicas de maior alcance.

Em outros termos, o exercício da atividade matemática em jogo, tal como postula Chevallard, Bosch e Gascón (2001), ao situar grande parte da atividade matemática, pode ser interpretada como atividade de modelagem. Isto é, as problematizações de complexidade crescente constituem a "razão de ser" do processo de estudos e investigação passíveis de questionamentos de modelos matemáticos providos por intencionalidades de grupos sociais a quem interessa o modelo.

Apresentaremos detalhadamente o desencadeamento das sessões de estudo nos tópicos a seguir.

2.4.4.2 Descrição e análise da primeira sessão de pesquisa

A primeira sessão foi realizada em 17 de outubro de 2022, com uma breve apresentação dos ministrantes e da proposta do curso de formação. Perguntamos aos participantes se já trabalharam/estudaram ou já ouviram falar sobre Educação Fiscal? Indagamos, também, sobre as possíveis dificuldades e iniciamos uma roda de conversa sobre o assunto. A roda de conversa foi situada a partir dos referenciais teóricos da área, como, também, estudos e documentos oficiais e curriculares (IRPF, BNCC, TCT, ENEF) sobre o assunto. Iniciamos a palestra com os diretores de estudo professores FEF1 e FEF3. Comunicamos aos participantes a forma pela qual o curso seria pautado, bem como as expectativas que eles teriam em relação a este, e a necessidade de fomentar o senso e capacidade crítica de modo a corroborar para uma educação com cidadania plena e participativa em face das problemáticas de seus contextos sociais.

Apresentamos as ideias de modelos de situações reais, objetivo do curso, falando sobre os Temas Contemporâneos Transversais (TCT). Falamos, ainda, sobre as Práticas Sociais com Matemática de Chevallard (2005), a Educação Matemática Crítica de Skovsmose, o pensamento crítico de Perrenoud, indagando o que seria a Educação Financeira e Fiscal, o letramento de ambas e sua importância.

O plano de ações realizadas na primeira sessão é, de forma resumida, descrito no Quadro 2.

Quadro 2: Plano para a primeira sessão

OBJETIVOS 1ª SESSÃO	TEMÁTICAS A SEREM DISCUTIDAS 1ª SESSÃO	TAREFAS INCLUÍDAS 1ª SESSÃO
• Verificar o grau de letramento sobre a Educação Fiscal dos participantes. • Identificar se os mesmos compreendiam a importância do curso para sua formação.	• O que é Educação Fiscal? • O que são impostos? • Quais os tipos de impostos ? • Qual a diferença de impostos para tributos? • Qual a importância de se conhecer os tipos de tributos? • Qual a importância do curso para sua formação?	• Procurar as informações, de modo individual de pesquisa virtual para apresentar individualmente sobre tributos e impostos. • Socializar as informações sobre a tarefa para a turma.

Fonte: Santo, p. 197, 2023.

Na roda de conversas ocorreu um fato bem interessante, um dos participantes perguntou por que estávamos trabalhando com esse tema da Educação Fiscal? E para nossa surpresa, uma das participantes respondeu: relatando da importância para sua formação, diante dos fatos que a BNCC exige por intermédio do TCT na macro área Economia, a necessidade de se trabalhar com a Educação Fiscal.

Concordando que de fato, o professor carece de conhecimento factual e de experiências com esses fenômenos que os órgãos reguladores exigem. Essa complexidade quando não é sanada, ocasiona dificuldades para o professor se engajar nas suas atividades. Tais dificuldades e embaraços são denominados por Chevallard de restrições, que ocorrem e se manifestam nas instituições e nos sujeitos que lidam com o objeto de estudo, em nosso caso, a Educação Fiscal.

Considerando o excerto de Chevallard (2011) sobre as restrições e condições, podemos dizer que esses fenômenos dos saberes são necessários para as competências e habilidades, não só para reconhecer a situação, mas também para ter relação com o objeto, para que o equipamento praxeológico do sujeito esteja expandido para trabalhar nesse nível estrutural em que abrange as competências e habilidades, conforme a BNCC. Pois se faz necessário que o sujeito conheça os outros saberes não matemáticos que estão presentes nos modelos apresentados na atualidade que fazem parte do seu dia a dia.

Ainda no diálogo, procedeu-se um questionamento por parte de AEF0 sobre a utilidade da temática da Educação Fiscal na prática escolar. O participante indagou a forma como a EF poderia ser implantada no contexto escolar. Os diretores de estudo conduziram este questionamento de modo a mostrar a razão de ser do objeto em questão e a utilidade na atualidade para a escola básica.

Como tarefa a ser realizada, para posterior socialização na sessão seguinte, os diretores de estudo solicitaram aos participantes para que pesquisassem sobre as noções de imposto e Educação Fiscal, as quais contribuirão para as respostas das demais questões evidenciadas no Quadro 2, em temáticas a serem discutidas.

2.4.5 Descrição da segunda sessão de pesquisa

Na segunda sessão ocorreram as socializações das tarefas solicitadas na 1ª sessão, como também suas discussões. Os participantes, individualmente, apresentaram suas respostas às tarefas. Nesse momento, a partir das apresentações, questionamos sobre as dificuldades/desafios para o trabalho de coleta e organização dos dados.

O Quadro 3 sistematiza o plano de ações da segunda sessão.

Quadro 3: Plano para a segunda sessão de pesquisa

OBJETIVOS 2ª SESSÃO	TEMÁTICAS A SEREM DISCUTIDAS 2ª SESSÃO	TAREFAS INCLUÍDAS 2ª SESSÃO
•Estudar conceitos e noções de Educação fiscal. •Estudar a origem e o significado dos impostos. • Verificar o nível de letramento dos participantes, financeiro e fiscal.	• O que é Educação Fiscal? • O que são impostos? •Letramento Financeiro. •Letramento Fiscal.	•Procurar as informações, de modo individual de pesquisa virtual para apresentar individualmente sobre letramento financeiro e fiscal. •Socializar a informações sobre a tarefa para a turma.

Fonte: Santo, 2023 p. 199

Os participantes realizaram a socialização das informações por eles coletadas, iniciando com a primeira questão "o que é imposto?". Esta questão, na heurística de nosso PEP-FP, caracterizou-se como a Q_2 de nosso percurso de formação, que corresponde a Q_1 que foi usada no início para o preenchimento da inscrição do Curso de Extensão.

No Quadro 4, apresentamos as respostas dadas pelos participantes em relação à questão.

Quadro 4: Questão Q_2

Questão (**Q_2**)	Respostas (**$R^{\diamond}_n$**)
Q_2: O que é imposto?	**$R^{\diamond}_1$**: É um tributo obrigatório cobrado pelo Governo. Isto quer dizer, que é um valor que você paga e contribui para custear as despesas administrativas do Estado. O seu não pagamento pode gerar multas e até punição legal (Fonte:www.serasa.com.br). Pagar imposto, para mim, enquanto membro da população economicamente ativa, é algo ruim, pois praticamente não vemos um retorno imediato (*AEF01)*. **$R^{\diamond}_2$**: Conforme o site da Serasa, imposto é o valor que cada cidadão paga para custear as despesas administrativas do Estado, seja no âmbito municipal, estadual ou federal. Os impostos federais são muitos, com destaque ao IOF, IPI, IRPF, ITR etc. Os impostos estaduais são o ICMS, IPVA e ITCMD. Já os municipais são IPTU, ISS e ITBI. [...] quem mais arrecada é a União. Alguns nem eram do meu conhecimento, como o ITCMD e IT. Os impostos são importantes recursos para a manutenção dos serviços essenciais à sociedade, tais como saúde, educação, transporte. Mas será que esse *feedback* acontece? Nesse momento, é relevante termos uma Educação Fiscal para nos fornecer subsídios para analisar e questionar o que pagamos e o que recebemos de retorno dos órgãos competentes (*AEF02)*. **$R^{\diamond}_3$**: De acordo com o que consultei na internet, há uma diferença entre tributos e impostos. Os tributos são algo institucionalizado na forma de lei, e os impostos dependem de uma finalidade, no caso dos impostos custear os estados e as organizações públicas *(AEF03)*. **$R^{\diamond}_4$**: A participante (*AEF04*) não elaborou uma resposta a esta questão.

Fonte: Santo, 2023, p. 199

As respostas dispostas no Quadro 4 em sua maioria foram originadas, de acordo com as falas dos participantes, de pesquisas rápidas e simples em sites de busca rápida, como Google, Bing e Yahoo, por exemplo. Nas falas dos participantes AEF01 e AEF02, é possível evidenciar uma aproximação, mesmo que ainda distante, com a definição conceitual da espécie tributo, conforme o Código Tributário Nacional (CTN), que partem dele e sua descrição legal no Direito brasileiro conforme seu art. 3°: “Tributo é toda prestação pecuniária compulsória, em moeda ou cujo valor nela se possa exprimir, que não constitua sanção de ato ilícito, instituída em lei e cobrada mediante atividade administrativa plenamente vinculada.”

Em contrapartida, a fala de AEF03 mostra uma presumida diferenciação entre os termos “tributos” e “impostos”, em cuja paramétrica de “tributos” é gênero do qual “impostos” é espécie. Para o participante, tributos e impostos assentam-se sobre uma diferenciação em níveis legais e finalísticos. Enquanto, segundo o participante, os tributos têm uma natureza de imposição legal, os impostos necessitam de uma finalidade.

A segunda questão versava sobre os conhecimentos institucionalizados acerca da Educação Fiscal, que em nosso PEP-FP caracterizou-se como a Q_3. Os participantes trouxeram contribuições advindas de informações pesquisadas em mídias diversas, como, também, de proposições próprias acerca do tema, como segue no Quadro 5.

Quadro 5: Questão Q_3

Questão (Q_3)	Respostas ($R^{\diamond}_{n}$)
Q_3: O que é Educação Fiscal?	$R^{\diamond}_{1}$: A Educação Fiscal é um programa do estado desenvolvido nacionalmente que busca disseminar informações e conceitos de gestão fiscal, favorecendo a compreensão e a intensificação da participação social nos processos de geração, aplicação e socialização dos recursos públicos. A EF se sustenta em três aspectos principais, que são eles: valores, cidadania e cultura fiscal, tem como objetivo fomentar uma cidadania participativa e consciente dos direitos e obrigações dos cidadãos. Um dos desafios para a EF no Brasil, é a superação dos seguintes paradigmas: “a coisa pública não é de ninguém”; “vergonha de pedir a nota fiscal”; “se não sou eu, será outro qualquer”; “levar vantagem em tudo” (*AEF01*). $R^{\diamond}_{2}$: A Educação Fiscal visa fornecer subsídios para analisar e questionar o que pagamos e o que recebemos de retorno dos órgãos competentes e gerir os tributos. A EF nos serve para termos informações de nossas obrigações e capacidades tributárias e fiscais para uma qualidade de vida cidadã, como sinaliza a BNCC, quando afirma que a EF, microárea da economia, é um dos momentos principais do campo da educação, em que se trabalha compreensão sobre tributos, arrecadação, tipologia e destinação, no sentido de enfatizar os direitos e deveres do cidadão (*AEF02)*. $R^{\diamond}_{3}$: A Educação Fiscal tem como propósito proporcionar o questionamento, uma participação cidadã em relação aos impostos que pagamos (*AEF03* – baseado nas respostas dos demais participantes). $R^{\diamond}_{4}$: Vejo que a Educação Fiscal tem como propósito levar os conhecimentos sobre tributação e gestão, a aplicação e fiscalização dos tributos pelo Poder Público. (*AEF04* – baseada nas respostas dos demais participantes).

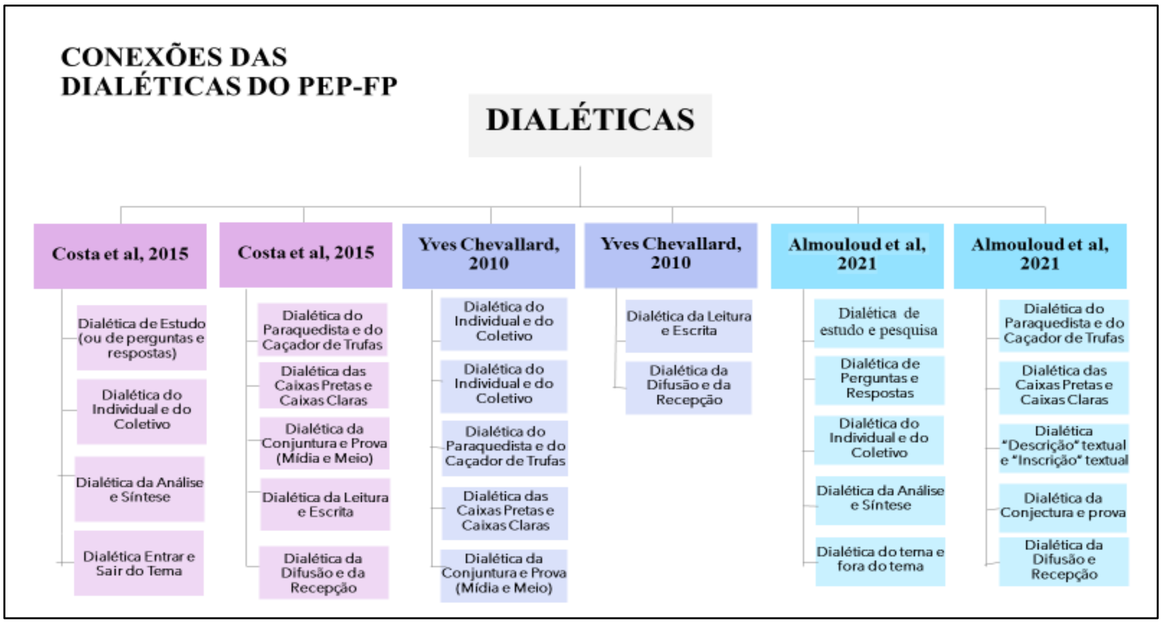
Fonte: Santo, 2023, p. 200-201

Percebemos nas respostas dos participantes (Quadro 5) aproximações conceituais com a literatura da área da Educação Fiscal, mesmo considerando que estas têm como origem pesquisas basilares e “superficiais” em sites de busca pela internet.

Nesse sentido, é oportuno frisar que o ensino do PEP corresponde a um percurso segundo Chevallard (2007, 2012), sendo organizado por dialéticas essenciais, vistas como gestos didáticos no estudo de pesquisa, tais como observar, analisar, avaliar, construir uma resposta própria e difundi-la.

Apresentamos aqui algumas dialéticas que empregamos nas avaliações do PEP-FP, cujo método de ensino envolve orientar um caminho de aprendizado que, conforme Chevallard (2007; 2012), é realizado por meio de dinâmicas. Contudo, existem algumas variações na escrita e no número de dialéticas apresentadas por Chevallard, Costa e Almouloud (Quadro 6).

Quadro 6: Conexões das Dialéticas do PEP



Fonte: Santo (2023) adaptada de Chevallard (2010), Costa *et al*. (2015) e Almouloud *et al*. (2021).

Almouloud *et al*. (2021, p. 443-449) apresentam 10 dez dialéticas fundamentais para a pilotagem do PEP, as quais são Dialética de estudo e pesquisa, Dialética de perguntas e respostas, Dialética do indivíduo e do coletivo, Dialética da análise (praxeológica e didática) e síntese (praxeológica e didática), Dialética do tema e fora do tema (também chamada de entrada e saída do tema), Dialética do paraquedista e das trufas, Dialética de caixas pretas e caixas claras, Dialética da "descrição" textual e "inscrição" textual (também chamada leitura e escrita), Dialética de conjectura e prova (também chamada de mídias e *milieux*), Dialética da difusão e recepção.

Almouloud *et al*. (2021, p. 443-449) acrescentaram mais uma dialética, proporcionando um direcionamento para a pesquisa.

Diante da apresentação dessas dialéticas, com as conexões entre os autores citados anteriormente, iremos apresentar apenas aquelas que utilizamos como ferramenta de análise dos achados e dos momentos de uso como diretores de estudo:

Dialética de estudo e pesquisa, é apresentada na procura contínua por respostas para questões, que serão investigadas, e nessa perspectiva, poderá gerar formulações para novas questões;

Dialética de perguntas e respostas, se apresenta na forma que caracteriza formulações de perguntas e na execução de respostas, sendo que essa execução das respostas deve ser feita na forma oral;

Dialética do paraquedista e das trufas, essa dialética apresenta dois termos que se referem inicialmente ao paraquedista que constitui à procura em grandes áreas do território e o segundo termo se relaciona à procura de tesouros escondidos. Essas representações indicam a forma como um problema pode ser enfrentado e resolvido em uma aula de matemática. A título de exemplo, o "explorador" se distancia do problema e analisa o terreno de fora, entretanto em algum momento terá que inspecioná-lo para achar a solução;

Dialética de caixas pretas e caixas claras, anuncia a importância de qual saber é interessante para responder à uma pergunta geratriz. Ou melhor dizendo, achar um nível certo sobre quanto, e o que estudar de uma obra. Nessa perspectiva esses saberes mais importantes serão "esclarecidos", enquanto outros serão deixados na "escuridão".

As várias dialéticas que foram apresentadas serviram-nos para analisar e obter uma visão global das conexões e estrutura de nosso do PEP-FP.

No primeiro momento, os cursistas aduziram, ainda, que com dificuldade, noções fundamentais acerca da EF. Após a socialização, explanamos sobre as noções conceituais e legais do IR explanando a história do Imposto de Renda (dimensão epistemológica a história do IR no aspecto mundial e no Brasil – apresentação dos diretores de estudo FEF1/FEF3).

Solicitamos, ainda, uma tarefa para que os participantes analisassem situações-problema acerca da declaração e cálculo do IRPF (individual). Os participantes realizaram a socialização dos resultados deste estudo no encontro seguinte.

2.4.6 Descrição da terceira sessão de pesquisa

Apresentamos vídeos e reportagens sobre o Imposto de Renda Pessoa Física (IRPF), de modo que os participantes pudessem fazer a relação da temática em questão. As discussões foram direcionadas de modo que os participantes compreendessem, ainda que de forma preliminar, as nuances do IRPF e a Educação Fiscal e suas implicações, conforme sistematizado no plano da sessão no Quadro 7.

Quadro 7: Plano para a terceira sessão

OBJETIVOS 3ª SESSÃO	TEMÁTICAS A SEREM DISCUTIDAS 3ª SESSÃO	TAREFAS INCLUÍDAS 3ª SESSÃO
•Direcionar os participantes para discurssões sobre o tema. •Direcionar para a razão de ser, porque foi criado os tributos.	•Porque você paga tributos? •Posso entrar com processo contra o Municipío? •Existe retorno desses impostos?	•Resolver uma situação problema sobre o tema apresentado. •Apontar tarefa para a sessão 4.

Fonte: Santo, 2023 p. 204

Ao longo desta sessão, surgiram discussões sobre o uso do CPF (Cadastro de Pessoa Física) nas compras de supermercado e a desconfiança por familiares da participante EF04, gerando novas respostas e questões. Para a próxima sessão propomos uma tarefa com uma situação problema acerca da declaração e cálculo do IRPF (individual). Para socialização dos resultados deste estudo na quarta sessão.

2.4.7 Descrição da quarta sessão de pesquisa

Nessa fase, solicitamos aos participantes uma tarefa para que analisassem individualmente uma situação-problema a respeito da declaração e cálculo do IRPF. Os participantes realizaram a socialização dos resultados no encontro posterior (Quadro 8).

Quadro 8: Situação problema

ATIVIDADE (Individual):
Analise o caso a seguir e em seguida faça o que se pede: O empregado Gustavo recebe rendimentos anuais de salário no valor de R$ 120.000,00, incluindo o décimo terceiro salário, no valor de R$ 9.000,00 com descontos anuais de Previdência Social no valor de R$ 6.850,56 e Imposto de Renda Retido na Fonte no valor de R$ 15.706,56. Possui esposa e três filhos, sendo um menor de 21 anos, outro de 23 anos cursando nível superior e ainda um filho de 26 anos portador de necessidades especiais (PNE). Sua despesa anual com plano de saúde, o que inclui seus dependentes, importou no valor anual de R$ 5.465,00. Gustavo gastou em 2021 com mensalidades de colégio e faculdade dos filhos a importância de R$ 12.000,00, sendo R$ 3.800,00 com o filho menor de 21 anos, R$ 3.800,00 com o de 23 anos e R$ 4.400,00 com o filho mais velho e ainda R$ 5.000,00 com curso de idioma dos dois filhos mais jovens. Ademais, pagou R$ 4.000,00 para o curso de mestrado de sua esposa, bem como, salários para empregada doméstica que totalizaram no valor anual de R$ 16.000,00. O empregado desembolsou no referido ano R$ 2.640,00 para pagamento de Previdência Privada, mais repasses de R$ 3.600,00 para a sogra como alimentanda por decisão judicial, uma vez que não recebe proventos de qualquer espécie ou decorrente de aposentadoria.

Fonte: Santo, 2018

1) Como determinar os rendimentos tributáveis de Gustavo?

2) Como determinar o imposto devido de Gustavo?

Sistematizamos as respostas dos cursistas em relação a essas duas questões nos Quadros 9 e 10, iniciando pela questão relativa à determinação dos rendimentos tributáveis do sujeito da situação problema (Gustavo), que corresponde à questão Q_4 de nosso PEP-FP, conforme o Quadro 9.

Quadro 9: Questão Q4

QUESTÃO (**Q**$_4$)	RESPOSTAS (**R**$^{\diamond}{}_{n}$)
Q$_4$: Como determinar os rendimentos tributáveis de Gustavo?	**R**$^{\diamond}{}_{1}$: Pesquisando na internet sobre o assunto, identifiquei que os rendimentos tributáveis são os ganhos que o contribuinte recebe num determinado período. No caso da situação, os rendimentos tributáveis de Gustavo correspondem a soma dos salários que ele recebeu no ano (*AEF01*). **R**$^{\diamond}{}_{2}$: Todo ano declaro Imposto de Renda e nunca parei para pensar o que são esses rendimentos tributáveis, pois eu pago para um Contador fazer. Pela situação, os rendimentos tributáveis do Gustavo correspondem aos R$ 120.000,00 que ele recebeu de salários (*AEF02).* **R**$^{\diamond}{}_{3}$: Em princípio eu achava que os rendimentos tributáveis seriam os R$ 120.000,00, mas a própria situação mostra uma informação "[...] incluindo o décimo terceiro salário no valor de R$ 9.000,00". Então, pesquisando isso na internet, vi que o 13º é um rendimento que é tributado direto na fonte, com isso, o rendimento tributável do Gustavo seria os R$ 120.00,00 subtraídos os R$ 9.000,00 do 13º, que seria, então, R$ 120.000,00 – R$ 9.000,00, sendo igual a R$ 111.000,00 (*AEF03*). **R**$^{\diamond}{}_{4}$**:** Não declaro Imposto de Renda, mas pela situação problema os rendimentos tributáveis de Gustavo são os ganhos que ele teve no ano, no caso os R$ 120.000,00 (*AEF04*).

Fonte: Santo, 2023, p. 206

As respostas dispostas no Quadro 9 mostram que os cursistas entendem que os rendimentos tributáveis correspondem a todos os rendimentos pecuniários adquiridos pelo contribuinte ao longo de um respectivo ano/calendário.
Contudo, para fins de ajuste anual do Imposto de Renda Pessoa Física (IRPF), há uma diferenciação entre os rendimentos recebidos. Os rendimentos tributáveis são, de acordo com a instrução normativa do IR, para fins do IRPF, são proventos advindos de trabalho assalariado, como remunerações mensais, férias e diferenças salariais etc.

Dessa forma, no caso da situação de Gustavo, no valor anual recebido em salários (R$ 120.000,00) está o 13° salário, o que de acordo com a normativa do IR é um rendimento exclusivamente deduzido na fonte. Essa nuance da situação foi observada apenas na resposta parcial (R$^{\diamond}$) do cursista AEF03, no qual a partir de suas indagações e buscas em mídias específicas (internet) constatou que, na situação, os proventos de 13° salário estavam inclusos nos rendimentos tributáveis, sendo necessário subtrai-los do valor global para determinar, de fato, os rendimentos tributáveis para fins do IR.

No Quadro 10 sistematizamos as respostas dadas a Q$_5$, em relação ao questionamento sobre o imposto devido do sujeito na situação hipotética.

Quadro 10: Respostas da Questão Q_5

QUESTÃO (**Q_5**)	RESPOSTAS (**$R^{\diamond}_{n}$**)
Q_5: Como determinar o imposto devido de Gustavo?	**$R^{\diamond}_{1}$**: Pela situação posta, os rendimentos tributáveis serão a dedução do rendimento tributável dele (R$ 120.000,00), dos valores de previdência social (R$ 6.850,56), do número de dependentes (4 dependentes) e das despesas com saúde e instrução (*AEF01*). **$R^{\diamond}_{2}$**: Pesquisei sobre esses termos e achei que o imposto devido é o valor que o cidadão deve direcionar ao Governo do seu rendimento anual. No caso da situação, o imposto devido de Gustavo será calculado com base nos rendimentos tributáveis que ele recebeu no ano, subtraídas as despesas dedutíveis (previdência, valor por dependente, despesa médica e instrução) (*AEF02*). **$R^{\diamond}_{3}$**: Encontrei na internet um simulador da Receita Federal, e a partir dos dados da situação fui preenchendo-o. Fui pesquisando o que significava as nomenclaturas que tinham lá. Coloquei os rendimentos tributáveis (R$ 111.000,00), depois fui preenchendo com as informações conforme os dados da situação: previdência (R$ 6.850,56); dependentes (4, deduzindo R$ 2.275,08 por cada um); despesas com instrução, só que nesse momento houve um problema. O sujeito da situação teve um total de R$ 16.000,00 em despesa com instrução, porém o programa só deduz até R$ 3.561,50. Continuei preenchendo, despesa médica (R$ 5.465,00) e previdência privada (R$ 2.640,00). Daí apareceu no final o imposto devido, que seria de R$ 9.077,31 (*AEF03*). **$R^{\diamond}_{4}$:** A participante (*AEF04*) não elaborou uma resposta a esta questão.

Fonte: Santo, 2023, p. 206-207

O imposto devido, de acordo com as normativas do IR, corresponde ao valor dos rendimentos tributáveis, efetuadas as deduções legais. Diante disso, de forma geral, todos os cursistas em suas respostas compreendem que o imposto devido deve ser determinado tal como indicam os normativos legais do IR.

Nesta ocasião, alguns participantes apresentaram restrições nos cálculos, por desconhecerem algumas normas e conhecimentos das normativas dos tributos, trazendo à tona a realidade da limitação dos professores em formação inicial e continuada desse letramento fiscal. Assim, conseguimos identificar algumas de suas restrições e condições, o que nos leva a pontuar a importância de levar para a escola esse instrumento que vai auxiliar os professores em sala de aula.

Daí a relevância e imperiosa necessidade de uma formação que contemple a Educação Fiscal nos currículos, para aprofundar o conhecimento de novos saberes para a qualificação do profissional. Além de fornecer elementos para a construção das organizações praxeológicas didáticas e matemáticas dos professores participantes.

2.4.8 Descrição da quinta sessão de pesquisa

Apresentamos à turma uma palestra sobre tributos brasileiros, direcionado ao IRPF, sendo esta dirigida pelo professor Me. Rodivaldo Brito (UFRA/Capanema). Em seguida, os participantes fizeram os questionamentos e indagações acerca da temática da Educação Fiscal e os tributos e impostos.

A Palestra foi intitulada "Tributos Brasileiros", em que o professor Brito encaminhou a programação seguindo um roteiro relativo: as fontes do direito, a organização política e administrativa do Brasil, a competência tributária, tributos, Imposto de Renda Pessoa Física.

As fontes do direito citadas na palestra pelo referido professor foram: as Principais e as Secundárias. Que trazia uma explanação da Organização Política e Administrativa do Brasil. Em que: A Federação está dividida entre: a União, Estados, Municípios e Distrito Federal.

A República está dividida em: Executivo, Legislativo, Judiciário. Especificou a Competência Tributária da União por meio dos artigos. 153 e 154 da CF/88.

Dos Estados e Distrito Federal (Art.155- CF/88), dos Municípios (Art. 156 – CF/88). Desta maneira anuncia a conceituação de Tributo segundo (CTN Art.3°):

> Tributo é toda prestação pecuniária compulsória, em moeda ou cujo valor nela se possa exprimir, que não constitua sansão de ato ilícito, instituída em lei e cobrada mediante atividade administrativa e plenamente vinculada. CTN Art. 3º.

Declarando conforme (CTN- Art.16) que os Impostos são Tributos não vinculados à atividade estatal, ou seja, são devidos independentemente de qualquer atividade estatal em relação ao contribuinte. "Imposto é o tributo cuja obrigação tem por fato gerador uma situação independentemente de qualquer atividade estatal específica, relativa ao contribuinte" (CTN- Art.16), constituindo-se prerrogativa, atribuída pela CF/88, exclusiva da União, Estados, Municípios e Distrito Federal.

Os impostos destinam-se ao custeio de despesas gerais (correntes e de capital), tais como o IPI, o ICMS, o IR etc. Por sua vez, as taxas são vinculadas à atividade estatal, devidos pelo exercício regular do poder de polícia ou pela utilização efetiva ou potencial de serviço público, específico e divisível, prestado ou colocado à disposição do contribuinte (CNT – Art. 77 e 78), não podendo ter o mesmo fato gerador e nem a mesma base de cálculo do Imposto.

A contribuição de melhoria são tributos vinculados à atividade estatal, devidos pela realização de obra pública da qual decorra valorização imobiliária, normalmente com base no rateio do custo total da obra entre os contribuintes beneficiados (CNT –Art. 81 e 82). Existem também as Contribuições Especiais e os Empréstimos Compulsórios.

Na ocasião os participantes estavam bem interessados, o que por consequência, a partir daí conseguiram resolver a tarefa anterior.

Segundo o professor Brito, o IRPF significa Imposto de Renda Pessoa Física. É um imposto federal brasileiro que as pessoas físicas com renda acima de uma determinada quantia devem pagar, sendo assim, uma parte da renda do contribuinte é entregue ao Governo Federal. o Palestrante, disse também, que o dinheiro arrecadado pela União por meio do IRPF, assim como todo o dinheiro arrecadado de impostos em geral, é destinado aos gastos públicos em níveis federal, estadual e regional: saúde, educação, infraestrutura, cultura, esporte, lazer etc.

As perguntas e as respostas fornecidas pelo professor Brito influenciaram para novas inquietações sobre o tema revelado.

2.4.8 Descrição da sexta sessão de pesquisa

Nessa fase, anunciamos a temática sobre a Educação Fiscal e seu panorama mundial e nacional até chegar em seus normativos legais para a educação. A BNCC traz consigo um total de dez competências gerais, que são: conhecimento; pensamento científico, crítico e criativo; repertório cultural; comunicação; cultura digital; trabalho e projeto de vida; argumentação; autoconhecimento e autocuidado; empatia e cooperação; responsabilidade e cidadania.

Essas, através dos arranjos e componentes curriculares, devem permear o processo de construção das habilidades subjacentes. Foram apresentadas as competências no âmbito da BNCC, as quais podem ser adquiridas com o enfoque da Educação Fiscal, conforme dispõe o Quadro 11:

Quadro 11: Competências no âmbito da BNCC na Educação Fiscal

Competências no âmbito da BNCC que podem ser adquiridas com a abordagem da educação fiscal		
Nº	BNCC	EDUCAÇÃO FISCAL
01	Conhecimento	Conhecimento socioeconômico é fundamental para agir e se posicionar na sociedade e no mundo do trabalho.
02	Pensamento científico, crítico e criativo	Desenvolver a capacidade de compreensão, análise, reflexão sobre a utilização dos tributos.
03	Repertório cultural	Conhecer, valorizar e intervir na produção cultural, a partir do uso de tributos.
04	Comunicação	Compreender e divulgar a capacidade de exercício da cidadania fiscal.
05	Cultura digital	Instrumentaliza-se digitalmente para a participação cidadã no processo de elaboração, gestão e controle do orçamento.
06	Trabalho e projeto de vida	Fornecer elementos para compreender a arrecadação e o uso de tributos, e fazer escolhas para seu projeto de vida, de maneira refletida e autônoma.
07	Argumentação	Construir a capacidade de formular, negociar, organizar e defender ideias com base no entendimento dos usos de tributos.
08	Autoconhecimento e autocuidado	Reconhecer emoções, desejos e associá-los a sua responsabilidade para com os tributos e saber fazer escolha..
09	Empatia e cooperação	Fazer-se respeitar por suas escolhas pensadas e contribuir para trabalhos cooperativos e atuação diante da gestão pública de recursos.
10	Responsabilidade	Contribuir com a construção de política de uso de recursos públicos com base em princípios éticos, democráticos, inclusivos, sustentáveis e solidários para redução das desigualdades.

Fonte: Caderno Economia Consolidado, 2022, p. 51

Conforme o Caderno de Economia Consolidado (Quadro 11) que apresenta o itinerário formativo que tem por função articular as competências gerais da BNCC, como um mobilizador de conceitos das seguintes áreas: Matemática e suas Tecnologias; Linguagens e suas Tecnologias; Ciências Humanas e Sociais Aplicadas.

Após todo material ser compartilhado sobre os itinerários formativos e obras discutidas neste período dos seis encontros, solicitamos aos participantes que, mediante aos estudos anteriormente realizados, elaborassem uma proposta didática para o ensino básico relacionada à temática da Educação Fiscal.

Essa foi a nossa 4ª tarefa (21.11.2022) (Quadro 12) que descrevemos na próxima subseção.

Quadro 12: Plano para a sexta sessão

Objetivo	Questão	Tarefa
• Apresentar a EF no contexto normativo da transversalidade do sistema educativo brasileiro.	• Como levar a EF para a sala de aula para o ensino básico?	• Solicitamos aos participantes que, mediante aos estudos anteriormente realizados, elaborassem uma proposta didática para o ensino básico relacionada a temática da Educação Fiscal. 4ª tarefa.

Fonte: Santo, 2023, p. 211.

Essa fase foi muito importante para os cursistas, pois eles conseguiram associar e agregar todos os saberes adquiridos nas sessões anteriores, com isso, foi possível compreender a origem da EF com seus vínculos, assim como, a organização da vida coletiva e individualmente, além de conhecer e identificar os modelos matemáticos usados nos tributos, taxas e impostos, para exercer a sua responsabilidade e cidadania. Além de conhecer os objetivos eminentes da EF no contexto educacional. Desse modo contribuímos para que os participantes pudessem exercer suas funções para as demandas que a sociedades solicita. Percebendo a magnitude de exigir seus direitos e reconhecendo os seus deveres.

2.4.9 Descrição da sétima sessão de pesquisa

Finalizamos os estudos do curso com as impressões e considerações dos participantes em relação à temática da Educação Fiscal e seus projetos para aplicar em sala de aula para o nível escolar relacionado com o Ensino Básico. Questionamos sobre as dificuldades/desafios em relação ao curso.

Durante as sessões finais atendemos individualmente cada participante para a finalização da confecção dos seus projetos. Verificamos as possíveis alterações ou recombinações dos equipamentos praxeológicos dos participantes do curso em relação à Educação Fiscal (Coletando as narrativas).

Quadro 13: Plano para a sétima sessão

Objetivos 7ª sessão	Questões norteadoras 7ª sessão	Tarefa
• Trazer a produção individual dos participantes.	• Quais as condicões favoráveis que ocorreram? • Quais as restrições que ocorreram na contrução do PEP?	• Socializar para os diretores de estudo a tarefa. • Apresentar suas impressões sobre o curso.

Fonte: Santo, 2023, p. 212.

Com base em todos os estudos realizados ao longo do curso, bem como nas pesquisas realizadas pelos participantes, propomos a elaboração de propostas de ensino nas quais se baseavam os conceitos e noções de Educação Fiscal e suas possibilidades de aplicação no contexto da Educação Básica.

Disponibilizamos aos participantes um modelo de plano de aula o qual tinha a seguinte configuração: tema, público-alvo, objetivos, conteúdos, metodologia e avaliação. Facultamos aos participantes a opção de adaptar os planos de aula conforme seus interesses e necessidades de suas propostas. Contudo, observamos que todos optaram por aderir ao modelo disponibilizado. Sistematizamos e dispomos em termos de organizações praxeológicas didáticas (CHEVALLARD, 1999), conforme descrito no Quadro 14.

Quadro 14: Organizações praxeológicas didáticas AEF01

Participante (AEF)	Tarefa (T)	Técnica (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
*AEF0*1	T_1: Conhecer a Educação Fiscal e Tributária; T_2: Reconhecer as diferenças entre tributos, impostos, taxas e afins; T_3: Relacionar os conteúdos da EF com o estudo de porcentagem. T_4: Desenvolver o senso crítico para o exercício da cidadania.	τ_1:Estudo direcionado de obras didáticas sobre Educação Fiscal e Tributária (cartilhas, manuais didáticos, hipertextos, reportagens etc. τ_2: Estudo da literatura fiscal transposta através de mídias confiáveis. τ_3: Resolução de problemas envolvendo o cálculo de alíquotas de tributos. τ_4: Rodas de discussão sobre a importância do exercício da cidadania e fiscal.	θ_1: Noções de Educação Fiscal. θ_2: Noções de legislação tributária e fiscal. θ_3: Cálculo de porcentagens. θ_4: Responsabilidade e cidadania.	Θ_1: Legislação Tributária. Θ_2:Educação Fiscal. Θ_3: Números. Θ_4: Álgebra.

Fonte: Santo, 2023, p. 212

A proposta didática do participante AEF01, disposta praxeologicamente (Quadro 14), tem como objetivo desenvolver uma prática pedagógica com Educação Fiscal com alunos público-alvo da Educação de Jovens e Adultos (EJA), com o intuito de propiciar uma aprendizagem significativa e cidadã do objeto do conhecimento matemático porcentagem.

A análise praxeológica da proposta nos permitiu visualizar quatro tipos de tarefas: conhecer a Educação Fiscal e Tributária, os tributos, os impostos, prezando pela diferenciação de um em relação ao outro, como também, relacionar os estudos dessas noções com o objeto do conhecimento matemático da porcentagem, em prol do exercício de uma cidadania crítica e participativa.

As técnicas envolvem desde estratégias que conduzem à realização das tarefas propostas, até a efetivação de atitudes e valores (exercício da cidadania). Quanto ao discurso tecnológico teórico, identificamos aproximações com as discussões teóricas com a literatura estudada na formação.

Quadro 15: Organização praxeológicas didáticas AEF02

Cursista (AEF)	Tipo de tarefa (T)	Técnica (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
AEF02	T_1: Pesquisar sobre os tributos e suas finalidades; T_2: Reconhecer a importância da fiscalização dos recursos públicos e suas aplicações; T_3:Realizar intervenções na realidade escolar através da Educação Fiscal.	τ_1: Análise de obras dispostas em mídias da internet e textos de divulgação jornalística especializada sobre Educação Fiscal e legislação tributária. τ_2: Rodas de discussão sobre a importância da fiscalização das aplicações dos recursos públicos. τ_3: Elaboração de mostras temáticas sobre a Educação Fiscal na escola.	θ_1: Noções de tributos. θ_2: Noções de Educação Fiscal. θ_3: Responsabilidade e cidadania.	Θ_1: Educação Fiscal.

Fonte: Santo, 2023, p. 213

Por sua vez, a proposta didática da participante AEF02 (Quadro 15) tem como intuito desenvolver um projeto de responsabilidade e cidadania, com seus alunos do ensino médio, através da Educação Fiscal. As tarefas envolvem pesquisas sobre tributos e suas finalidades, e intervenções no cotidiano escolar através da Educação Fiscal.

As técnicas corroboram as ações a serem implantadas pelas tarefas. O bloco tecnológico/teórico, também, converge com o marco teórico da Educação Fiscal.

Quadro 16: Organizações praxeológicas didáticas AEF03

Cursista (AEF)	Tipo de tarefa (T)	Técnica (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
*AEF0*3	T_1: Conhecer o orçamento público municipal; T_2: Conhecer, diferenciar os tributos existentes e suas finalidades; T_3: Reconhecer os direitos e deveres para o exercício da cidadania fiscal. T_4: Resolver problemas envolvendo as quatro operações fundamentais em situações de Educação Fiscal.	τ_1: Investigação sobre a construção orçamento público municipal de Curralinho-PA através do portal de transparência do município. τ_2: Pesquisa sobre os tributos brasileiros através de mídias disponíveis em sites da internet especializados sobre o assunto. τ_3: Produção de cartilhas e mostras temáticas sobre o assunto na comunidade local da escola. τ_4: Resolução de situações problemas em contextos de Educação Fiscal e as operações fundamentais.	θ_1: Noções sobre orçamento público. θ_2: Noções de tributos. θ_3: Cálculo aritmético das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. θ_4: Responsabilidade e cidadania.	Θ_1: Educação Fiscal. Θ_2: Números.

Fonte: Santo, 2023, p. 214.

Na mesma linha da responsabilidade e cidadania, a proposta didática do participante AEF03 (Quadro 16) foca no reconhecimento do orçamento público para propiciar habilidades e competências cidadãs.

Quadro 17: Organização praxeológicas didáticas AEF04

Cursista (AEF)	Tipo de tarefa (T)	Técnica (τ)	Tecnologia (θ)	Teoria (Θ)
*AEF0*4	T_1: Conhecer, os tributos que incidem sobre as compras de mercadorias; T_2: Reconhecer a importância da compra com nota fiscal.	τ_1: Estudo de obras em mídias especializadas sobre o assunto na internet e em textos jornalísticos. τ_2: Elaboração cartilhas e mostras para a conscientização da população para a exigência da nota fiscal nas compras de mercadoria.	θ_1: Noções de legislação tributária e fiscal. θ_2: Responsabilidade e cidadania.	Θ_1: Educação Fiscal.

Fonte: Santo, 2023, p.214.

A participante AEF04 desenvolveu uma proposta didática cujo foco é reconhecer a importância da compra com exigência da nota fiscal.

Observamos que, de modo geral, as organizações didático-praxeológicas pautaram-se em uma relação proximal entre tipos e técnicas. A análise praxeológica mostrou-se pertinente e fundamental para modelizar os processos práticos e teóricos das organizações didáticas constituídas.

2.5 Avaliação do PEP-FP enquanto dispositivo de formação profissional

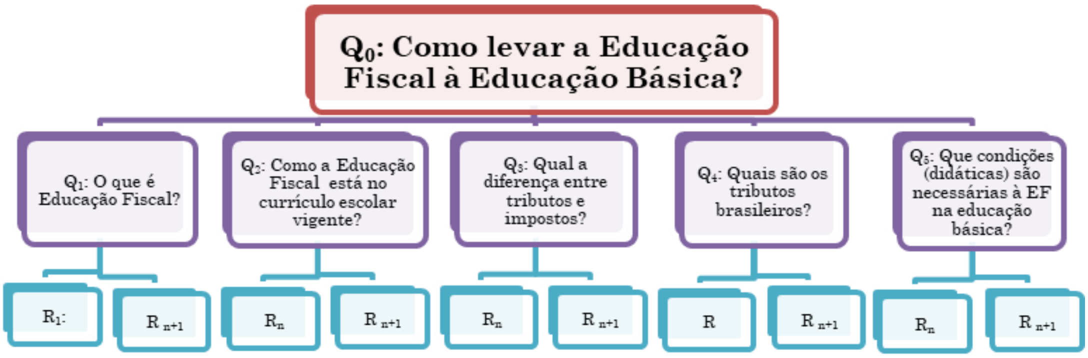
A avaliação como componente imprescindível dos processos de ensino e aprendizagem, foi desenvolvida processualmente ao longo das atividades previstas de forma contínua e cumulativa, valorizando a propriedade ativa dos conhecimentos do objeto de estudo, considerando o envolvimento e participação dos cursistas nas construções de saberes passíveis de desenvolvimento, prevalecendo aspectos qualitativos sobre os quantitativos a respeitos dos saberes em jogo.

As respostas individuais levaram os participantes a ampliarem seus conhecimentos e fomentarem a prática de questionamentos pertinentes sobre a temática abordada durante todo o percurso de estudo. Posteriormente, algumas discussões foram levadas a frente para os projetos dos participantes EF1, EF2, EF3. EF4.

Identificamos nas sessões 1 e 2, as socializações mais significativas, percebemos que os participantes buscavam maiores informações sobre a temática em mídias externas, para além das que fornecíamos no ambiente de aprendizagem, o que caracteriza a dialética do “paraquedista” e dos “caçadores de trufa” (CHEVALLARD, 2010). O participante EF3 trouxe uma obra que poderia auxiliar para responder as questões levantadas e trazia questões relevantes, essa dialética que apresenta uma referência metafórica.

Nas sessões 3 e 4, evidenciamos uma dialética entre perguntas e respostas (COSTA *et al.*, 2015), que surgiram do desencadeamento do PEP-PF, o que se torna uma forma para dinamizar o dispositivo e encaminhar as repostas à questão Geratriz (Q_0), conforme a Figura 4.

Figura 4- Design do PEP-FP



Fonte: Santo, 2023, p. 215.

Na sessão 7, requisitamos aos participantes que elaborassem uma organização didática para o ensino da Educação Fiscal em qualquer nível de ensino. Visando com isso apresentar uma alternativa no estudo para a Educação Básica, conforme o Quadro 18:

Quadro 18: Plano para o design do PEP

Objetivos	Questões norteadoras	Tarefas
• Desenvolver a prática de tudo que absorveu durante o curso. • Apresentar e dialogar com os diretores do curso sobre sua proposta.	• Desenvolver individualmente um dispositivo didático baseado no mesmo objeto de pesquisa apresentado no curso. • De que forma fazer esse dispositivo?	• Apresentar para os diretores de estudo sua proposta com o novo dispositivo. • Aplicar se possível esse dispositivo.

Fonte: Santo, 2023, p. 216

Apresentamos nessa ocasião o diagnóstico de nosso projeto de pesquisa para a formação de professores de Matemática e áreas afins, para o ensino da Educação Fiscal fundamentado no dispositivo PEP-FP.

Nessa perspectiva, o dispositivo do PEP-FP surge como um elo mediador entre os saberes existentes e outros saberes adquiridos, levando a uma compreensão interdisciplinar, pluridisciplinar, multidisciplinar, ultrapassando o MEV, e ampliando para a modelização matemática, difundida pela perspectiva da TAD, que apresenta saberes matemáticos e não matemáticos.

Percebe-se que os modelos epistemológicos, presentes nesta tese, foram construídos para dar condições para que os professores pudessem fazer suas propostas por meio de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias.

Uma praxeologia mista, segundo propõem Castela (2016) e Castela e Romo Vázquez (2011), acontece a partir do modelo praxeológico de Chevallard (1999) como uma extensão desse modelo considerando um componente tecnológico prático e não matemático nos discursos que justificam as técnicas. Essas praxeologias receberam denominações de modelos praxeológicos "estendidos/enlarguecidos" ou ainda praxeologias mistas. Em particular, Covián Chavez e Romo Vázquez (2014) assim afirmam:

> Na investigação de Romo Vázquez (2009) foi utilizado o modelo praxeológico estendido para analisar atividades práticas, projetos de engenharia, nas quais surgiram tarefas não matemáticas realizadas com técnicas matemáticas e validadas em grande parte por tecnologias práticas (COVIÁN CHAVEZ; ROMO VÁZQUEZ, 2014, p. 131).

Dessa forma, um modelo matemático é uma praxeologia matemática transposta da instituição matemática para uma instituição não matemática, como vimos nos modelos praxeológicos do IRPF e da Educação Fiscal. Segundo Santo e Guerra (2018), essas praxeologias são complexas, pois revelam variáveis não matemáticas do modelo por depreenderem de preceitos da legislação tributária, normativas legais e se distanciarem da noção do senso comum.

2.6 Resultados

Os primeiros momentos revelaram que os professores, em seus posicionamentos, demonstraram preocupações diante do desenvolvimento do trabalho das técnicas com modelos matemáticos de impostos, possivelmente em virtude da apresentação do novo paradigma do questionamento de mundo, envolvendo as atividades práticas com a Matemática e os outros saberes correlatos, como a contabilidade, o direito tributário, as normativas e outros.

Posteriormente, com a compreensão e assimilação desses saberes, os professores passaram a ter domínio sobre os modelos matemáticos apresentados e suas praxeologias, resultando no alcance dos resultados esperados por nós.

Um dos fatos relevantes presenciados e divulgados pelos professores participantes do curso de formação, é que eles adquiriram autonomia na realização das suas tarefas, e começaram a enxergar outros saberes no tema estudado, e entenderam que a Matemática sozinha não conseguiria responder todas as questões sobre a Educação Fiscal, nos modelos matemáticos da realidade como os tributos e impostos. O estudo sobre o IRPF contribuiu favoravelmente ao melhor desenvolvimento da temática da Educação Fiscal na formação de professores.

Embora aparentemente não houvesse uma conexão explícita com o IRPF, o exemplo desse modelo estimulou os participantes da pesquisa a desenvolverem outros modelos relacionados com impostos e tributos, como por exemplo, Imposto sobre Produtos Industrializados (IPI), Imposto sobre Circulação de Mercadorias (ICMS). Esse processo promoveu alterações e recombinações em suas relações com o objeto de estudo, agregando novas situações e novas questões, que resultou na modificação e expansão do seu Equipamento Praxeológico e sua relação com o objeto estudado.

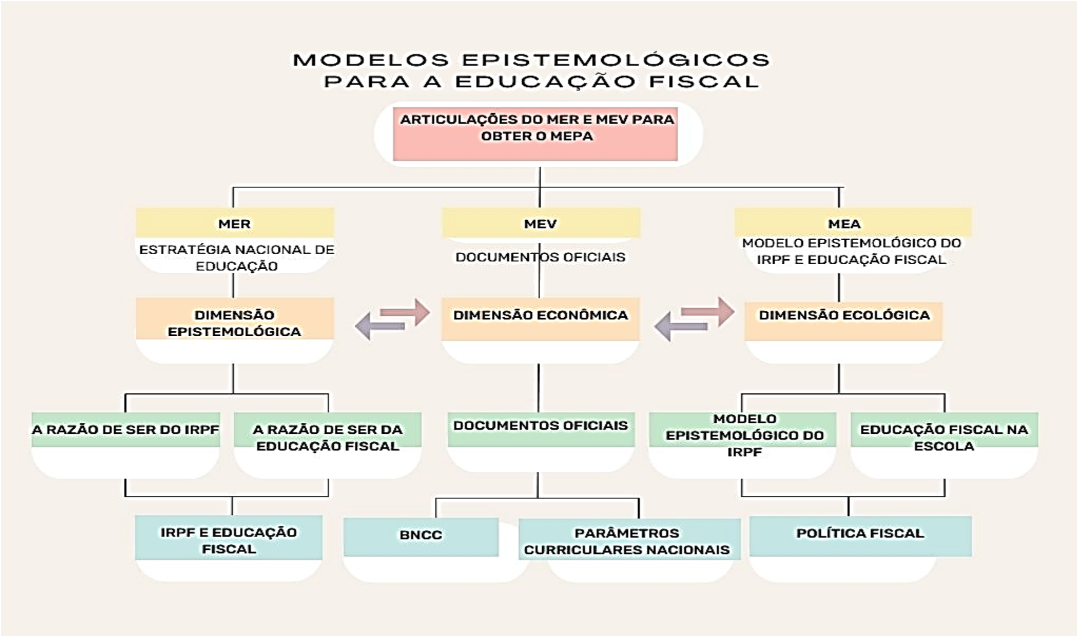
Considerando outras pesquisas correlatas estudadas e analisadas, que abordaram os problemas na formação de professores para ensinar Modelagem Matemática e Educação Fiscal, observamos que nossa pesquisa se diferenciou das outras, por conta da utilização de modelos matemáticos em temas voltados para a realidade da Educação Fiscal no contexto escolar, da forma do novo Paradigma de Questionamento de Mundo da TAD.

Ao proporcionar o MER como o embasamento e suporte à produção da questão Geratriz, que assegurou desenvolver nosso PEP-FP, com as compreensões iniciais que foram progredindo no decorrer do curso, provenientes dos grupos de pesquisa e estudo que participamos, o nicho e habitat realizados no MER resultaram em tarefas, técnicas, tecnologias, teorias sobre a Educação Fiscal.

O estudo do conhecimento socioeconômico, responsável pelo desenvolvimento da capacidade de compreensão, análise e reflexão de tributos, além de conhecer, valorizar e intervir na produção cultural, a começar pelo conhecimento tributário, forneceu elementos para a compreensão da arrecadação e do uso de tributos, constituindo-se fator imprescindível para a construção de projetos de vida que possam refletir as responsabilidades e direitos de cidadãos.

Atingimos de forma positiva, o desenvolvimento do PEP-FP, sustentado no MEA, como dispositivo metodológico-teórico para a formação inicial e continuada de professores, levando em consideração as funções de saberes não matemáticos, presentes em modelos matemáticos em situações que envolvam o Imposto de Renda. A partir do nosso MER e do MEV, foi idealizado individualmente um MEA para cada participante, o que podemos chamar de sistemas didáticos auxiliares.

Figura 5- Modelo epistemológico praxeológico alternativo e articulações



Fonte: Santo, 2023, p. 152.

Alcançamos resultados positivos, quando propiciamos aos sujeitos da pesquisa, condições para que eles elaborassem e analisassem PEP, para seus alunos (ou futuros alunos). Os professores conseguiram detectar as restrições que ocorreram durante a trajetória do estudo, como por exemplo, o abandono de alguns participantes no início do curso. Entendemos que tal fato possa ter acontecido, em virtude da apresentação de um modelo pré-construído pelos professores, como forma de resistência ao modelo de estudo proposto, cuja ideia é o abandono do paradigma monumentalista, ensinado e praticado por décadas, e que representa uma resistência na construção de novos saberes, por meio do Paradigma de Questionamento de Mundo.

Essa compreensão emerge a partir do fato de que a MM, enquanto prática, se insere na noção de práticas sociais com Matemática (CHEVALLARD, 2005), cuja realização em ato, somente é possível com o uso da Matemática, mas sem perder de vista que essa prática social é uma atividade superestrutural que se realiza por meio da integração de saberes infra estruturais matemáticos e não matemáticos.

Ora, como se pode observar, o PEP-FP para a Educação Fiscal ganhou um espaço amplo e transversal, perpassando por todos os níveis de saberes e áreas de conhecimento científico, tendo em vista a importância de sua proliferação, enquanto instrumento de conscientização e agente de transformação social. O PEP-FP-EF (Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação de Professores em Educação Fiscal) possibilitou essa transposição de saberes entre as instituições utilizadoras e produtoras, pois a Matemática se mostra utilizadora e produtora de saberes da Economia, do Direito, das Ciências Tributárias, assim como para as outras ciências envolvidas nesse modelo Praxeológico Epistemológico Estendido, segundo Castela (2016).

O ensino da Educação Fiscal nos centros universitários, e as demais segmentos de ensino, revelam-se primordiais. Contudo, o impacto mais importante e efetivo no contexto social e cultural do Brasil – considerando as flagrantes desigualdades regionais – se colhe no início da vida escolar, ou seja, nas escolas e centros básicos de educação infanto-juvenil.

Consideramos que nossa pesquisa possa auxiliar para novos trabalhos para a formação de professores, visto que, surgiram perguntas e propostas educativas, que devem ser respondidas futuramente, com cursos de formação e quem sabe com um novo Percurso de Estudos e Pesquisa para Formação de Formadores na instituição que realizamos o nosso estudo ou em outras instituições de ensino e pesquisa.

Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag *et al*. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. **Revista de Educação da Universidade Federal do Vale do São Francisco**, v. 11, n. 24, p. 443-449, 2021.

BARQUERO, B., BOSCH, M., & GASCÓN, J. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, 15(1), 1-28, 2013.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricul**ar: ensino médio. Brasília: MEC/Secretaria de Educação Básica, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/historico/BNCC_EnsinoMedio_embaixa_site_110518.pdf. Acesso em: 29 mar. 2020.

CASTELA, C.; ROMO VÁZQUEZ, A. Des Mathematiques a L´automatique: etude des effets de transposition sur la transformee de Laplace dans la formation des ingénieurs. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, France: La Pensée Sauvage, v. 31/1, n. 91, p. 79-130. 2011.

CASTELA, Corine. Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del “boundary crossing”. **Educación Matemática**, v. 28, n. 2, ago. 2016.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. **La Transposición Didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. 2. ed. 3. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. La Transposition didactique : du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble : Pensée sauvage, 1985 - 126p.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie : perspectives curriculaires : la notion de modélisation., Petit x. N° 19. p. 45-75, 1989.

CHEVALLARD, Y. Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique. Dans L. Ruiz-Higueras, A. Estepa & F. Javier García (Éds), Sociedad, Escuela y Mathemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de la Didáctico (p. 705-746). Universidad de Jaén: Gráficas. LA PAZ, 2007. (in http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Passe_et_present_de_la_TAD-2.pdf)

CHEVALLARD, Yves. (2012) Théorie Anthropologique du Didactique, Ingénierie

Didactique du Développement, 2012. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/

CHEVALLARD, Y. La didactique, dites-vous? Èducation & Didactique, 2010. In : https://doi.org/10.4000/educationdidactique.771

CHEVALLARD, Y. Journal du séminaire TAD/IDD 2010-2011., 2011 (in http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2010-2011-4.pdf, Acessado em 25/04/2023

CHEVALLARD, Y. Savoirs et compétences : genèse et résection d'un conflit. Communication présentée au troisième colloque international de l'association pour les recherches comparatistes en didactique, Marseille, France, Janvier 2013

COVIAN CHAVEZ, Olda Nadinne e ROMO VÁZQUEZ, Avenilde. Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y levantamiento y trazo topográfico. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 28, n. 48, p. 128-148, abr. 2014.

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, México, v. 4, n. 2, p. 129,159, 2001.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, RELIME, 14 (2), p. 203-231, 2011.

GASCÓN, J. Los modelos epistemológicos de referencia como instrumentos de emancipación de la didáctica. Educación Matemática, p. 99-123, 2014. In: https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/Esp-1-5.pdf

SANTO, Cláudia Fernandes Espírito; GUERRA, Renato Borges. O papel dos saberes não matemáticos na Modelagem Matemática: o estudo do cálculo do Imposto de Renda Educação Matemática Pesquisa: **Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática**, v. 20, n. 3, 2018.

SANTO, C. A. E. **Saberes não matemáticos articulados às práticas sociais com modelagem matemática no ensino básico**: o caso da educação fiscal na formação de professores. Tese (doutorado). Belém: Universidade Federal do Pará (2023).

3- Proposta de um modelo didático para o desenvolvimento de situações potencialmente acessíveis didaticamente à luz da Teoria do Antropológico Didático

Teodora Pinheiro Figueroa
Saddo Ag Almouloud

Introdução

A Declaração de Jomtien ou Declaração Mundial sobre Educação Para Todos[12] reafirma o direito à educação estabelecido na Declaração universal dos direitos humanos de 1948.[13] Sendo assim, desde 1948 pode-se dizer que era previsto a Educação Inclusiva, pois o "para todos" denota inclusão, uma vez, que na perspectiva da antropologia, somos seres provenientes de diferentes origens, diferentes características físicas, diferentes culturas, diferentes linguagens, diferentes hábitos, diferentes costumes, diferentes valores e diferenças intelectuais.

A Declaração de Jomtien ou Declaração Mundial sobre Educação para Todos, estabelece um grande desafio de forma a promover a inclusão de todos, surgindo várias questões sobre o esclarecimento dos direitos e deveres dos cidadãos na perspectiva da dimensão da lei, do direito civil, como também na perspectiva da dimensão educacional, de como se deve estabelecer as relações entre os sujeitos das instituições de ensino de forma a garantir o direito de ensino e aprendizagem a todos.

Devido a isso, no sentido de significar estas relações, foi preciso trazer à luz conhecimentos mais específicos sobre a Educação Inclusiva, de modo a inseri-la na estrutura de "educação para todos". E, isto foi possível a partir da Declaração de

[12] https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000086291_por
[13]file:///C:/Users/Usu%C3%A1rio/Downloads/Declara%C3%A7%C3%A3o%20Universal%20dos%20Direitos%20Humanos%20-%201948.pdf

Salamanca[14], na Espanha, a qual foi fundamental para a inclusão escolar de Pessoas com Deficiência (PcD).

Atualmente o direito de PcD é regido pela Lei Brasileira de Inclusão (LBI), Lei 13.146[15] (de 06/07/2015), a qual assegura a inclusão de PcD no sistema educacional no Brasil, em todos os níveis e modalidades, desde a Educação Básica à Educação Superior. Desta forma, fica determinado por lei que é dever do poder público assegurar as condições de acesso, permanência, participação e aprendizagem dessas pessoas, devendo eliminar quaisquer barreiras que impeçam o atendimento das necessidades dos estudantes com deficiência.

Especificamente a nível Ensino Superior, a inclusão de PcD é assegurada pela Lei Federal 13.409 de 28/12/2016, a qual prevê a reserva de vagas para pessoas com deficiência nas Instituições Federais de Ensino Superior (IFES).

Sendo assim, este capítulo tem como objetivo lançar um olhar para a Educação Inclusiva, especificamente no que se refere a seguinte questão: Como devem se dar as relações professor, aluno, saber diante da perspectiva da Educação Matemática Inclusiva para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (SPAD)?

Acredita-se que por meio da lupa da epistemologia didática proposta por Chevallard (2005, 2009a, 2009b) e, a partir de elementos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), será possível encontrar respostas à essa questão de modo a trazer à discussão reflexões e/ou contribuições à dimensão da Educação Matemática Inclusiva, tanto na esfera da Educação Básica como da Educação Superior, particularmente no que diz respeito à formação continuada e inicial de professores de matemática.

Dessa forma, segue um breve relato sobre a TAD e seus principais construtos teóricos que embasarão as discussões desta pesquisa.

3.1 Teoria Antropológica do Didático

A TAD é uma ampliação da Teoria da Transposição Didática (TTD) e, apresenta algumas noções fundamentais, segundo Chevallard (2009a).

A primeira noção fundamental é a de objeto, como qualquer entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. A segunda noção fundamental é a relação pessoal de um indivíduo *x* com um objeto *o*, denotado *R (x; O)*. Dizemos que *o*

---

[14] http://portal.mec.gov.br/seesp/arquivos/pdf/salamanca.pdf
[15] https://www.planalto.gov.br/ccivil_03/_ato2015-2018/2015/lei/l13146.htm

existe para x se a relação pessoal de x com o for diferente de vazio, que denotamos por $R(x; O) \neq \varnothing$. A terceira noção fundamental é a de pessoa. Todo indivíduo é uma pessoa. O sistema de relações pessoais de x evolui no decorrer do tempo: objetos que não existiam para ele passarão a existir; outros deixarão de existir; para outros, a relação pessoal de x muda. Nessa evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa. A quarta noção é a de Instituição (I), por meio da qual podemos explicar a formação e evolução do universo cognitivo de uma pessoa x. Uma instituição (I) é um dispositivo social, em que as pessoas x se sujeitam ao ocupar as diferentes posições p oferecidas em I, pondo em jogo os seus próprios modos de fazer e pensar - isto é, suas praxeologias.

A noção de praxeologia está no cerne da TAD. Essa noção generaliza várias noções culturais comuns - as de saber[16] e saber-fazer. Uma praxeologia ($\wp$) é formada pelo bloco práxis $[T, \tau]$, saber-fazer, e o bloco logos $[\theta, \Theta]$ discurso sobre a práxis, em que T se refere ao tipo de tarefas contendo ao menos uma tarefa t, τ é a técnica ou modo de se realizar uma tarefa do tipo T, θ representa a tecnologia da técnica, isto é, um discurso sobre a técnica, o símbolo Θ indica a teoria, ou justificativa da tecnologia.

As praxeologias vivem nos sistemas didáticos presentes nas situações didáticas. Ao que nos referimos à situação didática, é o conjunto das relações estabelecidas em um sistema didático $S(x, y, O)$ - x sendo um aluno ou coletivo de alunos, y é o diretor do estudo podendo ser o professor, e o é o objeto matemático que está sendo estudado -, as quais envolvem as relações $R_I(p; O)$, relação que cada sujeito x, na posição p dentro da instituição I, deve manter idealmente com o objeto O e a relação $R(x; O)$, é a relação que cada sujeito tem com o objeto o. Segundo Brousseau (1978) estas relações são estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno x e/ou um grupo de alunos (X), um certo *milieu* e um sistema educativo, professor (y) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Chevallard (2009b) propõe uma nova perspectiva para a forma como estas praxeologias possam viver nos sistemas didáticos. Esta nova perspectiva se refere a

[16] Neste texto fazemos a diferença entre **saber** e **conhecimento**, conforme definidos por Margolinas (2014, p. 15): O conhecimento é o que realiza o equilíbrio entre o sujeito e o milieu, o que o sujeito coloca em jogo quando investe uma situação. O saber é uma construção social e cultural, que vive em uma instituição e que é por natureza um texto (o que não significa que esteja sempre escrito materialmente). O saber é despersonalizado, descontextualizado, destemporalizado, formulado, formalizado, validado e memorizado. O conhecimento, portanto, vive em uma situação, enquanto o saber vive em uma instituição. Para definir um conhecimento, é necessário descrever as situações que o caracterizam. Para definir um saber, é necessário determinar a instituição que o produz e legitima, o que às vezes leva a considerar várias instituições e seus possíveis conflitos. (tradução nossa)

situações didáticas planejadas a priori para o desenvolvimento de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), o qual tem como objetivo promover um processo de investigação para a obtenção de uma resposta $R^{\heartsuit}$ a uma questão Q potencialmente geradora de outras questões e, que consequentemente mobiliza o desenvolvimento de novas praxeologias, que reúnem conhecimentos antigos e novos ampliando assim, o equipamento praxeológico dos sujeitos envolvidos.

O equipamento praxeológico é, para Chevallard (2007, p.11), o conjunto de praxeologias que uma pessoa x tem em relação a um objeto de conhecimento e, que ficam explícitos em seus registros referente à técnica, à tecnologia etc. O equipamento praxeológico de uma pessoa x está intimamente relacionado às suas sujeições às instituições pelas quais passou e, às suas relações com O, o qual pode ser ajustado/remodelado em um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) ou em um Percurso de Estudo e Pesquisa para Formação (PEP-FP), por exemplo.

O PEP/PEP-FP se fundamenta no paradigma de questionamento do mundo, proposto por Chevallard (2015), baseado no esquema herbatiano: S (x; y; Q) $D \rightharpoondown$ M] $\hookrightarrow R^{\heartsuit}$, em que o estudo e processo de investigação se dão em torno do questionamento Q. M é o *milieu* didático, que no decorrer do percurso vai se modificando e/ou ampliando-se de acordo com as questões derivadas de Q e/ou respostas $R^{\diamond}$ do aluno impressa pela instituição, que x, com a ajuda de y, consegue explicitar. O *milieu* M é o conjunto de todos os recursos úteis e ativados por x para a construção de $R^{\heartsuit}$ (resposta ótima elaborada para a questão Q).

Segundo Almouloud *et al.* (2021), a estruturação dos PEP fundamenta-se em três princípios: a) organizar o PEP em torno de uma questão geradora; b) organizar o PEP em torno de cinco gestos básicos: observar, analisar, avaliar as respostas $R^{\diamond}$, desenvolver, em seguida, divulgar e defender a resposta $R^{\heartsuit}$; c) necessidade de uma pilotagem do PEP, regulando [as] dez dialéticas fundamentais, as quais nesta pesquisa, consideramos quatro dialéticas:

- ✓ dialéticas de perguntas e respostas: a qual se faz presente nos PEP, uma vez que elas evoluem a partir de perguntas que sejam respondidas. A forma como se dão estas perguntas e respostas varia de acordo com o contexto da pilotagem dos PEP, podem ser de forma oral, escrita. No contexto da Educação Inclusiva, a forma como se dão as perguntas e respostas dependem dos tipos de artefatos (meios utilizados para a comunicação) característicos do universo pessoal (ou seja, artefatos de sua familiaridade ou preferência) do aluno PcD, o qual denotamos por (U_{PcD}).

- ✓ dialéticas de mídias e milieux: faz parte de um recurso utilizado durante a pilotagem dos PEP. Uma mídia, por exemplo (vídeos na internet, aulas gravadas, pesquisa na internet) as quais podem ser utilizadas como uma forma de serem analisadas e/ou questionadas para obtenção da resposta de alguma pergunta durante os PEP.
- ✓ dialéticas do ostensivo e não-ostensivo[17]: segundo a tese de Cruz (2022), a qual considera esta dialética como determinante para que ocorra a acessibilidade didática segundo Assude (2014, p.4), ou seja, para que se tenha um conjunto de condições que permitem aos alunos o acesso ao estudo do saber.
- ✓ dialética PcD e Psd adaptada da tese de Cruz (2022, p.64): esta dialética é um construto teórico desta pesquisa. Assim sendo, essa dialética trata de considerar as formas de estar e de se comunicar de sujeitos PcD e PsD em uma sala de aula de Matemática. Pois para que de fato ocorra a inclusão, não basta o aluno PcD fazer parte de uma turma de alunos PsD. A inclusão conforme o que está posto na legislação brasileira, envolve a comunicação entre os artefatos da Educação Inclusiva e da Educação Matemática, a qual deve ser pautada no que orienta a BNCC a respeito de desenvolvimento de habilidades não-cognitivas (socioemocionais[18]) e cognitivas, entre PcD e PsD, as quais evidenciaremos nesta pesquisa.

O conjunto de todos estes construtos teóricos da Didática da Matemática faz parte do universo que denotamos de Continente Didático, mais especificamente, faz parte de um território deste Continente.

O Continente Didático, de acordo com Chevallard (2019) é constituído por territórios. Neste caso, dividimos o Continente Didático em dois territórios: o território

---

[17] Falaremos de um objeto ostensivo – do *latín ostendere*", 'mostrar, apresentar insistentemente' – para nos referirmos a qualquer objeto com uma natureza sensível, uma certa materialidade e que, assim, adquira uma realidade perceptível para o sujeito humano." (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.90)
"Os objetos não ostensivos são então todos esses 'objetos' que, como as ideias, as intuições ou os conceitos, existem institucionalmente – no sentido de que lhes são atribuídos uma existência – sem poderem ser vistos, ditos, ouvidos, percebidos ou exibidos por eles mesmos: eles só podem ser evocados ou invocados pela manipulação adequada de certos objetos ostensivos associados […]" (BOSCH e CHEVALLARD, 1999, p.90)
[18]http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying

dos professores de matemática e professores e pesquisadores da área de Didática da Matemática e, o território da Educação Inclusiva.

O território da Educação Inclusiva é constituído de leis e diretrizes que regem a Educação Inclusiva e também dos sete pilares que são a base para a sua existência : 1) desenvolvimento de atitudes positivas em relação à inclusão, de forma a desenvolver uma cultura de inclusão nos espaços de ensino e aprendizagem; 2) Política e liderança de apoio: estabelecer relacionamentos nos espaços de ensino e aprendizagem que sejam pautados em uma cultura de carinho, bondade, respeito e apoio mútuos.; 3) Processos escolares e de sala de aula fundamentados na prática baseada em pesquisa; 4) Currículo e Pedagogia flexíveis; 5) Envolvimento da Comunidade; 6) Reflexão significativa; 7) Formação de professores e recursos necessário (LOREMAN, 2001, 2007).

Acreditamos que apesar de os territórios terem as suas especificidades, podem se unir em prol de um alvo em comum, a Educação Matemática Inclusiva, a partir da ressignificação das relações entre os seus sujeitos de modo a trazer contribuições para a resposta da questão de investigação: Como devem se dar as relações professor, aluno, saber diante da perspectiva da Educação Matemática Inclusiva para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (SPAD)?

Segue uma análise mais detalhada do Continente didático e de seus construtos teóricos.

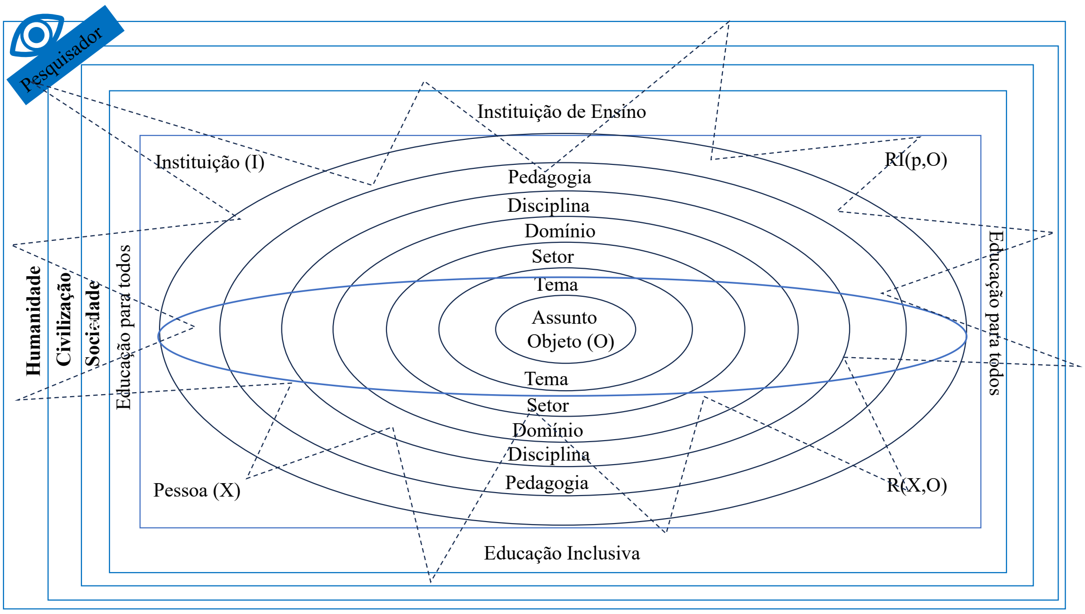
3.1.1 Continente didático

Continente didático é um termo usado por Chevallard (2019) para explicitar um universo de didatas de uma sociedade.

> Antes de tudo, o continente didático em uma determinada sociedade compreende todo o didático presente na sociedade. A didática é o conjunto de todos os atos didáticos pelos quais qualquer instância – sendo uma instância aqui uma pessoa ou uma instituição – tenta ajudar alguma instância a aprender algo que tradicionalmente chamamos de aposta didática envolvida na situação. (CHEVALLARD, 2019)

A Figura 1 apresenta os sujeitos que compõem este continente, representados por X, que se refere a uma pessoa ou a um grupo de pessoas, sujeitos de uma Instituição (I), que coexistem nesta sociedade, segundo uma gama de possibilidades de posições, em suas respectivas Instituições. De acordo como se dão as relações ($R\ (X, O), R_I(p, O)$) em meio as apostas didáticas, que vislumbram as mesmas oportunidades de ensino e aprendizagem para todos, tem-se uma configuração de como se apresenta o continente didático.

Figura 1. Continente Didático



Fonte: Construção dos autores

O desenvolvimento da pesquisa se apoia na hipótese de que a existência do território da Educação Inclusiva se dá na forma de um eixo condutor de possibilidades de olhar o objeto de conhecimento matemático no âmago de sua razão de ser, como objeto epistêmico, a fim de investigar formas de ampliar o leque de possibilidades de um olhar mais diversificado, o qual traremos à discussão.

Na Figura 1, o desenho em pontilhado se refere aos impactos do território da Educação Inclusiva, que perpassa todos os níveis de co-determinação didática (CHEVALLARD, 2019), desde a humanidade até o objeto de conhecimento em jogo, revelando desafios diante das necessidades de adaptações e/ou mudanças nos espaços das Instituições de Ensino, nos processos de Transposição Didática Interna (TDI), os quais podem causar rupturas de contrato didático e revelar aspectos mais específicos das relações $R_I(p, O)$, $R(X, O)$ em meio a estes processos no território da Didática da Matemática.

Atualmente o que está instituído nas leis (Lei 13.146, Lei Federal 13.409) garante o direito de pessoas PcD ao acesso às Instituições de ensino e à aprendizagem de forma igualitária. Mas, ao lançar o olhar para os níveis de co-determinação didática e, às pesquisas sobre a Educação Matemática Inclusiva (Kollosche *et al.*, 2019), percebe-se uma necessidade de discussões dos níveis “Tema e Assunto”, os quais, segundo

Chevallard (2002), são os níveis de maior especificidade, pois se referem ao objeto de conhecimento que está sendo estudado ou investigado no cerne dos atos didáticos de professores ou pesquisadores em meio as praxeologias matemáticas em processos de TDI.

Uma questão norteia estes dois níveis de co-determinação didática: Quais são as condições e restrições à acessibilidade didática na perspectiva da Educação Matemática Inclusiva?

Com relação à acessibilidade didática Assude (2014, p. 4) assevera que "é o conjunto de condições que permitem aos alunos o acesso ao estudo do saber: formas de estudo, situações de ensino e aprendizagem, recursos, apoios, entre outros".

A busca por acessibilidade didática requer uma nova configuração do Continente Didático, de forma a intercomunicar os territórios dos professores de matemática e professores e pesquisadores da área de Didática da Matemática e da Educação Inclusiva.

Esta intercomunicação requer a ressignificação das relações entre os seus sujeitos de ambos os territórios e o saber a ser apropriado de forma legitimada no Continente Didático.

O estudo e pesquisa desta nova configuração é realizado a partir de uma analogia a um jogo de quebra-cabeça na busca de um encaixe ideal de cada peça de ambos os territórios para que ocorra a acessibilidade didática e consequentemente a apropriação do saber em jogo.

Sendo assim, propomos uma análise minuciosa de algumas peças do Continente Didático, de forma que seja possível responder à questão: Como devem se dar as relações professor, aluno, saber diante da perspectiva da Educação Matemática Inclusiva para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (SPAD)?

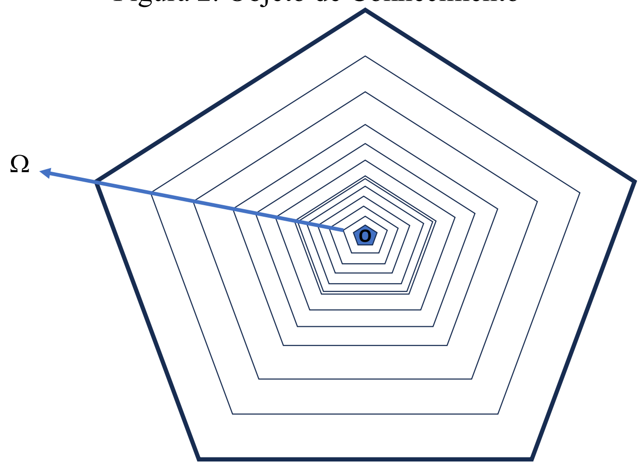
No processo de estudo e pesquisa desta nova configuração do Continente Didático evidenciamos algumas peças principais do quebra-cabeça: Objeto de conhecimento (o*)*, relações pessoais $R\ (X, O)$, relações institucionais $R_I(p, O)$) e ao que chamamos de relações interpessoais, $R(x_1 \leftrightarrow x_2, O)$, ou seja, relação entre ambos os sujeitos de cada território e o saber em jogo, as quais comentaremos com mais detalhes no desenvolvimento deste texto.

3.1.2 Objeto de conhecimento

A Figura 2 apresenta o objeto de conhecimento (O) da Figura 1 em um nível máximo de profundidade procurando fazer uma analogia a uma dimensão infinita de busca deste saber de tal forma a ressignificá-lo no âmbito da Educação Matemática

Inclusiva (EMI) e seus artefatos, tendo como pano de fundo a TAD, a partir de ajustes de técnicas que são justificadas por tecnologias que requerem conhecimentos de ambos os territórios, as quais são justificadas por teorias na área de matemática e por teorias relacionadas à área de Educação Inclusiva, em um contexto de situações didáticas fundamentadas nos sete pilares da Educação Inclusiva (LOREMAN, 2001, 2007).

Figura 2. Objeto de Conhecimento



Fonte: Construção dos autores

No âmbito da Educação Matemática Inclusiva, ressignificar *o* a partir dos artefatos da EMI, envolve adaptações de recursos didáticos e/ou tecnológicos. Pode-se dizer que essas adaptações sob a lupa da TAD referem-se a um conjunto de praxeologias mistas, pois envolvem saberes matemáticos e não-matemáticos (CASTELA (2016) e CASTELA e VÁZQUEZ (2011)). O planejamento e a implementação dessas praxeologias dependem do nível de profundidade do que se sabe da epistemologia de *O*, dos obstáculos de aprendizagem e de um equipamento praxeológico do professor EP(x) que dê abertura a um processo de TDI acessível didaticamente, não apenas no sentido de adaptação de materiais com os respectivos recursos didáticos e/ou tecnológicos específicos da Educação Inclusiva, mas que neste processo de adaptação sejam levados em consideração um conjunto de distúrbios e/ou limitações do universo do aluno PcD (U_{PcD}), tais como, limitação em gestos, distúrbios cognitivos, sensoriais e/ou motores, entre outros.

Na Figura 2, o parâmetro Ω é um sinalizador que indica que quanto maior for o nível de conhecimento de *O*, tanto do ponto de vista do objeto epistêmico quanto na interseção deste conhecimento com o conhecimento do universo do território do aluno PcD, maior será a possibilidade de desenvolvimento de uma tarefa com potencial de acessibilidade didática de *O*.

O parâmetro Ω é posto nesta pesquisa como um possível sinalizador do que Reydi (2013) relata sobre tensão entre "significado" e "algoritmo" ou "técnica". O objetivo nos processos de TDI é reduzir a tensão entre significado e técnica, a partir de um nível elevado de Ω, de forma a refletir um equipamento praxeológico pessoal (EP(x)) repleto de significados, capaz de um discurso matemático validado.

Mas, para isso, existe uma peça-chave neste processo de TDI, representado pela tríade aluno do curso de Licenciatura em Matemática (ALM), professor de Matemática, da Educação Básica (PMEB) e o professor da sala de recurso, especialista da Educação Inclusiva (*PREI*) ou professor da Educação Superior ($PMES$) e Núcleo de Acessibilidade e Inclusão (*NAI*) e o Saber. A forma como se dão estas relações pessoais, interpessoais e institucionais com o impacta diretamente nos processos de ensino e aprendizagem de o e na legitimidade do saber.

A seguir apresentamos uma discussão a este respeito ao prosseguir com a construção da nova configuração do Continente Didático, Figura 1, especificando o contexto do universo das Instituições de Ensino e as relações entre os seus sujeitos, a partir da discussão da proposta de um Triângulo Didático para Acessibilidade (TDA) que propõe uma intercomunicação mais efetiva entre os sujeitos de ambos os territórios.

3.1.3 Relações pessoais e interinstitucionais e Triângulo Didático para Acessibilidade (TDA)

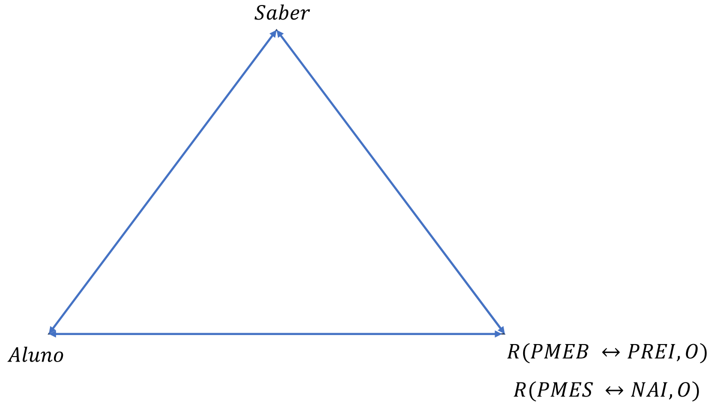
Das pesquisas realizadas na área de Educação Matemática Inclusiva pode-se dizer que para que haja a acessibilidade didática se faz necessário uma operação conjunta entre os sujeitos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem, na busca de um ajuste refinado de algumas peças do universo de conhecimento de o e das relações pessoais $R(x, O)$, interpessoais, $R(PMEB \leftrightarrow PREI, O)$; $R(PMES \leftrightarrow NAI, O)$, $R(ALM{\leftrightarrow}PREI/NAI, O)$ e institucionais, $R_I(x, O)$ dos sujeitos envolvidos nestes processos.

Acreditamos que a operação conjunta consiste em uma maior interação entre os professores PMEB & PREI, PMES & NAI, de tal forma a estes sujeitos não caírem na armadilha da cegueira didática[19] (ROINÉ, 2012).

[19] Segundo Roiné (2012) a cegueira didática refere-se impossibilidade de os professores considerarem os parâmetros (didáticos e situacionais) sobre os quais poderiam efetivamente atuar para ajudar os seus alunos. A ajuda é considerada em si mesma; não questionada didaticamente, contribui para complicar o trabalho dos alunos a ponto de torná-lo incerto.

A Figura 3 apresenta uma adaptação do triângulo didático considerado por Brousseau (1986) como um sistema mínimo que caracteriza as interações entre professor, aluno e saber, o qual denominamos por Triângulo Didático para Acessibilidade (TDA).

Figura 3. Triângulo Didático para Acessibilidade (TDA)



Fonte: Construção dos autores

O TDA, Figura 3, faz parte da construção da nova configuração do Continente Didático, no que diz respeito ao universo das Instituições de ensino, onde os sujeitos PMEB, PREI, PMES e NAI se fazem presentes.

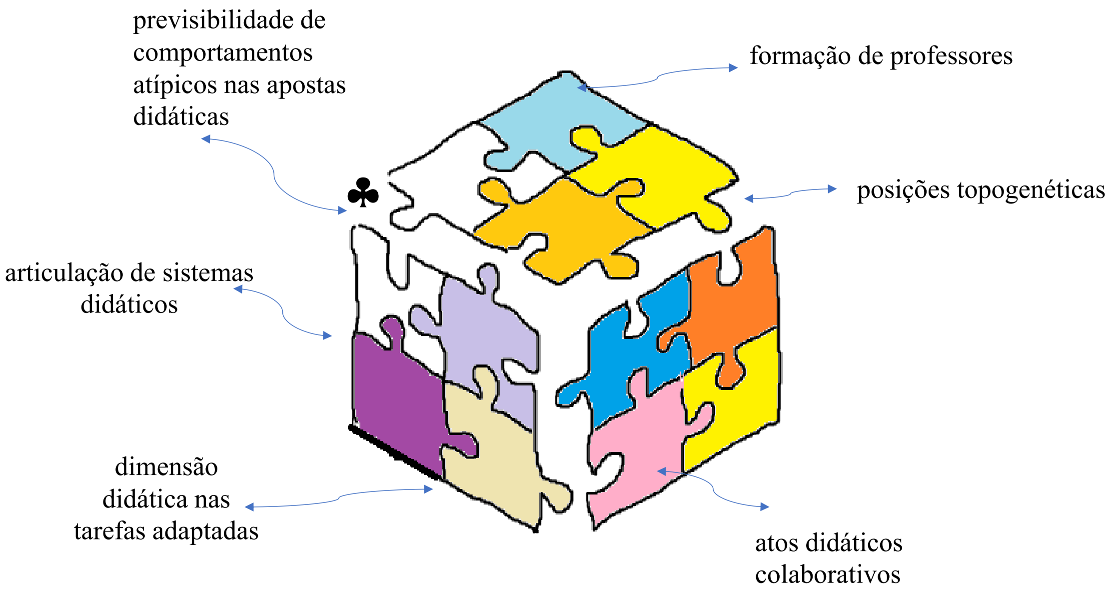
Inferimos que o estreitamento destas relações interpessoais contribui para o desenvolvimento de uma *Situação Potencialmente Acessível Didaticamente* (SPAD).

Definimos SPAD como uma situação que é constituída de dois parâmetros sinalizadores: Δ, sinalizador de dificuldades na aprendizagem matemática, relativo as especificidades de O (território dos professores de matemática e professores e pesquisadores da área de Didática da Matemática) e, $\spadesuit$ relativo as especificidades do aluno PcD (território da Educação Inclusiva).

Mas, para que uma SPAD exista, se faz necessário conhecer as peças do quebra-cabeça que impactam diretamente na nova configuração do Continente Didático e, que leva em consideração os setes pilares da Educação Inclusiva e a existência de um parâmetro $\clubsuit$ responsável pelo refinamento das discussões de algumas peças do quebra-cabeça de tal forma que os ajustes necessários sejam realizados para que ocorra o encaixe ideal delas, e, assim a intercomunicação efetiva entre os territórios.

Na Figura 4, cada face do cubo representa um encaixe de peças relativas respectivamente: a) à formação de professores, pois segundo Baraldi et al (2019), existe a resistência à inclusão escolar pelos professores devido a crenças ou pela falta de condições adequadas nas Instituições em que trabalham; b) aos atos didáticos colaborativos entre os sujeitos, pois segundo Baraldi et al (2019), existem dificuldades de interação entre os profissionais envolvidos, que nem sempre trabalham de forma colaborativa; c) às posições topogenéticas[20] dos sujeitos de uma Instituição que varia de acordo com a posição que ocupam (ASSUDE, 2014), no sentido de uma atuação dos sujeitos em suas respectivas posições de tal forma que contribua nos processos de ensino e aprendizagem de *O*; d) à articulação de sistemas didáticos (DUPRE, 2022), respectivos da sala regular e da sala de recurso; e) à previsibilidade de comportamentos atípicos nas apostas didáticas (GIROUX, 2008), muito importante na fase de planejamento das situações didáticas e, que nesta configuração do Continente Didático, se faz necessário uma relação mais efetiva entre os sujeitos de ambos os territórios, cada sujeito na posição *p* de DM (professores de matemática e/ou professores e pesquisadores da área de Didática da Matemática) e profissional da Educação Inclusiva (professores e /ou pesquisadores); f) à dimensão didática das tarefas adaptadas, (FAURE e GOMBERT, 2021). Esta peça é de fundamental importância para a nova configuração do Continente Didático e requer uma validação conjunta entre os sujeitos de ambos os territórios.

Figura 4. Peças de um quebra-cabeça (formato cubo) para intercomunicação efetiva entre ambos os territórios



Fonte: Construção dos autores

[20] O *topos* de uma determinada instituição é constituído por todos os lugares previstos e legitimados institucionalmente. O topos indica não apenas o que se espera de tal lugar, mas também um intervalo de ações possíveis e aceitáveis não distantes dessas expectativas. Esse topos pode ser descrito em termos de relacionamento institucional e praxeologia (Chevallard ,1999).

O ajuste destas peças de encaixe sob o pano de fundo dos sete pilares da Educação Inclusiva constitui a proposta de um Modelo Didático para o desenvolvimento de uma SPAD à luz da TAD, o qual será descrito em detalhes a seguir

3.2 Proposta de um Modelo Didático para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis didaticamente (MD_SPAD) à luz da TAD

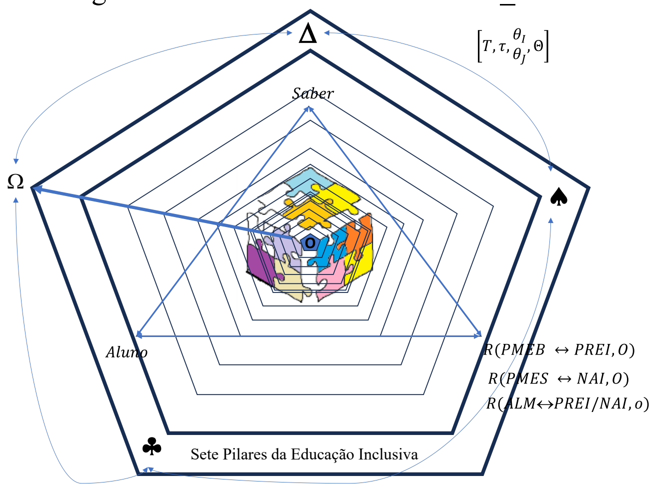
O MD_SPAD é o resultado de um processo de construção de uma nova configuração do Continente Didático de forma a promover a intercomunicação entre o território de professores de matemática/professores em formação e/ou professores e pesquisadores da área de Didática da Matemática e o território da Educação Inclusiva, de forma a obter um Continente Didático da Educação Matemática Inclusiva à luz da TAD.

O MD_SPAD é fundamentado na TAD e nos Sete Pilares da Educação Inclusiva (LOREMAN, 2007), os quais exercem o papel de norteadores das condições essenciais para o desenvolvimento de práticas inclusivas nos espaços das instituições de ensino.

O objetivo do MD_SPAD é apresentar a possibilidade de estudo dos fenômenos didáticos a partir da intercomunicação efetiva entre os dois territórios, no sentido de proporcionar meios à luz da TAD para o desenvolvimento de habilidades necessárias à prática de atos didáticos inclusivos nos processos de TDI.

A Figura 5 apresenta os construtos teóricos do MD_SPAD, tais como o Triângulo Didático para Acessibilidade (TDA), noções fundamentais da TAD, tais como Objeto (o), Pessoa, (x), Instituição, (I), Relação pessoal, $R(x, O)$, Relação Institucional, $R_I(x, O)$ e Relação Interpessoal, $R(PMEB \leftrightarrow PREI, O)$, $(PMES \leftrightarrow NAI, O)$, $R(ALM \leftrightarrow PREI/NAI, O)$ e, os parâmetros sinalizadores: Ω, Δ, ♠ e ♣.

Figura 5. Construtos teóricos do MD_SPAD



Fonte: Construção dos autores

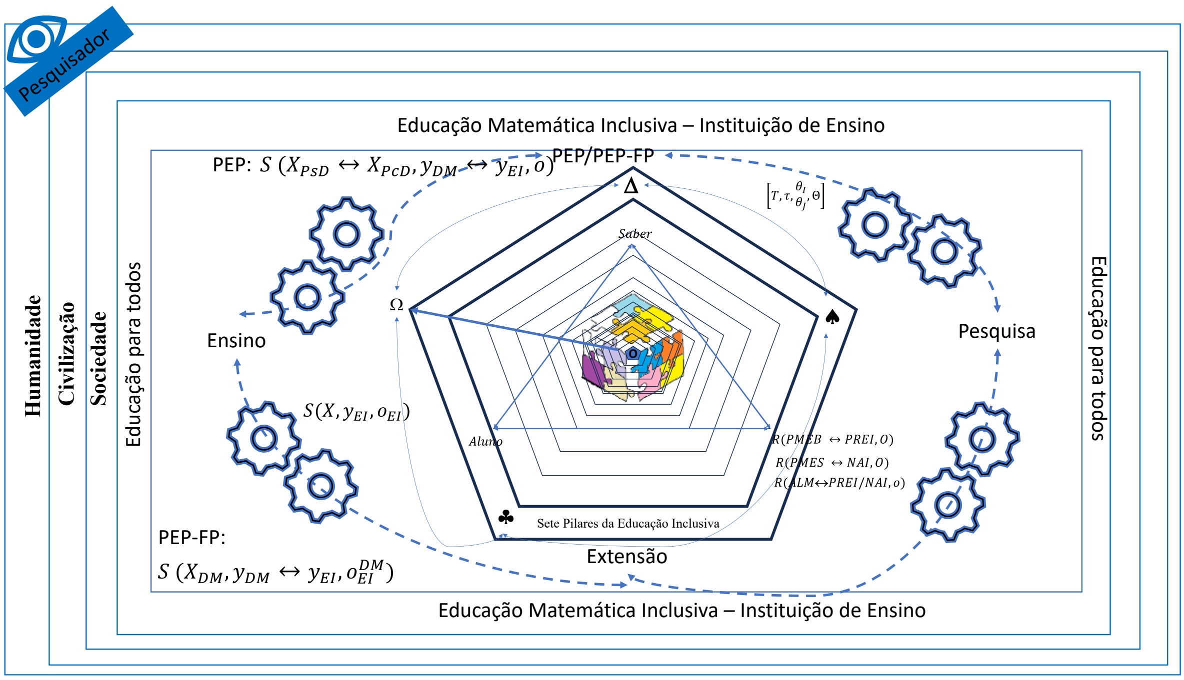
Pela Figura 5 apresentamos uma visão de profundidade em que o objeto de conhecimento O, se encontra no centro do quebra-cabeça (formato cubo) da Figura 4. Pois, as condições e restrições para que ocorra o ajuste necessário das peças do quebra-cabeça estão intimamente relacionadas ao nível de profundidade de conhecimento de O medido pelo parâmetro Ω e, por um estreitamento das relações $R(x, O)$, Relação Institucional, $R_I(x, O)$ e Relação Interpessoal, $R(PMEB \leftrightarrow PREI, O)$, $(PMES \leftrightarrow NAI, O)$ e $R(ALM{\leftrightarrow}PREI/NAI, O)$ para que de fato ocorra o desenvolvimento de praxeologias mistas, características de uma SPAD.

O cubo se apresenta na Figura 5 no centro do TDA e, como pano de fundo dele, representando a necessidade de discussões nos espaços das Instituições de ensino, tanto na Educação Básica quanto na Educação Superior, para o planejamento de uma SPAD.

O MD_SPAD propõe o desenvolvimento de um PEP-FP, nos cursos de formação de professores e em cursos de formação continuada, de forma a promover a comunicação entre os sujeitos de ambos os territórios no tripé pesquisa, extensão e ensino de modo a contribuir para o desenvolvimento de habilidades para o planejamento de SPAD.

A Figura 6 apresenta a nova configuração do Continente Didático em que o MD_SPAD se faz presente.

Figura 6. Continente Didático – Educação Matemática Inclusiva



Fonte: Construção dos autores

Esta nova configuração do Continente Didático propõe o PEP-FP, como um dispositivo a ser aplicado na formação inicial e continuada de professores, a partir de um sistema didático articulado para a acessibilidade: $S\ (X_{DM}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI}, Q_{EI}^{DM})$, onde X_{DM} representa os sujeitos do território DM, professores de matemática (no caso de formação continuada: X_{PMEB} / X_{PMES}) ou professores em formação (alunos do curso de Licenciatura em Matemática:X_{ALM}) e, y_{DM} e y_{EI} são considerados orientadores/supervisores, profissionais especialistas respectivamente de ambos os territórios, professores de matemática e pesquisadores da área de Didática da Matemática, do território DM e do território da Educação Inclusiva (EI), Figura 6. Ambos os sujeitos deste sistema didático estabelecem uma comunicação para obter a resposta para a questão Q_{EI}^{DM}: Como desenvolver habilidades para o planejamento de SPAD, em que o objeto de conhecimento O se torna o_{EI}^{DM} potencialmente acessível, a partir da articulação de artefatos do território DM e EI?

É importante comentar que a estrutura do MD_SPDA, permite a pilotagem do PEP-FP em seus 5 módulos, os quais conforme Almouloud et al (2021) são: M_0: Tornar explícitas as razões de ser do PEP, M_1: Viver um PEP, M_2:Analisar o PEP vivido, M_3: Desenho de um PEP e M_4:Gerenciar e Experimentar um PEP. Mas, nesta pesquisa será apresentada apenas uma experimentação do módulo M_0, M_1 e M_2. O módulo M_3 e M_4 seria referente ao sistema didático que consta na Figura 6: $S\ (X_{PsD} \leftrightarrow X_{PcD}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI}, O)$, onde estes professores em formação inicial ou continuada, fariam o desenho do PEP para uma turma de alunos constituída por PsD e PcD, o público alvo seriam os alunos $X_{PsD} \leftrightarrow X_{PcD}$, o objetivo seria o desenvolvimento de uma SPAD, de tal forma que ocorra a interação entre os mesmos ($X_{PsD} \leftrightarrow X_{PcD}$), mas apesar dos professores se posicionarem como y_{DM}, a interação com professores da Educação Inclusiva (y_{EI}), para o modelo MD_SPAD, deve ser permanente. Onde y_{EI} pode ser representado pelo PREI a nível Educação Básica ou o NAI a nível Ensino Superior.

O par de engrenagens, Figura 6, representa as articulações que precisam ser providas de ajustes na relação $R(PMEB \longleftrightarrow PREI, O)$ no PEP-FP para formação continuada e na relação $R(PMES \longleftrightarrow NAI, O)$ e, R(ALM↔PREI/NAI) para o PEP-FP em cursos de licenciatura em matemática.

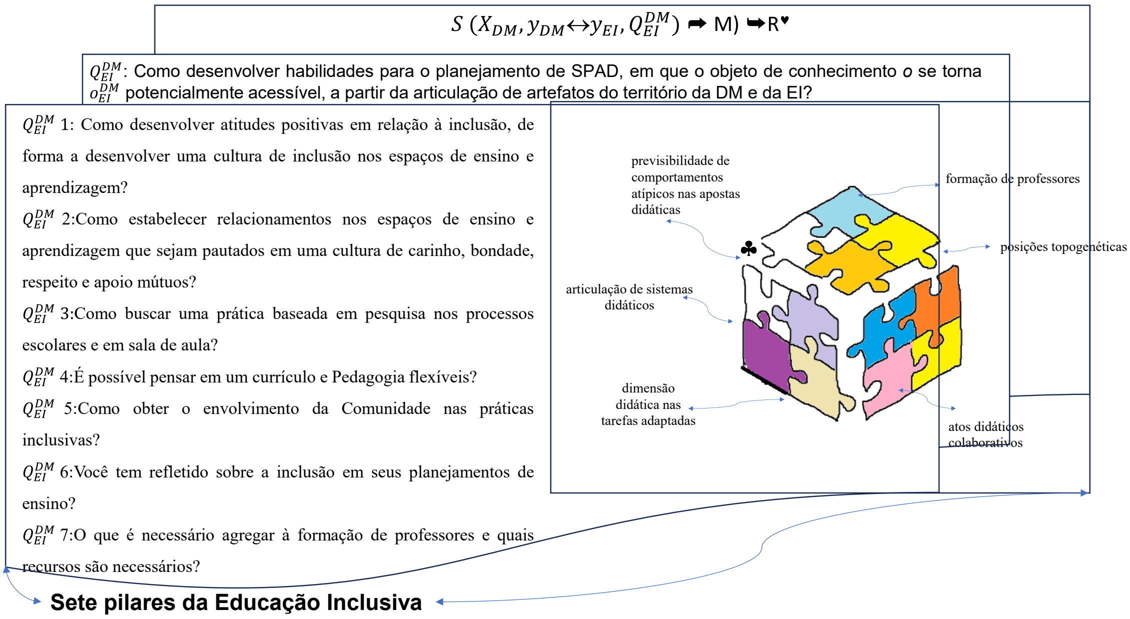
O bom funcionamento das engrenagens depende de manutenção do encaixe das mesmas a partir de uma lubrificação específica e na frequência adequada. Em nosso contexto, esta manutenção refere-se as frequentes discussões entre os sujeitos de ambos os territórios, as quais promovem ajustes nas relações entre os mesmos e o saber em jogo. Ajustes de acordo com os parâmetros sinalizadores e, dosado pelas dialéticas que estruturam o PEP-FP.

Nesta pesquisa, consideramos quatro dialéticas: dialética de perguntas e respostas, dialética de mídias e *milieux*, dialética do ostensivo e não-ostensivo e dialética PcD e Psd adaptada da tese de (CRUZ, 2022, p.64), pois foram as quatro dialéticas que evidenciamos na pilotagem do PEP-FP em uma experimentação de um projeto de extensão: "Difusão da História da Matemática para uma prática Inclusiva na Educação Básica" o qual tem como objetivo desenvolver planos de ensino com foco na História da Matemática para o ensino de matemática inclusiva para alunos cegos, de tal forma que os mesmos sejam discutidos por uma banca de professores de ambos os territórios, internos e externos à Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Banco.

Este projeto não é vinculado a uma disciplina em específico, mas como a primeira autora deste capítulo lecionou durante um semestre a disciplina de História da Matemática no curso de Licenciatura em Matemática da UTFPR, a mesma, contou com a participação dos alunos para uma ação do projeto e, experimentação do MD_SPDA.

A Figura 7 apresenta a Fase 1 do MD_SPAD, na forma de um PEP-FP a partir de um mapa de questões alicerçadas nos sete pilares da Educação Inclusiva, os quais promovem uma imersão dos sujeitos envolvidos no território da Educação Inclusiva, em que o parâmetro ♣ é um sinalizador responsável pelo refinamento das discussões e/ou ampliação do mapa de perguntas e respostas, o milieu nesta situação didática, de acordo com o esquema herbatiano: $S\ (X_{DM}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI},\ Q_{EI}^{DM})$ ➡ M) ➡R♥ (Figura 7).

Figura 7. Fase 1 – MD_SPDA

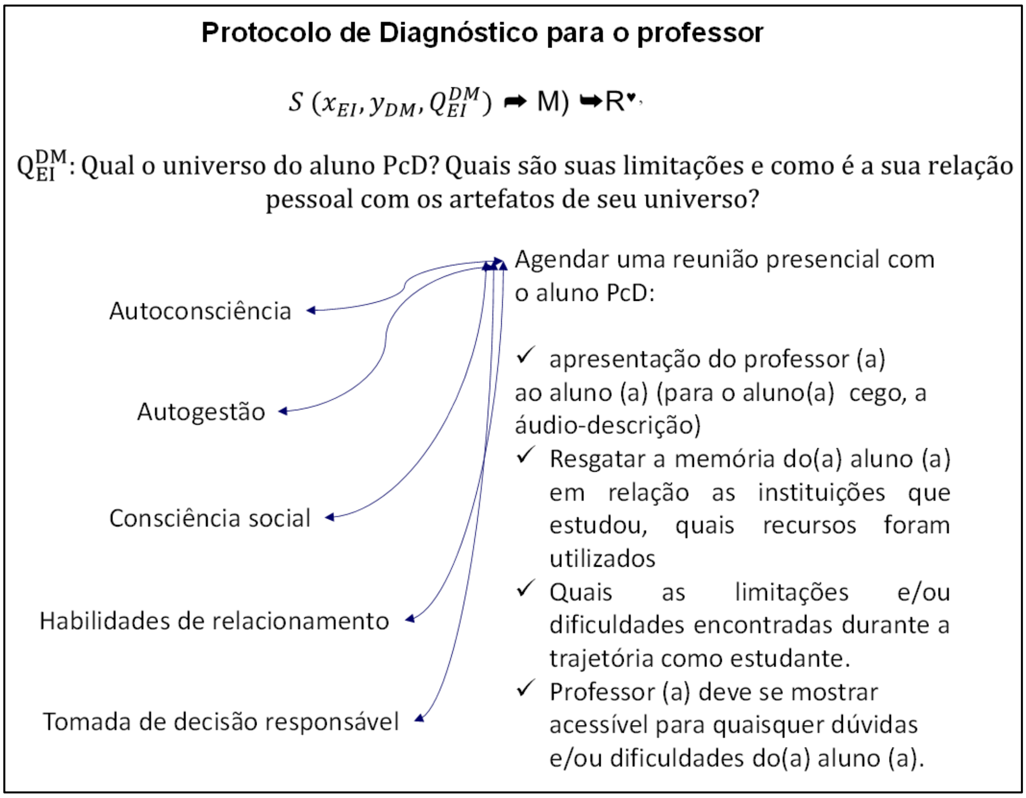


Fonte: Construção dos autores

A Figura 8 apresenta a fase 2 do MD_SPDA, um protocolo de diagnóstico com orientações para um estreitamento aluno-professor, pautado no que a BNCC traz a respeito de orientações sobre o desenvolvimento de habilidades não-cognitivas (socioemocionais[21]). Esta situação didática refere-se ao desenvolvimento do PEP -FP regido pelo sistema didático: $S\ (X_{DM}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI},\ Q_{EI}^{DM})$ ➡ M) ➥R♥, onde em um PEP-FP, o protocolo de diagnóstico será discutido. Para sua aplicação, o sistema didático envolverá o aluno PcD e o professor de matemática, ou seja, $S\ (x_{EI}, y_{DM},\ Q_{EI}^{DM})$ ➡ M) ➥R♥.

[21]http://basenacionalcomum.mec.gov.br/implementacao/praticas/caderno-de-praticas/aprofundamentos/195-competencias-socioemocionais-como-fator-de-protecao-a-saude-mental-e-ao-bullying

Figura 8. Fase 2 – MD_SPDA – Protocolo de diagnóstico



Fonte: Construção dos autores

A fase 3 do MD_SPAD refere-se a um PEP-FP acerca do objeto de conhecimento, com o objetivo de torná-lo um objeto de conhecimento acessível didaticamente. Este PEP é representado pelo esquema herbatiano $S\ (X_{DM}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI},\ Q_{EI}^{DM})$ ➡ M) ➥R♥, onde Q_{EI}^{DM} é: Quais ostensivos e não-ostensivos devem ser evidenciados em uma situação didática para promover a Educação Inclusiva na aula de matemática?

Inferimos que a implementação do MD_SPAD nas Instituições de Ensino, tanto em cursos de Licenciatura em Matemática, como em cursos de formação continuada, pode trazer contribuições a respeito da condição de existência de uma SPAD, ou seja, do estudo dos parâmetros sinalizadores (Ω, Δ, ♠ e ♣) para que habilidades sejam desenvolvidas para o planejamento de SPAD. Além disso, a implementação do MD_SPAD possibilita um maior estreitamento entre as relações interpessoais e o saber em jogo, $R(PMEB \leftrightarrow PREI, O)$; $R(PMES \leftrightarrow NAI, O)$, $R(ALM \leftrightarrow PREI/NAI, O)$, de tal forma que o objeto de conhecimento se torne acessível didaticamente.

3.3 Experimentação do MD_SPAD

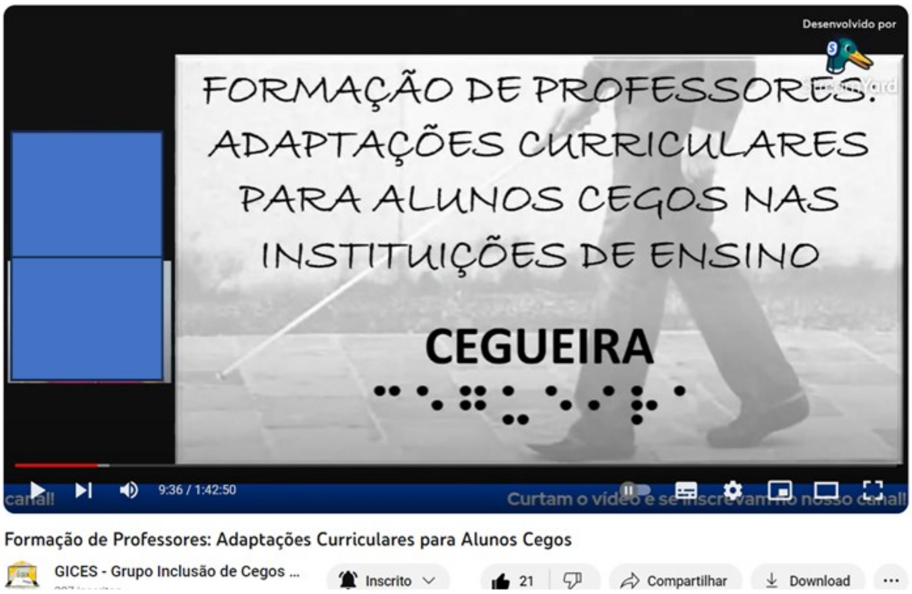
A experimentação do MD_SPAD foi realizada com uma turma de alunos do curso de Licenciatura em Matemática na UTFPR, campus Pato Branco, no tripé extensão, por meio do projeto: "Difusão da História da Matemática para uma prática Inclusiva na Educação Básica". O foco do projeto é o estreitamento da relação entre os professores de ambos os territórios e os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática para o desenvolvimento de um plano de aula na perspectiva da história da Matemática para a inclusão de alunos cegos.

A fase 1 do MD_SPAD se deu a partir de uma palestra ministrada por uma professora da Educação Inclusiva, especialista em cegueira, a qual foi realizada de forma online no canal do GICES (Grupo para Inclusão de Cegos no Ensino superior)[22], Figura 9.

Devido ao fato de termos um aluno cego (X_{EI}) participando como ouvintes da palestra, o PEP-FP foi estruturado de acordo com o seguinte esquema herbatiano: $S\ (X_{DM} \leftrightarrow X_{EI}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI},\ Q_{EI}^{DM}) \Rightarrow$ M) $\Rightarrow$R♥ , onde Q_{EI}^{DM} é: Como desenvolver habilidades para o planejamento de SPAD, em que o objeto de conhecimento o se torna O_{EI}^{DM} potencialmente acessível, a partir da articulação de artefatos do território da DM e da EI? $X_{DM} \leftrightarrow X_{EI}$ determina a interação entre o aluno cego (X_{EI}) e os sujeitos do território DM, X_{DM}, a partir de um sistema didático "ampliado", pois devido ao fato de este encontro ser uma palestra online, tivemos a participação de alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da professora coordenadora do projeto, primeira autora deste capítulo e, de professores e alunos de todas as regiões do Brasil, pois a palestra foi amplamente divulgada nos Núcleos de Acessibilidade e Inclusão das Universidades Federais do Brasil.

[22] https://youtu.be/wUPIUFvmSAs

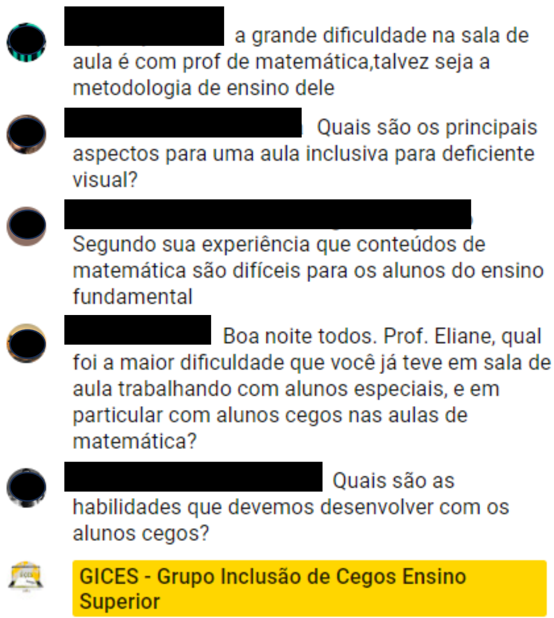
Figura 9. Fase 1 – MD_SPDA – GICES



Fonte: Dados da pesquisa

Nesta fase, durante a palestra, várias perguntas foram realizadas, que levam à reflexão ao mapa de questões desenvolvido a priori conforme consta na Figura 7. Listamos algumas delas na Figura 10.

Figura 10. Fase 1 – MD_SPDA - GICES


[redacted] a grande dificuldade na sala de aula é com prof de matemática,talvez seja a metodologia de ensino dele

[redacted] Quais são os principais aspectos para uma aula inclusiva para deficiente visual?

[redacted] Segundo sua experiência que conteúdos de matemática são difíceis para os alunos do ensino fundamental

[redacted] Boa noite todos. Prof. Eliane, qual foi a maior dificuldade que você já teve em sala de aula trabalhando com alunos especiais, e em particular com alunos cegos nas aulas de matemática?

[redacted] Quais são as habilidades que devemos desenvolver com os alunos cegos?

GICES - Grupo Inclusão de Cegos Ensino Superior

Fonte: Dados da pesquisa

Além da palestra, o canal do GICES foi um meio de imersão dos alunos no território da Educação Inclusiva, ele tem várias palestras ministradas por professores que têm experiência no ensino de alunos cegos e profissionais cegos nas áreas de ciências exatas, onde perguntas e respostas se fazem presentes.

Na fase 1, durante o desenvolvimento do PEP, analisou-se a junção das três dialéticas: dialéticas de perguntas e respostas, dialéticas de mídias e *milieux* e, dialéticas PcD e PsD. Perguntas e respostas foram possíveis por meio do canal do GICES no YouTube, que é uma mídia e *milieu* que dá possibilidades de interação entre pessoas PcD e PsD. Neste caso, a fase 1 promove um estreitamento das relações $R(PMEB \leftrightarrow PREI, U_i)$, $R(PMES \leftrightarrow NAI, U_i)$ e $R(ALM \leftrightarrow PREI/NAI, U_i)$, onde U_i é o universo dos artefatos da EI: Ui={$objetos\ ostensivos\ e\ não\ ostensivos\ da\ EI$)

Na Figura 10, uma das questões foi de um aluno cego (o primeiro comentário da Figura 10, no chat do YouTube), o qual expôs uma dificuldade com a metodologia do professor de matemática e, levanta uma outra questão: “talvez seja a metodologia de ensino dele”. Essa questão leva os professores presentes a refletirem sobre a sua prática e, este fato está inserido no mapa de questões da Figura 7:

Q_{EI}^{DM} 6:Você tem refletido sobre a inclusão em seus planejamentos de ensino?

Q_{EI}^{DM} 7:O que é necessário agregar à formação de professores e quais recursos são necessários?

O PEP-FP teve continuidade na fase 2, sob o sistema didático $S\ (X_{DM}, y_{DM\,,}\ Q_{EI}^{DM})$, e ocorreu de forma presencial, na aula de História da Matemática, com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática (X_{DM}) e a professora da área de Didática da Matemática ($y_{DM,}$), a qual tem uma formação em Braille, com o objetivo de responder às questões: Q_{EI}^{DM}: Qual o universo do aluno PcD? Quais são suas limitações e como é a sua relação Pessoal com os artefatos deste universo?

A resposta às estas perguntas foi possível a partir da discussão sobre o Protocolo de Diagnóstico da Figura 8 e, o contato com os recursos do território da Educação Inclusiva de alunos cegos, por meio de uma aula de iniciação ao Código Braille e, aos artefatos da Educação Inclusiva de alunos cegos: reglete e punção, e discussão sobre o desenvolvimento de materiais mais acessíveis para os alunos cegos, Figura 11.

Figura 11. Fase 2 – MD_SPDA – Artefatos da Educação Inclusiva para alunos cegos

Fonte: Dados da pesquisa

Na fase 2, as dialéticas perguntas e respostas, ostensivo e não-ostensivo se fizeram presentes durante o PEP-FP e, foram fundamentais para a apropriação dos alunos do curso de Licenciatura em Matemática em relação ao universo dos artefatos da Educação Inclusiva Matemática para alunos cegos, ~~através~~ por meio do código em Braille da Língua Portuguesa e, do código em Braille da Matemática. Mas também de discussões sobre gestos dos professores e, sobre mudanças que precisam ser realizadas em suas linguagens de tal forma que a acessibilidade didática (ASSUDE, 2014, p.4) seja instituída em uma aula de matemática.

As fases 1 e 2 contribuíram para a resposta da questão Q_{EI}^{DM}: Como desenvolver habilidades para o planejamento de SPAD, em que o objeto de conhecimento o se torna o_{EI}^{DM} potencialmente acessível, a partir da articulação de artefatos do território da DM e da EI?

Neste caso, pode-se dizer que o PEP-FP nos remete a $R^{\heartsuit}$, ou seja, de que o desenvolvimento de habilidades para o planejamento de uma SPAD depende de uma imersão em U_i e em U_{PcD} por meio do estreitamento das relações $(PMEB \leftrightarrow PREI, U_i)$, $R(PMES \leftrightarrow NAI, U_i)$, $R(ALM \leftrightarrow PREI/NAI, U_i)$ e R(PMEB↔PREI, U_{PcD}) ou R(PMES↔NAI, U_{PcD}) ou $(ALM \leftrightarrow PREI/NAI, U_{PcD})$. Pois, a partir do estreitamento destas relações, acredita-se que o professor de Matemática a nível da Educação Básica e a nível do Ensino Superior e, o aluno do curso de Licenciatura, em atividades de estágio ou Programas de Residência Pedagógica[23] em parceria com o professor da Educação Inclusiva, terão condições de desenvolver uma SPAD.

[23] https://www.gov.br/capes/pt-br/acesso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/programa-residencia-pedagogica

A fase 3, é realizada na forma de um PEP-FP a respeito do objeto matemático a ser estudado. Este PEP é representado pelo esquema herbatiano: $S\ (X_{DM}, y_{DM\leftrightarrow}\ y_{EI}, Q_{EI}^{DM})$ ➡ M) ➡R♥, em que Q_{EI}^{DM}: Quais ostensivos e não-ostensivos devem ser evidenciados em uma situação didática para promover a Educação Inclusiva na aula de matemática, tal que ocorra a institucionalização do saber em jogo?

O desenvolvimento deste PEP-FP, se deu a partir de um estudo de cada grupo de alunos (X_{DM}) sobre um assunto em matemática abordado na perspectiva da História da Matemática para a elaboração de SPAD. Estes alunos receberam orientação da professora da área de Didática da Matemática (primeira autora deste capítulo), mas que também faz parte do território da Educação Inclusiva ($y_{DM\leftrightarrow}\ y_{EI}$), pois tem formação em Braille. Apresentamos neste capítulo uma SPAD desenvolvida por um grupo de alunos, cujo tema foi o Teorema de Pítágoras.

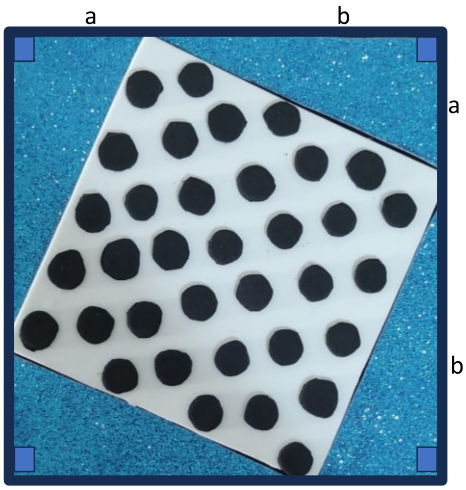
No primeiro momento, os alunos estudaram a respeito de Pitágoras e sobre o Teorema de Pitágoras. Para isso, consultaram obras, como livros de História da Matemática. As dúvidas e questões que surgiram no decorrer do PEP-FP foram respondidas a partir de consulta às obras e discussões com a professora ($y_{DM\leftrightarrow}\ y_{EI}$). Como resultado desta investigação, decidiu-se estudar a demonstração chinesa do Teorema de Pitágoras, segundo Swetz (1977).

A partir dos resultados da fase 1 e 2, os alunos deram continuidade à sua investigação no sentido de encontrar respostas para a questão: Como desenvolver uma SPAD para a demonstração chinesa do Teorema de Pitágoras, supondo a presença de um aluno cego em sala de aula? A resposta à esta questão é determinada pelo parâmetro Ω, o qual é um sinalizador do nível de conhecimento de X_{DM} sobre a demonstração chinesa do Teorema de Pitágoras. Após discussões, concluiu-se que quanto maior Ω, menor será a possibilidade da demonstração se tornar apenas um algoritmo e, maior será a possibilidade de a SPAD ser constituída de significado, e onde ocorra a institucionalização do saber em jogo.

Após o estudo da demonstração e, a apropriação de U_i e U_{PcD} e as interações entre $y_{DM\leftrightarrow}\ y_{EI}$ nas fases 1 e 2, os alunos confeccionaram o material didático para a demonstração chinesa do Teorema de Pitágoras.

A segunda questão que surgiu é: Como implementar a SPAD? Após a discussão concluiu-se que para que sejam contempladas as habilidades cognitivas e não cognitivas, e para que haja interação entre os alunos PsD e PcD, acredita-se que uma SPAD deve ser trabalhada em grupo. Logo, o material concreto desenvolvido (Figura 12), deveria ser confeccionado pelo professor, ou deveria fazer parte de um Laboratório de Matemática, de tal forma que pudesse ser distribuído um material para cada grupo de alunos, para uma análise em grupo dos alunos.

Figura 12. Fase 3 – MD_SPDA – Material concreto -Teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa

O material concreto (Figura 12) foi desenvolvido com EVA, em um total de 4 triângulos retângulos com catetos de medidas a, b e hipotenusa c, confeccionados com EVA GLITTER azul e um quadrado branco de lado c, confeccionado com EVA e, em que são colados círculos pretos, de tal forma que os alunos cegos possam diferenciá-lo por meio do tato.

Discutimos a importância de desenvolver nos alunos a habilidade de observação da Figura 12, considerando que o conceito de área de triângulo e quadrado já tenha sido trabalhados em sala de aula, ou seja, para esta situação, este conceito seria um pré-requisito.

Discutimos a importância do(a) (a) professor (a) comentar com os alunos sobre as medidas dos lados dos triângulos. Assim, os alunos Psd visualizarão as medidas dadas pelo professor (a), catetos a, b e hipotenusa c e os alunos PcD (no caso desta pesquisa, alunos cegos), por meio do tato poderão perceber as medidas dadas pelo professor (a) e, também é muito importante a interação em grupo para que haja uma cooperação entre eles para perceber as medidas, ou para se apropriar das mesmas.

Desta forma, concluímos que todos terão a possibilidade de perceber que a figura 12 representa um quadrado de lados a + b.

Dúvidas surgem de como implementar esta situação didática de tal forma que a mesma seja uma SPAD e, após discussões, entendeu-se que neste momento da situação, faz-se necessário realizar perguntar aos alunos sobre a área de um quadrado e, pedir para os mesmos escreverem esta informação a partir da observação de que a Figura 12 é um quadrado de lado a+b.

Então os alunos PsD escreverão em seus cadernos e, o aluno PcD (aluno cego) escreveria em código Braille, ou até mesmo em notebook, caso esta tecnologia seja acessível para ele. E isto será detectado na fase 2 a partir do Protocolo de Diagnóstico, Figura 8, no caso do momento M_{04} do PEP-FP, o qual não é contemplado nesta pesquisa.

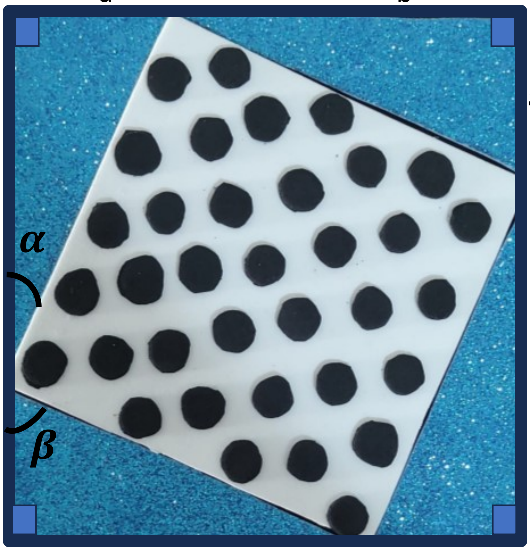
As fases 1 e 2, o conhecimento de U_i possibilitaram discussões acerca dos artefatos e, assim, vislumbrou-se a possibilidade de desenvolver tarefas a partir da observação da Figura 13, como por exemplo, a determinação da área do quadrado a partir do cálculo de área das figuras que o compõem. É claro que temos 4 triângulos retângulos, os quais foram dados, mas ao compor o quadrado de lado (a+b), resta uma área, a área representada pela figura com círculos pretos colados na superfície.

Neste momento, surgiram dúvidas de como trabalhar a questão: A figura colada com círculos pretos em sua superfície (para a acessibilidade dos alunos cegos) é um quadrado?

Dessa forma, vimos a importância do material concreto. Este é o momento de análise na perspectiva de ângulos internos em um triângulo retângulo, onde o aluno cego pode perceber a partir do tato, analisando apenas um triângulo retângulo separadamente. Conclui-se que para que a situação seja uma SPAD, este deve ser um momento de cooperação entre os colegas e a discussão em grupo, para que os alunos desenvolvam as habilidades cognitivas e não-cognitivas (socioemocionais) contempladas no modelo MD_SPAD.

Nesta situação, após discussões, conclui-se que este é um momento desafiador para que a situação seja uma SPAD, mas, concluiu-se que a partir do material concreto seja possível a discussão sobre a soma dos ângulos internos em um triângulo retângulo e, assim cheguem à conclusão de que a soma de $\alpha + \beta = 90°$, Figura 13.

Figura 13. Fase 3 – MD_SPDA – Material concreto -Teorema de Pitágoras



Fonte: Dados da pesquisa

A partir deste fato, acredita-se que será acessível a demonstração de que o ângulo da figura com círculos pretos colados na superfície é um quadrado. Pois, os lados são iguais, o qual é a hipotenusa dos triângulos retângulos, ou seja, c e, os quatro ângulos são de 90°.

As discussões a respeito desta demonstração na perspectiva da Educação Inclusiva mostraram a possibilidade de se trabalhar em grupo, alunos PcD e PsD, os quais serão capazes de escrever (alunos PsD e alunos PcD), cada um com os artefatos de seu território U_i, a medida da área do quadrado de lado a + b a partir da decomposição das áreas que o compõem. Ou seja:

$(a+b)^2 = 4\left(\frac{ab}{2}\right) + c^2$ e, assim chegarão à prova chinesa do Teorema de Pitágoras.

A finalização do PEP-FP se deu a partir de outro sistema didático auxiliar $S\ (X_{DM}, y_{DM \leftrightarrow}\, y_{EI}, Q_{EI}^{DM})$ onde y_{DM}representa uma professora de matemática da rede de ensino público da cidade de Pato Branco (PR), um professor de matemática da área de matemática aplicada da UTFPR, campus Pato Branco (PR), a professora da área de Didática da Matemática, primeira autora deste capítulo e, y_{EI} uma professora da Educação Inclusiva, especialista em cegueira, os quais fizeram parte de uma banca para avaliação da situação didática no sentido de trazer contribuições para que a mesma seja instituída uma SPAD.

Neste trabalho em específico, a situação foi validada pelos professores da banca, apenas com uma observação da professora da Educação Inclusiva, a respeito da necessidade de uma legenda em Braille no material concreto. Por exemplo, nomear em código Braille, os nomes dos lados dos triângulos, pois assim, se tornaria mais acessível para os alunos cegos.

Este é um ponto que foi discutido fortemente, devido a mudança no código em Braille ao mudar a disposição das figuras. Este foi um obstáculo que não permitiu que os alunos escrevessem o código em Braille, mas a discussão com a professora da EI, esclareceu a importância da escrita em Braille e, que deveria trabalhar separadamente a nomeação dos triângulos retângulos, de tal modo que ao inverter a posição desses triângulos, os alunos cegos já teriam se apropriado sobre os nomes dados aos catetos e à hipotenusa.

Pode-se dizer que a questão de investigação: Como devem se dar as relações professor, aluno, saber diante da perspectiva da Educação Matemática Inclusiva para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (SPAD)? foi respondida a partir da proposta e experimentação do MD_SPAD, a qual foi validada pela banca como uma SPAD.

Considerações Finais

O Modelo Didático de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (MD_SPAD) é resultado de uma nova configuração do Continente Didático em que a Educação Inclusiva se faz presente.

A construção do MD_SPAD traz contribuições de pesquisas na área de Educação Matemática Inclusiva, as quais proporcionaram o desenvolvimento de alguns construtos teóricos tais como o Triângulo Didático para Acessibilidade (TDA), os parâmetros Ω, Δ, $\spadesuit$ e $\clubsuit$, os quais são elementos fundamentais para análises de situações didáticas e dos fenômenos de ensino em processos de Transposição Didática Interna (TDI).

O MD_SPAD apresenta a visão de que os territórios da Didática da Matemática (DM) e da Educação Inclusiva (EI) devem se intercomunicar, a partir de um estreitamento das relações de seus sujeitos para que possam ser desenvolvidas Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (SPAD).

Dessa forma, assevera-se que as questões evidenciadas neste capítulo tenham sido respondidas no decorrer da construção do MD_SPAD, tais como: Como devem se dar as relações professor, aluno, saber diante da perspectiva da Educação Matemática Inclusiva para o desenvolvimento de Situações Potencialmente Acessíveis Didaticamente (SPAD)?

A TAD é o fundamento do MD_SPAD, suas noções principais configuram o pano de fundo de praxeologias mistas de forma a promover a intercomunicação dos sujeitos de ambos os territórios.

No MD_SPDA, o planejamento de SPAD devem ser discutidas em um Percurso de Estudos e Pesquisa para Formação de Professores (PEP-FP a partir de um sistema didático articulado para a acessibilidade: $S\ (X_{DM} \leftrightarrow X_{EI}, y_{DM} \leftrightarrow y_{EI}, Q_{EI}^{DM})$.

O desenvolvimento de uma SPAD envolve construtos teóricos da Teoria das Situações Didáticas (TSD), Brousseau (1986), como por exemplo o Triângulo Didático, cujo conceito possibilitou a construção do TDA, imprescindível no contexto das relações entre os sujeitos na posição de professor, os alunos e o saber. Além disso, uma SPAD é uma situação fundamental, pois é constituída de um conjunto de situações adidáticas e, que envolvem as dialéticas de ação, formulação, validação e institucionalização. Onde em nossa pesquisa, a institucionalização se deu na situação de apresentação da situação didática discutida em sala de aula à uma banca de professores especialistas de ambos os territórios. Neste momento a situação foi validada como SPAD e, pode-se dizer que o conceito de uma SPAD foi instituído entre os alunos.

Dessa forma, o MD_SPAD é um modelo que ainda está em processo para a sua validação, no sentido de estar na fase de realização de outras experimentações, para análise em outras especificidades da Educação Inclusiva. Mas, espera-se que a proposta do MD_SPDA seja um fator de discussões pela academia científica no sentido de trazer elementos que talvez não tenham sido contemplados nesta pesquisa.

Referências

ALMOULOUD, S. A.; NUNES, J. M. V.; PEREIRA, J. C.S.; FIGUEROA, T. P. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. *REVASF*, Petrolina-Pernambuco -Brasil, vol. 11, n.24, p.427-467

ASSUDE, T., PEREZ, J. M., SUAU, G.; TAMBONE, J., VÉRILLON, A. Accessibilité didactique et dynamique topogénétique: une étude de cas. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 2014, 34 (1), pp.33-57.

BARALDI, I.M. et al. School Inclusion: Considerations About the Education Process of Teachers Who Teach Mathematics. © Springer Nature Switzerland AG 2019 25 D. Kollosche et al. (eds.), *Inclusive Mathematics Education*, https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0_4

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y. Ostensifs et sensibilité aux ostensifs dans l'activité mathématique. In: *Recherches em Didactique des Mathématiques*, 1999

BROUSSEAU, G. L'observation des activités didactiques. *Revue Français de Pedagogie*, v.45, p.130-139, 1978.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodoes de la didactique des mathématiques. *Recherches em Didactiques des Mathematiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage-Éditions, v.7.2, p. 33-115, 1986.

CASTELA, C.; VÁSQUEZ, R., Avenilde. Des Mathematiques a L´automatique: etude des effets de transposition sur la transformee de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol 31/1, nº 91, pp. 79-130. Grenoble, France: La Pensée Sauvage, 2011.

CASTELA, Corine. Cuando las praxeologías viajan de una institución a otra: una aproximación epistemológica del "boundarycrossing". *Educación Matemática*, vol. 28, núm. 2, agosto, 2016

CHEVALLARD, Y. Organiser l'etude. 3. Ecólogie & regulation. *Actes de la 11 École d' Été de Didactique dês Mathématiques*. France: La Penseé Sauvage. 2002.

CHEVALLARD, Y. Steps towards a new epistemology in mathematics education. Conférence plénière d'ouverture du 4e congrès de la *European Society for Research in Mathematics Education* (CERME 4), Sant Feliu de Guíxols, 17-21 février 2005.

CHEVALLARD, Yves. Passé et présent de la Théorie Anthropologique de Didactique. En A. Estepa, L. Ruiz, F. J. García (Eds.), *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) (pp. 705-746). Jaén: Publicaciones de la Universidad de Jaén, 2007.

CHEVALLARD, Yves. *La notion de PER*: problèmes et avancées. Texto de uma apresentação apresentada à IUFM de Toulouse, 2009a. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161

CHEVALLARD, Yves. *La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD*. 15e école d'été de didactique des mathématiques, p. 16-23, 2009b.

CHEVALLARD, Y. Teaching Mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counter paradigm". In: *Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*. Springer International Publishing, pp. 173–187, 2015. Disponível em: https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-319-12688-3_13. Acesso em: 07/10/2023.

CHEVALLARD, Y. On using the ATD: Some clarifications and comments. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 1–7, 2019. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/42536. Acesso: 07/10/2023

CRUZ, A.0.C.S. *Acessibilidade didática: praxeologias matemáticas sobre sequências para surdos(as) e ouvintes*. 2022. 233f. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências, da Universidade Federal da Bahia, 2022.

DUPRÉ, F. Articulations entre deux systèmes didactiques : une étude de cas autour de l'objet fraction. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 2022, 42 (1), pp.103-148.

FAURE, K.M.; GOMBERT, A. Analyse d'une situation en Mathematiques pour une eleve dyscalculique. Methodologie pour la conception D'adaptations pedagogiques et didactiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 41, n°2 pp. 143-176, 2021*

GIROUX, J. Conduites atypiques d'élèves du primaire en difficulté d'apprentissage. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 28, n° 1, pp. 9-62, 2008.

HOULE, V.; GIROUX, J. Conception et pilotage de situations à dimension adidactique

en contexte orthopédagogique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol.36, n°3 pp. 275-306.

KOLLOSCHE, D. *et al.* Inclusive Mathematics Education: State-of-the-Art Research from Brazil and Germany. Springer, 2019.

LOREMAN, T. Seven pillars of support for inclusive education: *Moving from "Why?" to "How?".* International journal of whole schooling. Vol.3, n°. 2, 2007

MARGOLINAS, C. Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques ? *Revue française de pédagogie*, 2014, 13-22. In: https://journals.openedition.org/rfp/4530

REYDI, C. Apprendre à poser les soustractions? Quand l'enseignement spécialisé questione les pratiques ordinaires sur les operations. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* Vol. 33, n°2 pp. 183-218, 2013.

ROINE, C. Analyse anthropo didactique de l'aide mathématique aux « élèves en difficulté » : l'effet Pharmakéia. *Carrefours de l'éducation, 33*(1), 2012, 131-147.

SWETZ, F.J. *Was Pythagoras Chinese? An Examination of Right Triangle Theory in Ancient China*. Penn State University Press, 1977.

4- Um cenário da Matemática Financeira escolar sob a Modelagem Matemática Reversa

Gleison De Jesus Marinho Sodré
Renato Borges Guerra

Introdução

A modelagem matemática, daqui em diante MM, tem aparecido cada vez mais no centro de pesquisas da educação matemática em diferentes perspectivas e, em geral, como propósito metodológico de ensino para aprendizagem da matemática (BARQUERO; JESSEN, 2020), considerando que "é importante para a vida dos alunos, pois permite que eles resolvam problemas do mundo real com a ajuda da matemática" (BLUM *et al.*, 2007[24] apud HARTMANN; KRAWITZ; SCHUKAJLOW, 2021, p. 919, tradução nossa).

As dificuldades de ensino e aprendizagem da MM podem ser destacadas pela constância em buscar responder, mesmo que parcialmente, uma das questões tomadas como de maior interesse, que tem sido frequentemente discutida nas Conferências Internacionais sobre o Ensino de Modelagem Matemática e Aplicações (ICTMA), que consiste em: "como podemos ensinar modelagem?[25] (BLUM, 2011, apud SCHUKAJLOW; KAISER; STILLMAN, 2018, p. 11, tradução nossa).

Essa questão, por sua vez, não parece ser somente objeto de interesse da linha cognitivista, mas também da linha epistemológica, como assim declaram Florensa, García e Sala (2020, p. 22, tradução nossa):

> Um ponto de partida bastante comum nas linhas de pesquisa é o que Gascón (2011) chama de problema docente da modelagem matemática. Segundo García, Gascón, Ruíz-Higueras e Bosch (2006), uma das formulações mais frequentes do problema é: como ensinar modelagem matemática?

[24] Fragmento do texto: Mathematical modelling is important for students' lives, as it enables them to solve problems in the real world with the help of mathematics (Blum *et al.* 2007).
[25] Fragmento do texto: *How can we teach modelling?*

Não é por acaso que essa questão tem exigido hercúlea atenção da comunidade de pesquisadores da educação matemática, inclusive com a realização de eventos e publicações dedicadas ao ensino e aprendizagem da MM, como ICTMA. Muitos trabalhos dessa comunidade se concentram no programa cognitivista de pesquisa em MM, por exemplo, os de Cevikbas, Kaiser e Schukajlow (2021), Ledezma, Font e Sala (2021), Fukushima (2021) e Cevikbas, Greefrath e Siller (2023), entre outros, e destacam diferentes aspectos, tais como os pedagógicos, que demandam atender a necessidade de desenvolvimento de competências em MM, tendo em conta que outras demandas pedagógicas poderiam ser atendidas frente à resolução de problemas do mundo real, como se propõe a MM, pois, assim seria possível demandar "um dos principais objetivos da educação matemática em todo o mundo, que é a inclusão da promoção da cidadania responsável"[26] (CEVIKBAS; GREEFRATH; SILLER, 2023, p. 2, tradução nossa).

Na perspectiva epistemológica, encontram-se os trabalhos realizados à luz da teoria antropológica do didático (TAD), que considera a MM, em si, como uma atividade humana que pode ser aprendida pelo ensino no seio das instituições que modelam problemas do mundo real e, entre elas, a escola, onde "grande parte da atividade matemática pode ser identificada com uma atividade de modelagem matemática" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 51), sem que isso signifique que a MM seja apenas mais um aspecto da atividade matemática, mas que seja também como um objeto matemático de ensino que, como tal, antes é uma noção que precisa ser questionada. Assim, de acordo com Strømskag e Chevallard (2022), deve ser problematizada, considerando que nas pesquisas, em geral, isso não é encaminhado. Mais especificamente:

> A noção de 'modelagem' não é considerada como uma noção problemática na pesquisa realizada em educação matemática (como não é problemática em biologia ou engenharia, onde também é usada). O que é problemático é o ensino e aprendizagem de modelagem ou o uso de modelagem para o ensino e aprendizagem de matemática[27] (GARCIA *et al*., 2006, p. 232, tradução nossa).

De outro modo, no âmbito teórico da TAD, a MM, para ser ensinada ou usada no e para o ensino de matemática, precisa ser problematizada enquanto uma noção que deve

---

[26] Fragmento do texto: to solve real-world problems using mathematics is in demand as one major goal of mathematics education worldwide is the inclusion of the promotion of responsible citizenship.

[27] Fragmento do texto: the notion of "modelling" is not considered as a problematic notion in the research carried out in mathematics education (as it is not problematic in biology or engineering, where it is also used). What is problematic is the teaching and learning of modelling or the use of modelling for the teaching and learning of mathematics.

passar por processos adaptativos à escola por meio de transposições didáticas, por exemplo, que a torne um objeto matemático para ser ensinado e aprendido nessa instituição, tendo em conta as condições que agem sobre o ensino e a aprendizagem da disciplina matemática, impostas pela pedagogia, pela sociedade e pela cultura em que essa escola se insere.

Isso exige que saberes sobre o campo extramatemático, dito também de contexto real, que referem os problemas do mundo real a serem modelados sejam tomados em unidade com os saberes matemáticos escolares, sem ignorar a presença de conhecimentos práticos, sejam eles das atividades matemática ou não matemáticas, como necessários, embora nem sempre suficientes para a abstração desse contexto real (CHEVALLARD, 2013).

Essa compreensão disponibilizada pela TAD, sem dúvida, corrobora para atender a necessidade pedagógica de, objetivamente, considerar a cidadania responsável como um saber, no caso, extramatemático, como um condicionante no e para o uso da matemática na MM. Essa compreensão é corroborada frente ao processo de modelagem que modela não o contexto real, mas uma situação idealizada abstraída, incluindo e/ou excluindo diferentes aspectos condicionantes que agem sobre e/ou sob esse contexto real.

A noção de situação pode emergir quando questionamos o (que é o) contexto real e nos damos conta que não temos uma resposta simples de se estabelecer, já que envolve a própria noção de realidade frente ao uso de modelos matemáticos. Nesse sentido, Revuz (1971, p. 49, tradução nossa) destaca:

> É difícil dar uma boa definição do que é 'vida real' ou 'realidade', mas não há nenhum problema sobre a existência de um mundo no qual vivemos, agimos, lutamos e que tentamos entender, mas que permanece sempre mais rico do que toda a nossa ciência, e que jamais será completamente transparente nem para os nossos olhos nem para a nossa mente[28].

Como se pode depreender de Revuz (1971), embora existam aspectos de uma realidade que possam ser compartilhados, ela sempre nos é suficientemente opaca para que possamos alcançar todos os aspectos que a envolve e, portanto, o que chamamos de vida real é apenas uma abstração dessa realidade, que nomeamos de situação sobre ou do contexto real. Parece que Pollak (2011) concorda com Revuz (1971) sobre o modelo

[28] Fragmento do texto: It is difficult to give a good definition of what "real life" or "reality" is, but there is no problem about the existence of a world in which we live, act and struggle, which we try to understand, but which remains ever richer than our whole science, and which will never be completely transparent neither for our eyes nor for our mind.

matemático referir uma situação construída a partir de uma abstração quando assim se expressa:

> A situação real geralmente tem vários “ângulos” que você não consegue levar tudo em consideração, então você decide quais aspectos são mais importantes e os mantém. Neste ponto, você tem uma versão idealizada da situação do mundo real que você traduz em termos matemáticos[29]. (POLLAK, 2011, p. 64, tradução nossa).

Se admitirmos que o termo “situação real” usado por Pollak (2011) refere ao termo “mundo real” usado por Revuz (1971), podemos pensar que ambos encaminham a mesma compreensão. No entanto, é preciso notar que, para considerar ou não algum ângulo de uma realidade, é preciso, antes, conhecê-lo, e isso não é o que afirma Revuz (1971). Este destaca que uma realidade é suficientemente opaca para que possamos ver com os nossos olhos e a mente todos os ângulos dessa realidade, pois a situação, enquanto primeiro processo de abstração de uma realidade, é sempre questionável, enquanto para Pollak (2011) ela é um recorte de uma realidade inquestionável.

A compreensão de situação que cabe sob o olhar da TAD é a de que toda realidade nunca é completamente alcançada se considerarmos que existem objetos pertencentes a diferentes atividades que nos são culturalmente familiares, em geral, e que adquirem invariavelmente a propriedade da invisibilidade aos olhos e mentes sob essa cultura, por se tornarem objetos *pré-construídos* dessa cultura. Isso está nos fundamentos da TAD proposta por Chevallard (2005) e também de outras noções socioantropológicas, como as noções de *habitus*, capital e campo discutidas por Bourdieu (2005).

Sob essas bases teóricas, uma dada situação é uma abstração de um contexto de uma dada realidade que somente é percebida por aqueles que a reconhecem naquele contexto, uma vez que o que se faz e o porquê do que se faz depende da situação contextualizada. Assim, tudo depende a partir da compreensão dessa situação estar somente disponível para todos aqueles que de algum modo vivem ou viveram na instituição ou campo que abriga esse contexto de realidade.

O termo campo é tomado aqui como uma instituição, no sentido de que abriga e institui práticas regradas, em geral, em regras não escritas, mas que legalizam e legitimam essas práticas em seu interior, inclusive as imaginadas, com ou sem mobilizações objetivas de conhecimentos, sejam eles acadêmicos, escolares ou práticos, estes no

[29] Fragmento do texto: The real situation usually has so many “angles” to it that you can’t take everything into account, so you decide which aspects are most important and you keep those. At this point, you have an idealized version of the real-world situation which you translate into mathematical terms.

sentido das práticas incorporadas pelos agentes por ver e fazer o que viu fazerem no interior dessa instituição.

Nesse ambiente teórico, o que se modela matematicamente sobre um contexto de realidade é uma situação que, como tal, pode ser sempre questionada a partir de outras diferentes abstrações desse contexto e que podem ser alcançadas de modo planejado, com saberes acadêmicos e ou escolares, ou de modo não planejado, a partir da cultura do uso das práticas em situação, particularmente, as rotineiras, nas quais se afirmam que 'esse é o jeito certo de fazer porque aqui é assim que se faz. Isto é, "agir desta forma não necessita de justificativa, pois é uma boa forma de agir"[30] (CHEVALLARD, 1999, p. 224, tradução nossa).

O modo não planejado de situações está presente nas atividades humanas cotidianas, de forma que o que se faz acontece segundo a percepção social do contexto de realidade que antes fora culturalmente instituído. Nesses casos, a situação é dada ou percebida segundo uma racionalidade própria que remete, sem planejamentos, o que simplesmente se faz. Por exemplo, no ensino de matemática nas escolas básicas, os alunos e professores incorporam modos de fazer e de pensar a partir do uso repetitivo de métodos e algoritmos inquestionáveis para situações inquestionáveis que, em geral, são dadas a priori.

No modo planejado de situações, por exemplo, encontra-se os modelos matemáticos, frequentemente presentes na literatura especializada de diferentes áreas de conhecimentos científicos e tecnológicos. Em todos eles, as situações são idealizadas no campo de saberes específicos que não são propriamente o campo da matemática.
Nesses tipos de modelos, podemos observar com um olhar mais atento que dois modelos matemáticos sobre duas distintas situações, mesmo que dotados com o mesmo tipo de tarefas e de expressões algébricas, jamais são iguais, pois são governados por situações idealizadas sobre contextos de realidade diferentes, ainda que se encontrem em uma mesma instituição.

Em todo caso, é preciso destacar que as situações planejadas acontecem em dialética com modelos matemáticos, de modo sempre a permitir que essas situações governem os usos dos modelos matemáticos e, não menos importante, que eles gerem situações do mesmo tipo das situações idealizadas. Essa dialética os transforma em uma

[30] Fragmento do texto: actuar de esta manera no exige justificación, porque es la buena manera de actuar.

poderosa ferramenta para estudo de situações sobre um dado contexto real considerado (CHEVALLARD, 1992).

Além disso, é preciso destacar que, à luz da TAD, a situação é abstraída por uma pessoa sob e sobre condicionantes de saberes que constituem o universo cognitivo dela. O termo universo cognitivo, pessoal, no âmbito da TAD, significa que todas as relações da pessoa, sempre interpretadas como sujeitos de diferentes instituições, com os objetos reais ou imaginados, teóricos ou práticos, podem ser vistas como participantes de um dado contexto real ou não. Isso pode incluir as intenções frente aos interesses e emoções em jogo que envolvem o contexto real a ser modelado, como assim sintetiza Guerra e Silva (2009):

> Para pensar o processo de modelagem de uma situação real é preciso observar que a construção de um modelo matemático de uma situação real, como todo construto humano e social, é um produto de experiências dos sujeitos e como tal envolve intenções, interesse, saberes, crenças e emoções que não se mostrarão visíveis em um modelo matemático de uma situação real (GUERRA; SILVA, 2009, p. 104-105).

As intenções, interesses, emoções e outros diferentes conhecimentos práticos não se mostrarão visíveis nos modelos matemáticos, mas condicionam o uso dos saberes matemáticos na construção e uso desse modelo. Então, pensar que uma situação é idealizada em conformidade com um dado contexto real, por uma pessoa ou instituição, carregando saberes que não são visíveis no modelo matemático, remete-nos ao fato de que somente as pessoas que percebem essa situação, com suas invisibilidades, reagem a ela segundo as regras, escritas ou não, que são aceitas nas instituições que abrigam, de algum modo, esse contexto real. Assim, os saberes, intenções e interesses que conformam a idealização de uma situação podem ser invisíveis para aqueles que são estranhos às instituições que idealizaram a situação, e, com isso, podem ser invisíveis nos modelos matemáticos construídos para esse contexto real.

É importante notar que a noção de estranheza relativa a um dado saber ou objeto aqui adotado significa o não conhecimento desse saber ou objeto, o que inclui as práticas com esse objeto, do modo, não necessariamente de todos, que se esse saber ou objeto se apresenta no contexto real.

Nesse sentido, a estranheza da pessoa relativa a um dado saber ou objeto pertencente a uma situação relativa a um dado contexto de realidade é revelada quando esse saber ou objeto é apresentado ou referenciado como parte da situação sobre esse contexto de realidade, pois somente somos capazes de reconhecer o que conhecemos.

Parafraseando Wittgenstein (1976), o conhecimento é em última instancia baseado no reconhecimento.

Não raro, por exemplo, observamos dificuldades dos alunos no enfrentamento de tarefas de matemática financeira que decorrem do não conhecimento do uso de regime de juros: simples ou composto. Essa dificuldade, em geral, decorre da invisibilidade das situações frente ao contexto real que exige esse ou aquele regime. Frente ao desconhecimento dos alunos sobre contextos reais com a matemática financeira escolar, a tarefa de abstrair se a situação refere juros simples ou juro compostos é muito complexa, senão impossível de ser realizada pela total invisibilidade desses objetos para os alunos quando colocados frente aos contextos de realidade da matemática financeira.
Nessa linha de pensamento, destacamos que, em geral, não se pode afirmar que os tipos de dificuldades dos alunos sobre o uso do regime de juros em problemas da matemática escolar decorrem da incapacidade de “interpretar textos em língua portuguesa”, uma vez que pode decorrer de estranhezas frente ao contexto de realidade, frequentemente hipotética, em textos de problemas das tarefas da escola.

A invisibilidade é duplamente provocada, primeiro pelo texto descrever um contexto de realidade financeira e, como tal, é uma situação idealizada, deixando invisíveis aspectos do contexto real que culturalmente são assumidos como conhecidos pela escola; e, segundo, pelo desconhecimento de contextos reais sobre problemas que envolvem o uso da matemática financeira escolar. De modo mais geral, Guerra e Silva (2009), com ajuda de Grandsard (2005), assim alertara sobre a dificuldade de pessoas quando do uso matemática em contextos que lhes são ou parecem estranho:

> Grandsard observa que embora os estudantes sejam excelentes em memorizar fatos, fórmulas e provas, não respondem bem em aplicações da matemática, ou mesmo em reconhecê-la, em contextos incomuns para eles e, então, levanta questões sobre a eficiência do ensino da matemática para alertar que tais dificuldades dos estudantes são também dos professores já que “alguns dos nossos futuros professores mestre em matemática não puderam traduzir ao nível do liceu. Como será possível que ensinem modelagem para seus alunos?” (GRANDSARD, 2005, p. 7).

Isso corrobora com a nossa compreensão de situação de contextos reais, mesmo que hipotéticos, não refletirem, como espelhos, esses contextos. Esses apresentam pontos cegos que não permitem que alunos ou professores “vejam” os ângulos desse contexto que são necessários para abstrair uma situação idealizada conveniente para o uso da MM, ainda que tenham conhecimentos objetivos do que desejam daquele contexto.

Torna-se, então, imperioso considerar o desconhecimento do contexto real que trata um problema a ser modelado como elemento de dificuldades, senão de bloqueios, para o ensino e aprendizagem da MM, considerando que desse contexto emergem as situações idealizadas para serem modeladas matematicamente.

Entre diferentes questionamentos frente a essa compreensão, um desponta como demasiado importante, considerando suas implicações sobre o não ensino da MM nas escolas básicas: os professores reconhecem o desconhecimento do contexto real que trata o problema a ser modelado como uma dificuldade, senão bloqueio, para o ensino e aprendizagem da MM?

4.1 A Modelagem Matemática com saber a ser ensinado: o CIMM e a MMR

Como destacamos, na perspectiva da TAD postula-se que "grande parte da atividade matemática pode ser identificada com uma atividade de modelagem matemática" (CHEVALLARD; BOSCH; GASCÓN, 2001, p. 51), o que não significa que a MM seja tomada como um aspecto ou dimensão da atividade matemática, mas que a situa como uma atividade de MM em si mesma.

> Em primeiro lugar, essa afirmação é significativa se a ideia de modelagem não se limita apenas à 'matematização' de questões não-matemáticas, isto é, a modelagem intra-matemática é considerada como um aspecto essencial e inseparável da matemática[31] (GARCIA *et al*., 2006, p. 232, tradução nossa).

Esse olhar seguido pela TAD, além de evidenciar as diferentes atividades da prática de MM, problematiza o ensino e aprendizagem de um dado saber, que pode ser aqui interpretado pela noção de MM em um meio institucional, tendo em consideração as "análises de transposição didática, a unidade empírica é ampliada para abranger dados de fora da sala de aula"[32] (STRØMSKAG; CHEVALLARD, 2022, p. 1, tradução nossa), não se limitando apenas no modo de fazer e de pensar sobre alunos ou professores, pois, de acordo com Strømskag e Chevallard (2022), a MM ensinada torna-se um objeto de estudo.

Garcia *et al*. (2006, p. 232, grifos dos autores, tradução nossa), seguindo a abordagem da TAD, problematizam que "os 'padrões' construídos dos *processos de*

---

[31] Fragmento do texto: First, this statement is meaningful if the idea of modelling is not limited only to "mathematization" of non-mathematical issues, that is, when the intra-mathematical modelling is considered as an essential and inseparable aspect of mathematics.

[32] Fragmento do texto: didactic transposition analyses, the empirical unit is enlarged to encompass data from outside of the classroom.

modelagem são muito próximos daqueles sugeridos pela própria matemática”[33], ao referirem-se aos ciclos de MM *importados da matemática sábia*, como se estes assim pudessem ser “*copiados*” das instituições, como a matemática ‘acadêmica’, e “*colados*” na instituição escolar, por exemplo, despistando, em nosso entendimento, a epistemologia dos objetos de saberes da MM que habita na escola básica, que não se confunde com os saberes da MM que ‘vivem’ em outros meios institucionais, sejam eles acadêmicos, como na biologia, nas engenharias ou nas ciências ‘aplicadas’ em geral, ou não ‘acadêmicos’.

Nas instituições escolares há uma “*especificidade* do *funcionamento didático*, de sua própria natureza, irredutível, sem mediações, ao funcionamento ‘laico’ do saber correspondente na ‘comunidade acadêmica’” (CHEVALLARD, 2005, p. 76, grifos do autor, tradução nossa).

Por outro lado, Chevallard (2005) destaca que nas instituições ‘acadêmicas’ o *‘motor do avanço’* da progressão dos saberes se constitui, em última instância, pelo encadeamento dos *problemas* que se reproduzem e dão sentido *à história intelectual* da comunidade acadêmica. Nesse meio institucional, os problemas não revolvidos ou provisoriamente abandonados podem levar à formulação e à resolução de outros problemas de interesse da investigação.

Em todo caso, Chevallard (2005) ressalta que o processo investigativo das instituições ditas ‘acadêmicas’ difere fundamentalmente do processo de ensino, incluindo o ensino da matemática escolar ou da noção de MM na escola básica, por exemplo, cujos funcionamentos *didáticos* nesse último meio institucional são dependentes de uma *intenção* didática (CHEVALLARD, 2005). Essa intenção se dá precisamente quando um sujeito Y, que pode ser um professor, por exemplo, tem a intenção de fazer nascer ou mudar a relação de um sujeito X com um objeto de saber, além de ser “constituído por uma certa *contradição passado/futuro*” (CHEVALLARD, 2005, p. 76, grifos do autor, tradução nossa) na qual o objeto de ensino deve “aparecer como *um objeto com duas caras, contraditórias entre si*” (CHEVALLARD, 2005 p. 77, grifos do autor, tradução nossa).

A respeito das possíveis *matemáticas* existentes em diferentes meios institucionais, incluindo a matemática escolar, a matemática dita ‘acadêmica’, a matemática do matemático profissional, a matemática das engenharias, das economias ou das distintas práticas de MM, que também vivem nas mais diversas instituições “que são

[33] Fragmento do texto: the built “patterns” of the modelling processes are very close to those suggested by mathematics itself

para um dado saber, em termos de ecologia dos saberes, respectivos *habitats* diferentes" (CHEVALLARD, 2005, p. 153, grifos do autor, tradução nossa); essas são práticas com matemáticas reguladas por condições e restrições específicas de espaço institucional. Assim:

> A teoria da Transposição Didática postula dois princípios fundamentais. O primeiro é que 𝓀σ e 𝓀∞, são quase sempre diferentes: 𝓀σ ≠ 𝓀∞. O segundo princípio é que esta diferença entre 𝓀σ e 𝓀∞ é negado por quase todas as pessoas interessadas em 𝓀σ, especialmente os professores de 𝒟 que têm de ensinar 𝓀 (ou, mais exatamente, alguma versão 𝓀σ de 𝓀)[34] (CHEVALLARD, 2019, p. 73-74, tradução nossa).

As simbologias descritas por Chevallard (2019) no extrato de texto, relativas a 𝓀σ e 𝓀∞, correspondem respectivamente às versões dos saberes "𝓀" a serem ensinadas ou a ensinar na instituição escolar e nas instituições ditas 'acadêmicas'. Assim, "a fim de entender o que realmente ocorre, temos que distinguir - em contraste com a crença da maioria - entre diferentes 'versões' de 𝓀"[35] (CHEVALLARD, 2019, p. 73, tradução nossa), aqui interpretado pelas diferentes 'versões' de MM que vivem nas instituições sociais, segundo condições e restrições de cada meio institucional, como a escola básica. Para explicitar parte dessa distinção apontada por Chevallard (2005, p. 103-104, tradução nossa) entre as matemáticas, a utilizada pelo professor e a do matemático, o autor evidencia o seguinte destaque:

> Em seu curso de análise de 1821, Cauchy demonstra assim o teorema dos valores intermediários:
> *'Uma propriedade notável de funções contínuas de uma variável é a de servir para representar a geometria ordenada de linhas retas ou curvas. Desta observação se deduz facilmente a seguinte proposição:*
> *Teorema IV. Se a função f(x) é contínua em relação à variável x entre os limites $x = x_0$, $x = X$ e eventualmente designado como b um valor intermediário entre $f(x_0)$ e f(X), que poderá satisfazer a equação f(x) = b por um ou muitos valores reais de x entre x_0 e X.*
> *Demonstração. Para definir a proposição acima, é suficientemente ver que a curva tem uma equação de y = f(x) cortará uma ou várias vezes a reta que tem a equação y = b no intervalo compreendido entre as coordenadas que correspondem às abscissas x_0 e X; Agora, é evidentemente o que ocorrerá na hipótese admitida'.*
> Para nós, esta demonstração não é uma demonstração. Os termos sintomáticos de insustentabilidade são "ver" e "evidentemente" indicam que se recorre a uma evidência gráfica que atualmente não aceitamos mais, pelo menos entre os matemáticos - é diferente quando o matemático se faz professor.

---

[34] Fragmento do texto: At this point, the theory of didactic transposition posits two key tenets. The first one is that 𝓀σ and 𝓀∞ are almost always different: 𝓀σ ≠ 𝓀∞. The second principle is that this difference between 𝓀σ and 𝓀∞ is denied by almost all the people concerned by 𝓀σ, especially the teachers of 𝒟 who have to teach 𝓀 (or, more exactly, some version 𝓀σ of 𝓀).

[35] Fragmento do texto: In order to understand what really occurs, we have to distinguish—in contrast to the majority belief— between different "versions" of 𝓀.

De maneira análoga, o processo de MM é sujeito às condições e às restrições institucionais cujo funcionamento nas instituições de ensino não se confunde com as regras das práticas de MM das demais instituições. Assim, o processo de MM pode variar de uma instituição para outra, pois:

> Em toda instituição I onde o saber 𝓀 ‘vive’, ele existe em uma versão específica de I, que podemos denotar genericamente por 𝓀$_{I}$. Como regra geral, em uma instituição I, uma de três coisas pode acontecer: parte do saber 𝓀 pode ser *criado* em I (que é, portanto, uma instituição acadêmica I∞ e o local de nascimento - ou um dos locais de nascimento - de 𝓀), ou *utilizado* (𝓀 é uma ferramenta em I), ou *ensinado* (como é o caso em σ)[36] (CHEVALLARD, 2019, p. 74, tradução nossa).

Vale observar que o processo de MM concebido nas instituições escolares deve se adaptar às condições que prevalecem na instituição. Sob as lentes da TAD, deve-se atender *à ecologia epistemológica* (CHEVALLARD, 2019) específica de cada meio, que realiza suas modelagens com diferentes propósitos. Assim, no cerne da transposição didática, encontra-se uma questão rebuscada, segundo Chevallard (2019, p. 73, grifos do autor, tradução nossa), despretensiosa, mas bastante abrangente segundo o autor: “*o que é isso que se chama de 𝓀*”[37], cuja descrição é aqui parafraseada para a MM: *o que é isso que se chama de modelagem matemática?*

O processo de MM nas instituições escolares parece refletir as descrições dos ciclos de MM importados da *matemática sábia* (BOSCH *et al.*, 2006, p. 50) e permanece inalterado como uma noção *transparente* ao seguir “classicamente, este processo de ‘copiar’ 𝓀 = 𝓀∞ em I∞ para ‘colar’ em σ”. Mas “a transição de 𝓀∞ para 𝓀σ não é um verdadeiro processo de copiar e colar: isso acarreta uma série de distorções que tornam 𝓀 uma cópia quase viável em σ”[38] (CHEVALLARD, 2019, p. 74, tradução nossa).

Em última instância, a noção de MM, interpretada sob condições e restrições institucionais da escola básica, por exemplo, pode evidenciar algumas *distorções* no sentido da transposição didática destacada por Chevallard (2019), incluindo, de modo quase dominante, o processo de construção de modelos matemáticos tal como concebido

---

[36] Fragmento do texto: in every institution I where the piece of knowledge 𝓀 “lives,” it exists in a version specific to I, which we can generically denote by 𝓀I. As a general rule, in an institution I, one of three things can happen: the piece of knowledge 𝓀 can be either created in I (which is therefore a scholarly institution I∞ and the birthplace—or one of the birthplaces—of 𝓀), or used (𝓀 is a tool in I), or taught (as is the case in σ).

[37] Fragmento do texto: What is this thing you call 𝓀?

[38] Fragmento do texto: Classically this process should “copy” 𝓀 = 𝓀∞ in I∞ to “paste” it into σ. But the passage from 𝓀∞ to 𝓀σ is not a true copy and paste process: it entails a number of distortions that make 𝓀 into a near-copy viable in σ.

em muitas instituições ditas ‘acadêmicas’ e, com isso, parece despistar outros aspectos como o *ensino* e o *uso* de modelos.

Na manipulação didática em geral (CHEVALLARD, 2005), não se pode compreender um saber, aqui interpretado pela noção de modelo matemático, por exemplo, se “muitos de seus aspectos se ignoram sua utilização e seu ensino” (CHEVALLARD, 2005, p. 155, tradução nossa). O autor acrescenta que “nesse sentido, não há ‘referência privilegiada’ ou mundo fechado. Do ponto de vista da antropologia, o saber aparece como uma totalidade, cujos diferentes momentos são igualmente vitais” (CHEVALLARD, 2005, p. 155, tradução nossa). Sob essa compreensão, Chevallard (2005, p. 156, grifos do autor, tradução nossa) pontua que:

> Devemos ver nisso, penso eu, o efeito de uma certa maneira que a cultura tem em tratar os saberes. Se valoriza e prioriza sua *produção*. Sua *utilização* permanece opaca, ignorada. Seu *ensino*, mais visível culturalmente que a utilização é, entretanto, subestimado, considerado como um negócio contingente e um mal necessário.

Embora o ciclo de MM pareça enclausurado ao estrito domínio de uso dos objetos matemáticos, ele precisa ser transposto para um arcabouço teórico, segundo recomendam García et al. (2006), pois um objeto de saber, seja ele o processo de MM ou um modelo matemático, “a fim de se tornar ensinável (e aprendível) em algum sistema escolar Σ, uma parte do saber $\mathcal{k}$ deve ser ‘transposto’ de algum mundo acadêmico hipotético para se adaptar às condições específicas das escolas $\sigma \in \Sigma$”[39] (CHEVALLARD, 2019, p. 76, tradução nossa).

Nesse sentido, as condições mínimas de análise e desenvolvimento de modelos matemáticos podem ser encaminhadas por meio do *Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática*, daqui em diante CIMM, proposto por Sodré e Guerra (2018) e Sodré (2019), cujos fundamentos se assentam a partir de recursos teórico-metodológicos da TAD (CHEVALLARD, 1999; 2005; 2013; 2019).

O CIMM (SODRÉ; GUERRA, 2018; SODRÉ, 2019) pode ser interpretado como uma organização praxeológica dotada de “duplo papel funcional enquanto dispositivo didático-metodológico: para o ensino-aprendizagem de MM e para a formação docente” (SODRÉ, 2021, p. 17), integrando em sua dinâmica “uma epistemologia realmente *funcional* em que os saberes apareçam como ‘máquinas’ produtoras de conhecimentos

[39] Fragmentos do texto: In order to become teachable (and learnable) in some school system Σ, a piece of knowledge $\mathcal{k}$ has to be “transposed” from some hypothetical scholarly world to adapt to conditions specific to the schools $\sigma \in \Sigma$.

úteis para a criação de respostas *R* a questões *Q*" (BOSCH; GASCÓN, 2010, p. 82, grifos dos autores, tradução nossa), cujos saberes apontados neste extrato de texto são aqui compreendidos por meio de modelos matemáticos.

A organização praxeológica do CIMM é dotada de seis tarefas sequenciais, a saber: Tarefa T_0 – Construir uma Situação de Referência Inicial para o problema em contexto; Tarefa T_1 – Investigar os modelos matemáticos que vivem na instituição escolar relacionados ao problema em contexto; Tarefa T_2 – Encontrar situações com matemática que podem ser associadas a um modelo matemático; Tarefa T_3 – Avaliar os modelos matemáticos; Tarefa T_4 – Desenvolver um modelo matemático; Tarefa T_5 – Difundir e defender o modelo matemático. Assumimos nesta investigação que os:

> Recursos teórico-metodológicos do CIMM aqui compreendido como um *Percurso de Estudo e Pesquisa Estruturado* (Sodré, 2019), e mais amplamente a partir de noções da TAD cujo CIMM emerge, especificamente, fundamentado em elementos do dispositivo didático-metodológico denominado de Percurso de Estudo e Pesquisa (Chevallard, 2005, 2013), daqui em diante PEP, que toma sua forma concreta pela articulação de saberes disciplinares e não disciplinares" (SODRÉ; FERREIRA; GUERRA, 2022, p. 560).

Sob essa compreensão, a organização praxeológica do CIMM:

> Contraria o desenvolvimento da MM como uma atividade exclusiva da matemática quando encaminha a didática do Percurso de Estudo e Pesquisa Estruturado, pois, sob o paradigma de questionamento do mundo é que ele toma sua forma concreta, chamando para si as praxeologias infraestruturais, matemáticas e não-matemáticas, o que inclui todos os saberes disciplinares e não-disciplinares demandados para o estudo de um domínio de realidade (SODRÉ, 2019, p. 128).

Vale ressaltar que a complexidade de se estabelecer relações entre saberes matemáticos e não matemáticos se faz presente no desenvolvimento das tarefas do CIMM, "especificamente, a execução tarefa T_2 constitui o que chamamos de processo de *modelagem matemática reversa*, ou seja, *encontrar uma situação que possa estar associada a um dado modelo matemático*" (SODRÉ; FERREIRA; GUERRA, 2022, p. 561) e, como tal, pode se mostrar problemática para professores e alunos se esses assumem a MM no estrito campo dos saberes matemáticos.

As tarefas, T_0, T_1, T_2 do CIMM, em unidade, foram denominadas por Sodré, Ferreira e Guerra (2022) de *modelagem matemática reversa* ou simplesmente MMR, e "envolve a desconstrução e reconstrução de um modelo matemático com construções/reconstruções de situações" (SODRÉ; FERREIRA; GUERRA, 2022, p. 562), especificamente de *situações com matemática.*

Assim, a MMR surge como uma resposta a invisibilidade do papel que joga a situação no processo de MM que, em geral, não tem sido considerado na técnica didática dos ciclos de MM, o qual tomam como possível referência, segundo Kaiser, (2020, p. 556 apud CEVIKBAS; GREEFRATH; SILLER, 2023, p. 1-2, tradução nossa) "o processo idealizado de modelagem matemática é descrito como um processo cíclico para resolver problemas reais usando a matemática, ilustrado como um ciclo que compreende diferentes etapas ou fases"[40].

Talvez, por isso, o uso do ciclo de MM não tenha se mostrado eficiente para alcançarmos o sucesso desejado no uso da MM de modo a minimizar a persistente questão sobre como fazer que os alunos aprendam MM (BLUM, 2011, GASCÓN, 2011, GARCÍA; GASCÓN; RUÍZ-HIGUERAS; BOSCH, 2006).

Várias modificações do ciclo de MM com inclusões de novas fases têm sido propostas nas últimas décadas, como bem demonstram os trabalhos de Borromeo Ferri (2006), Blum e Borromeo Ferri (2009), Perrenet e Zwaneveld (2012), Blum (2015), Greefrath e Vorhölter (2016) e Barquero e Jessen (2020). No entanto, a noção de situação não tem sido considerada objetivamente como dificuldade ou bloqueio para o uso dos ciclos de modelagem e isso é o que a MMR, como uma fase do CIMM, busca atender, considerando o papel que joga a situação em qualquer versão do CMM.

A primeira grande tarefa dos ciclos de MM, que se resume em traduzir um problema do mundo real em termos matemáticos, pode se tornar suficientemente complexa, senão impossível de ser realizada considerando a hipótese de que a situação, no sentido aqui adotado, jamais será alcançada por aqueles que desconhecem os objetos ou ângulos do contexto real a ser modelado.

A segunda grande tarefa dos ciclos de MM resume-se em traduzir a situação em termos matemáticos que conformam a situação orientada por tarefas matemáticas exequíveis nesse campo de conhecimento, tendo em conta os interesses sobre a situação em conformidade ao campo de conhecimento e vice-versa. Embora se possa pensar que o maior universo cognitivo matemático em jogo é suficiente para o sucesso dessa tradução, não podemos tomar isso como verdadeiro, como alerta Revuz (1971, p. 50, tradução nossa):

> É preciso também observar que um homem pode ser confrontado com uma situação na qual ele vê apenas determinado aspecto, e que a construção de um

[40] Fragmentos do texto: the idealized process of mathematical modelling is described as a cyclic process to solve real problems by using mathematics, illustrated as a cycle comprising different steps or phases.

> modelo pode obrigá-lo a lançar um olhar mais agudo sobre a situação e descobrir características as quais, no início, ele não observara. Saber mais pode ajudar a ver mais, e, por isso, os professores do jardim de infância nem sempre estão cientes de toda a matemática que pode ser encontrada nos trabalhos espontâneos de seus alunos[41] .

Além disso, Grandsard (2005) destaca que o maior conhecimento matemático não é suficiente para garantir sucessos em tarefas de MM e, não menos importante, que nem tudo admite ser traduzido matematicamente, como bem exemplifica Christensen, Skovsmose e Yasukawa (2008).

Desse modo, a situação idealizada pode ser condicionada a relações entre objetos do contexto real, como também sob a conveniência da tradução desses objetos e suas relações em tarefas matemáticas exequíveis e disponíveis na escola ou instituição. Isso aumenta a complexidade da situação a ser modelada.

Vale observar que a grande tarefa final presente nos ciclos de MM trata-se da validação de uma solução para a situação idealizada como uma solução para o problema do mundo real em jogo. Essa tarefa consiste em verificar de algum modo, se a o aspecto resolutivo da situação idealizada se insere no campo das soluções possíveis para o problema em contexto considerado, exigindo relacionar a situação idealizada com o contexto real e vice-versa.

De outro modo, a grande tarefa final demanda o conhecimento da situação idealizada em conformidade com o contexto real, de modo que se possa tratar de uma como se fosse a outra, mas preservando suas diferenças. Reconhecer uma na outra. Sem esse reconhecimento a realização dessa grande tarefa dos ciclos de MM torna-se impossível e compromete todo o processo de MM.

Em todos os casos, nas grandes tarefas da MM, há dependência do conhecimento da situação, de seus objetos em relação com os objetos do contexto real e, portanto, dependendo do conhecimento do contexto real. Para além disso, é necessário reconhecer os objetos da situação que estão em relações com as tarefas matemáticas, para permitir avaliar a conveniência das soluções matemáticas como soluções possíveis para esse tipo de situação e, finalmente, avaliar se as soluções possíveis da situação podem ser uma das soluções desejada para o problema em contexto real.

---

[41] Fragmentos do texto: One must also remark that a man can be confronted with a situation of which he sees only certain aspects, and that the building of a model may compel him to throw a more acute look on the situation and Discover features of which, at the beginning, he was not aware. To know more may help to see more, and for instance, the teachers of the kindergarten are not always aware of all the mathematics that may be found in the spontaneous work of their pupils.

Em resumo, podemos pensar que qualquer tipo de ciclo de MM é governado por um tipo de situação com matemática, no sentido de que somente se realiza com ajuda da matemática, que fora antes abstraída em dialética entre o contexto real e as tarefas matemáticas em jogo, tendo em vista a disponibilidade e limitações desse contexto e das tarefas matemáticas.

É sob essa compreensão do papel que joga a situação nos ciclos de MM que propomos o Ciclo Investigativo de Modelagem Matemática, CIMM (SODRÉ; GUERRA, 2018, SODRÉ, 2019), cuja fase que explora as situações dita de MMR ganha importância quando propõe o estudo de situações frente ao contexto real e modelos matemáticos disponíveis à escola.

Considerando que a MMR pode levar os sujeitos, sejam alunos ou professores, a darem os primeiros passos para adentrar ao universo cognitivo da MM, basicamente com a ênfase em desconstruir e reconstruir um modelo matemático em dialéticas com construções/reconstruções de situações com matemática frente a um dado tipo de problema do mundo real disponível à escola, é que a adotamos como instrumento de nossa pesquisa, como método empírico para levar esses sujeitos ao encontro do papel dos tipos de situações com matemática no processo de MM, sejam como produtoras de modelos matemáticos, sejam como produtos de modelos matemáticos, conforme orienta o esquema da Figura 1.

Figura 1 – O papel funcional das situações com matemática no processo de modelagem

Fonte: Construção dos autores (2023).

É preciso ter em conta que “muitos modelos podem ser imaginados para uma situação, e muitas situações diferentes podem ser representadas por um mesmo modelo. A tarefa difícil é a de escolher, se possível, o melhor modelo”[42] (REVUZ, 1971, p. 49, tradução nossa). Aqui, dado um modelo matemático frente a um problema do mundo real, limitamos a encontrar situações que relacionam o dado modelo matemático com o dado

[42] Fragmento do texto: *Many models can be imagined for one situation, and many different situations may be represented by the same model. A difficult task is to choose, if possible, the best model.*

contexto real. Isso permite a liberdade de criação somente relativa a situações, não necessariamente de modelos.

A esse respeito, é oportuno considerar o que nos diz Revuz (1971, p. 49, tradução nossa) sobre a relação entre modelos matemáticos e situações frente à realidade:

> A adequação do modelo à situação. A qualidade dessa adequação não é uma questão matemática, mas é uma questão vital para muitas ciências, e não é sempre suficientemente aprofundada e estudada. Se alguém usa um modelo um tanto inadequado, por causa de sua conveniência e a despeito de sua inadequação, é preciso estar ciente do perigo de tirar conclusões definitivas sobre a realidade a partir do estudo de tal modelo[43].

Assim, assumimos que uma situação que relaciona o modelo com o contexto é aquela pode ser produzida pelo modelo e simultaneamente esteja em conformidade com o contexto e que é desejado nele. Nesse sentido, é necessário o cuidado sobre uma situação produzida pelo modelo que esteja em aparente conformidade com o contexto real, pois pode não estar em conformidade com o desejado daquele contexto, sendo inadequada, geralmente, por evidenciar aspectos não considerados para a abstração da situação que levam a um contexto real específico, não antes imaginado e que pode se mostrar absurdo. Essas situações inadequadas são aqui denominadas de situações indesejadas ao contexto, indicadas simbolicamente por {*situação #*}.

Na linha de atender o objetivo de nossa pesquisa a partir do fundamento teórico exposto sobre a MMR, urge que consideremos para uso desse instrumento os tipos de problemas da vida real e modelos matemáticos a eles relacionados que vivem de algum modo nos programas de matemática da escola básica e de suposto conhecimento de professores dessa instituição.

Com esse olhar, explicitamos a seguir um recorte empírico frente a um grupo de professores de matemática da escola básica de diferentes instituições públicas de ensino por assumirmos, em pressuposto, serem conhecedores de atividades matemáticas, inclusive de modelos matemáticos usados em contextos do mundo real.

Assim, realizamos nossa investigação com esses professores a partir da MMR em busca de uma resposta para a hipótese de que professores que desconhecem um contexto real, independente de conhecerem modelos e seus usos relativos a esse contexto real, encontram dificuldades, senão bloqueios, em evidenciar uma situação com matemática

---

[43] Fragmentos do texto: The adequacy of the model to the situation. The quality of this adequacy is not a mathematical question, but it is a vital question for many sciences, and it is not always sufficiently stressed and studied. If one uses a somewhat inadequate model, because of its conveniency and in spite of its inadequacy, one must be aware of the danger of drawing definitive conclusions about reality from the study of such a model.

que possa dar origem a esse modelo, despistando o contributo da MMR como instrumento de pesquisa para a criação da situação, caso a dificuldade ou bloqueio seja confirmado.

Para a realização da MMR recorremos aos modelos matemáticos da matemática financeira escolar, em primeiro lugar, pelo desejo dos professores saberem atuar com segurança com esses modelos, em segundo lugar, por esses modelos serem vistos como do tipo *normativos* (GREEFRATH; VORHÖLTER, 2016), no sentido de gerarem realidades tomadas como inquestionáveis, sem que se conheça claramente os tipos de situações abstraídas para aqueles contextos financeiros que geraram esses tipos de modelos matemáticos financeiros.

Essas situações estão entre aquelas que governam atividades humanas por meio de "práticas sociais que são de fato *definidas a priori por um modelo matemático*"[44] (CHEVALLARD, 1989, p. 27, grifos do autor, tradução nossa) e, por isso, podem ser questionadas sem dificuldades, frente às realidades que elas geram. Isso não somente permite investigar nossa hipótese como também evidenciar uma didática com objetos matemáticos para a formação de cidadãos.

Na análise de resultados, despistamos o objetivo geral da MMR como um dispositivo metodológico de formação docente a partir de situações da matemática financeira escolar enfrentadas por professores de matemática.

4.2 Análises de resultados encontrados com professores

A MMR com professores de matemática foi realizada seguindo a orientação das tarefas que a determinam no CIMM, a qual exige a defesa das respostas encontradas durante o processo de estudos realizados. A oficina foi realizada com 10 (dez) professores de matemática, aqui simbolizados por meio de um sistema didático principal (P_i, d, Q_i), sendo:

$P_i \rightarrow$ o conjunto dos professores de matemática;
d $\rightarrow$ o diretor da investigação;
$Q_i \rightarrow$ o questionamento geratriz da investigação.

O questionamento que mobilizou o enfrentamento pelos professores foi encaminhado pelo diretor de estudos (*d*) nos seguintes termos: Q_i - Como definir se um tipo de problema em contexto da matemática financeira escolar é de uma situação de juros simples ou de juros composto?

[44] Fragmento do texto: *(...) pratiques sociales qui sont en fait définies a priori par un modèle mathématique.*

Esse questionamento levou os professores a realizarem incursões investigativas pela busca de possíveis respostas ao questionamento Q_i, aqui interpretado como um tipo de questão indeterminada (CHEVALLARD, 2009), cuja resposta pode ser construída ou reconstruída a partir do enfrentamento de outros questionamentos determinados frente ao estudo de situações. Orientado pelas tarefas T_0 e T_1 do CIMM, ou seja, a de construir uma Situação de Referência Inicial e a de investigar os modelos matemáticos, respectivamente, o professor, simbolizado por P_1, fez o seguinte destaque:

> *P_1: Assim pelo que me lembro, por exemplo, seu pego um empréstimo de R$ 1.000, 00 e com juros de 4% ao mês. Eu vou calcular mil vezes quatro por cento, seria deixa eu ver, seria de R$ 10,00, ai seria juros simples. Ai se for juros compostos não estou bem lembrado [...] deixe ver se eu me recordo [...].*

Nesse contexto, que parece expressar dúvidas do professor P_1, são reveladas *qualidades de relações* (CHEVALLARD, 2005) sobre a possível situação com matemática assumida como a situação de juros simples, talvez a partir de suas práticas vivenciadas em um meio institucional ao longo de sua história de vida. Assim, observa-se que:

> Não se pode explicar o "pensamento do aluno", ou mais genericamente o "pensamento" de qualquer pessoa, sem elucidar as condições e os constrangimentos sob os quais ele é formado (...) Em cada período histórico, o que os alunos têm em mente depende em grande medida do que lhes é ensinado e do que estudam - e da forma como isso é feito.[45] (STRØMSKAG; CHEVALLARD, 2022, p. 2, tradução nossa),

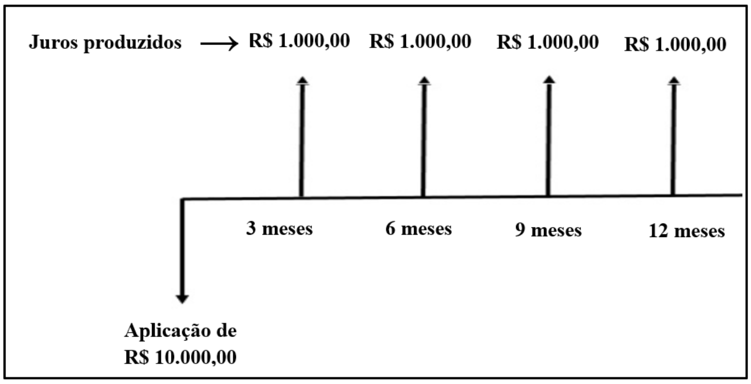
Isto é, depende das relações do sujeito sobre um dado objeto de saber, construídas ou reconstruídas institucionalmente. Seguindo essa compreensão, a manifestação do professor P_2 parece ratificar as dúvidas evidenciadas por P_1, quando assim revela:

> *Professor P_2: Eu acho que a diferença está no montante é uma opinião [...] talvez...*
> *Professor P_1: Sim, por exemplo, se eu aplico em uma conta poupança o valor de dez mil (R$ 10.000,00) reais [...] eu vou dar um exemplo de juros composto [...] eu vou dar um exemplo, porque eu não me recordo qual a definição eu só sei dando um exemplo. Então a cada três meses esse mesmo valor de aplicação ela tem os juros com taxa de 10%, e no final aí vou ter o valor inicial aplicado e os juros obtido. Nesse exemplo, o valor de 10.000,00, com juros de 10% a cada três meses, né, será mil reais [...] aí a cada três meses esses dez mil (R$ 10.000,00) lucrou [...] mil reais (R$ 1.000,00) [...] aí no caso no final de um ano aí teremos que vai me dar mil, mais mil, mais mil, mais mil, [...] aí vai dar 14 mil reais [...] que é esse valor inicial mais os juros que é o montante.*

[45] Fragmentos do texto: One cannot explicate 'student thinking', or more generally anyone's 'thinking', without elucidating the conditions and constraints under which it is formed (...) In each historical period, what students have in mind depends largely on what they are taught and what they study—and the way they do it.

Para explicitar parte das manifestações do professor P_1, construí um esquema gráfico para expressar, mesmo que parcialmente, o exemplo assumido por esse professor, ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Representação gráfica da descrição da situação por P_1



Fonte: Construção dos autores.

As manifestações dos professores P_1 e P_2, sob a orientação das tarefas T_0 e T_1 da MMR, revelam dificuldades na realização da tarefa T_2, isto é, delimitar o tipo de situação com matemática que pode estar associado ao modelo matemático de juros compostos. Embora o professor P_1 recorra à situação com matemática de juros compostos, sua descrição situa-se nas situações de juros simples.

As evidências postas à prova por P_1 deixam claro que seu conhecimento é descrito pelas práticas realizadas e não por uma tentativa de definir juros compostos, isto é, não consegue delimitar uma situação com matemática com juros compostos ao declarar:

> *ProfessorP_1: [...] eu vou dar um exemplo de juros composto [...] eu vou dar um exemplo, porque eu não me recordo qual a definição eu só sei dando um exemplo.*

O conhecimento seria dado por meio de práticas sociais com o objeto, que são realizadas e aceitas no interior de instituições concretas (BOSCH; CHEVALLARD; GASCÓN, 2006) e, nesse caso, por meio da descrição dessas práticas por P_1. Essa descrição revelaria sua relação com os juros compostos e pela qual foi formado. No entanto, P_1, assim declarou:

> *Professor P_1:[...] deixe ver se eu me recordo [...]*

Isso parece exprimir que sua busca de possíveis relações institucionais construídas no passado de suas experiências como sujeito institucional não estavam mais objetivamente disponíveis em seu universo cognitivo.

As manifestações dos professores P_1 e P_2 levaram o diretor de estudos (d) a questionar novamente:

Diretor de estudos (d): Mas como você diferencia uma situação de juros simples de juros compostos?

Os professores continuam a revelar dificuldades a partir de suas declarações:

Professor P_1: Então essa é a questão rsrsrsrsr (risos). [...] ainda não consegui distinguir um do outro [...].
Professor P_3 Juros simples é cobrado somente sobre o montante emprestado [...]?

Entretanto, a resposta inferida por P_3 é posta à prova por P_4:

Professor P_4: Juros composto é calculado sobre o montante do mês anterior e os juros simples é sobre o capital.
Professor P_5: Depende da situação...
Professor P_6: Resumindo...os juros simples são baseados apenas no montante. Os juros compostos são em cima desse montante mais os juros
Professor P_8: Se ele (os livros) não mencionar que a taxa é no regime de juros composto então o regime de juros a ser adotado é o de juros simples.

As declarações dos professores, a partir dos diálogos supracitados, revelam a problemática objetivada pela realização da tarefa T_2 da MMR, ou seja, a dificuldade dos professores de matemática em (re)conhecer uma situação com matemática que pode estar associada ao modelo matemático que contempla juros compostos.

A fala do professor P_8 revela, em nosso entendimento, que os professores não tomam a situação como uma problemática a ser vencida, mas como um objeto que deve ser dado a priori, nesse caso, pela instituição escolar por meio do livro didático. De outro modo, se o estudo de um objeto é problemático, então seu ensino é desestimulado e assim deixa de ser responsabilidade de professores e alunos o reconhecimento de uma situação com matemática relativa a um dado problema da matemática financeira.

Em última análise, a MMR evidenciou que os professores não alcançam sucesso em delimitar uma situação com matemática que pode estar associada a um dado modelo da matemática financeira e, principalmente, que não assumiam que o não conhecimento do contexto da situação promoveria dificuldades e bloqueios no processo de MM na escola.

Considerações e encaminhamentos futuros

Esta investigação objetivou evidenciar a MMR como uma problemática do CIMM, aqui assumido enquanto dispositivo metodológico para a formação docente. Para explicitar essa problemática, recorreu-se ao estudo de situações da matemática financeira escolar enfrentadas pelos professores de matemática, tendo em vista que essas organizações praxeológicas da matemática financeira são definidas a *priori* por modelos matemáticos normativos, e como tais são interpretados como produtos de 'criação da cultura' (CHEVALLARD, 1989).

Os resultados empíricos encontrados evidenciaram dificuldades dos professores durante a realização da MMR, que consistiu na busca pelos professores em delimitar uma situação com matemática que poderia estar associada ao modelo da matemática financeira com juros compostos.

Essas dificuldades foram evidenciadas a partir do repertório das práticas matemáticas financeiras dos professores. Esse repertório permitiu que eles evocassem situações que assumiam como prática com juros compostos, no entanto, eram situações de juros simples. Isso revelou que os professores não eram capazes de reconhecer o jeito de fazer e de pensar uma organização praxeológica envolvendo uma situação com juros compostos.

A problemática da MMR como uma das problemáticas do CIMM ratificou hipóteses levantadas por Grandsard (2005), por exemplo, ao inferir que professores de matemática em formação inicial "se sobressaem na memorização de fatos, fórmulas e provas, mas não possuem um bom desempenho em matemática a ser aplicada ou mesmo reconhecida em um contexto incomum"[46] (GRANDSARD, 2005, p. 1, tradução nossa).

A didática da MMR instaura evidências da problemática do não conhecimento do contexto real na MM e cria *condições,* no sentido da didática como ciência (CHEVALLARD, 2009, tradução nossa) para o enfrentamento de distorções nas transposições didáticas da MM pela ênfase dada à produção de modelos matemáticos em detrimento do *ensino* e do *uso* de modelos na escola básica.

As dificuldades reveladas pelos professores com as organizações praxeológicas da matemática financeira escolar decorrem, em nossa interpretação, do desconhecimento das situações com matemática que são depreendidas dos problemas e modelos

[46] Fragmento do texto: They excel in memorizing facts, formulas and proofs, but perform poorly as soon as mathematics has to be applied or even recognised in an unusual context.

matemáticos, e não propriamente de uma “limitação de conhecimentos matemáticos”, considerando a simplicidade matemática presente nessas situações com matemática.

O desconhecimento do contexto real com suas possíveis situações associadas cria dificuldades não somente à realização de um ciclo de MM, mas também do uso adequado de modelos matemáticos, e, com isso, dificulta o ensino de modelos matemáticos, pois as organizações para o ensino necessitam de transposições didáticas (CHEVALLARD, 2005, 2019) que demandam a reconstrução do objeto a ser ensinado, de modo a responder as seguinte questões formuladas pela TAD: O que é esse conhecimento que você chama de 𝓀σ e afirma ensinar? De onde vem 𝓀σ? Como 𝓀σ é legitimado – epistemologicamente falando? 𝓀σ é viável a longo prazo? Ou terá que ser recriado?[47] (CHEVALLARD, 2019, p. 76, grifos do autor, tradução nossa).

Vale observar que “problemas de extensão e complexidade (ou sutileza) são os principais fatores e incentivos da transposição didática”[48] (CHEVALLARD, 2019, p. 74, tradução nossa), nos quais se incluem as noções da matemática financeira escolar, pois o currículo parece evidenciar, em alguns casos, o estudo de juros compostos como parte de “uma ‘fronteira’, ou seja – para usar metáforas da topologia – um lugar próximo da fronteira entre o interior e o exterior do currículo, onde a vida é dura e incerta porque um passo em falso pode desviar você para um território desconhecido”[49] (CHEVALLARD, 2019, p. 74, tradução nossa).

Parafraseando as metáforas topológicas referidas por Chevallard (2019), o modelo matemático das situações de juros simples parece objeto central do ensino escolar, presente no “interior” do currículo dessa instituição. Por outro lado, as organizações praxeológicas das situações de juros compostos parecem integrar o corpo de conhecimentos da “fronteira” e, em alguns casos, situa-se no “exterior” do currículo, principalmente, com o uso e/ou estudo do problema de financiamento em prestações fixas (SODRÉ, 2019; SODRÉ, 2021), mesmo em contextos de formação inicial.

Nossos pressupostos para essa posição dos problemas de financiamentos no currículo da escola básica podem ser em função dessas organizações praxeológicas

[47] Fragmentos do texto: the first questions that ATD leads us to raise are: What is this piece of knowledge that you call 𝓀σ and claim to teach? Where does 𝓀σ come from? How is 𝓀σ legitimized— epistemologically speaking? Is 𝓀σ viable in the long run? Or will it have to be reprocessed.

[48] Fragmento do texto: Problems of length and complexity (or subtlety) are main factors and incentives of didactic transposition.

[49] Fragmento do texto: a “frontier,” that is to say—to use metaphors from topology—a place near the boundary between the interior and the exterior of ₡ where life is hard and uncertain because one false step can lead you astray into unchartered territory.

demandarem, além da articulação e integração de saberes matemáticos e não matemáticos, do indispensável uso de praxeologias com uso de calculadoras científicas ou de computadores, pois estes recursos são condicionantes indispensáveis para o enfrentamento de problemas de maior complexidade.

Em última instância, sentimo-nos estimulados a futuras investigações sobre possíveis problemáticas que podem se revelar a partir da MM de tarefas do CIMM e, em particular, sobre o ensino da MMR, tendo em vista o uso e/ou estudo de modelos matemáticos como instrumentos provedores e criadores de domínios de realidade socialmente compartilhados para atender interesses e intenções de sujeitos ou grupos sociais que nem sempre são visíveis aos sujeitos que dele compartilham de algum modo.

Referências

BARQUERO, B.; JESSEN, B. E. Impact of theoretical perspectives on the design of mathematical modelling tasks. *Avances de Investigación em Educación Matemática, n. 17*, p. 98–113, 2020.

BLUM, W. Can modelling be taught and learnt? some answers from empirical research. *In*: KAISER, G.; BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R.; STILLMAN, G. A. (ed.). *Trends in teaching and learning of Mathematical modelling*. ICTMA14. Dordrecht: Springer, 2011. p. 15-30.

BLUM, W. Quality teaching of mathematical modelling: what do we know, what can we do? In: Cho, S. J. (ed.). *The proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education*, p. 73-96, 2015.

BLUM, W.; BORROMEO FERRI, R. Mathematical modelling: can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, v. 1, n. 1, p. 45-58, 2009.

BORROMEO FERRI, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *The International Journal on Mathematics Education,* v. 38. n.2, p. 86-95, 2006.

BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; GASCÓN, J. Science or magic? the use of models and theories in didactics of mathematics. *Proceedings of the fourth congress of the european society for research in mathematics education*, 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Fundamentos antropológicos das organizações didáticas: das "oficinas de práticas matemáticas" às "rotas de estudo e pesquisa". In: BRONNER, A.; LARGUIER, M.; ARTAUD, M.; BOSCH, M.; CHEVALLARD, Y.; CIRADE LADAGE, G. C. (ed.) *Difusor los Mathematiques (et les autres savoirs) comme d'outils de connaissance et acção*. Montpellier, França: IUFM de l'Académie de Montpellier, p. 49-85, 2010.

BOURDIEU, P. *Esboço de auto-análise*. São Paulo: Companha das Letras, 2005.

CEVIKBAS, M.; GREEFRATH, G.; SILLER, H-S. Advantages and challenges of using digital technologies in mathematical modelling education – a descriptive systematic literature review. *Front. Educ.,* n. 8, p. 1142556, 2023.

CEVIKBAS, M.; KAISER, G.; SCHUKAJLOW, S. A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: state-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educ Stud Math*, 2021.

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* v. 12, nº 1, p.73-112,1992.

CHEVALLARD, Y. Introducing the anthropological theory of the didactic: an attempt at a principled approach. *Hiroshima journal of mathematics education*, n. 12, p. 71-114, 2019.

CHEVALLARD, Y. L'analise des pratiques enseignantes em theórie anthopologique Du didactique, *Recherches em Didactiques des Mathematiques*. Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265, 1999.

CHEVALLARD, Y. La notion d´ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et élémentos de réponses à partir de la TAD. In: Margolinas, C. et al. (org.): En amont et en aval des ingénieries didactiques, XVª École d´Été de Didactique des Mathématiques – Clermont-Ferrand (Puy-de-Dôme). *Recherches em Didactique des Mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, v. 1, p. 81-108, 2009.

CHEVALLARD, Y. *La transposición didáctica*: del saber sabio al saber enseñado. Aique grupo editor, 2005.

CHEVALLARD, Y. *Las matemáticas en la escuela*: por una revolución epistemológica y didáctica. 1. ed. Cuidad Autónoma de Buenos Aires: Libros del Zorzal, 2013.

CHEVALLARD, Y. Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. *Petit X*, v.19, n.19, p. 43–72, 1989.

CHEVALLARD, Y.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. *Estudar matemáticas*: o elo perdido entre o ensino e aprendizagem. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CRISTENSEN, O. R; SKOVSMOSE, O; YASUKAWA, K. The Mathematical state of world explorations into the characteristics of mathematical descriptions. *Alexandria – Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, v.1, n.1, p. 77-90, mar 2008.

FLORENSA, I., GARCÍA, F. J., SALA, G. Condiciones para la enseñanza de la modelización matemática: Estudios de caso en distintos niveles educativos. *AIEM - Avances de Investigación en Educación Matemática*, v.17, p. 21–37, 2020.

FUKUSHIMA, T. The role of generating questions in mathematical modeling. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, v. 1 p. 1-33, 2021.

GARCIA, F. J.; GASCÓN, J.; HIGUERAS, L.; BOSCH, M. Mathematical modelling as a tool for the connection of school mathematics. *ZDM Mathematics Education,* v. 38, n.3, p. 226-246, 2006.

GASCÓN, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*, v. *14*, n. 2, 203–231, 2011.

GRANDSARD, F. *Mathematical modelling and the efficiency of our Mathematics*, 2005.

GREEFRATH, G.; VORHÖLTER, K. *Teaching and learning mathematical modelling: approaches and developments from german speaking countries. Londres: Editora* Springer, 2016.

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. *Perspectivas da Educação Matemática*, Campo Grande-MS, v. 2, n. 3, p. 95-119, 2009.

HARTMANN, L. M.; KRAWITZ, J.; SCHUKAJLOW, S. Create your own problem! When given descriptions of real-world situations, do students pose and solve modelling problems? *ZDM Mathematics Education,* v**.** 53**,** p. 919–935, 2021.

LEDEZMA, C.; FONT, V.; SALA, G. Análisis de la reflexión realizada por un futuro profesor sobre el papel de la modelización matemática en la mejora de un proceso de instrucción para enseñar trigonometría. *Revista Paradigma*, v. 42, n.2, p. 290-312, 2021.

PERRENET, J.; ZWANEVELD, B. The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal Of Mathematical Modelling and Application,* v.1, n.6, p. 3-21, 2012.

POLLAK, H. What is mathematical modeling? *Journal of Mathematics Education at Teachers College*, v.2, n.1, 64, 2011.

REVUZ, A. The position of geometry in mathematical education. *Educational Studies in Mathematics*, v. 4, p. 48-52, 1971.

SCHUKAJLOW, S.; KAISER, G.; STILLMAN, G. Empirical research on teaching and learning of mathematical modelling: a survey on the current state-of-the-art. *ZDM - Mathematics Education*, v. 50, n.1, p. 5-18, 2018.

SODRÉ, G. J. M. *Modelagem matemática escolar*: uma organização praxeológica complexa. Tese de Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém: Universidade Federal do Pará, 2019.

SODRÉ, G. J. M. Heranças histórico-epistemológicas da modelagem matemática financeira escolar. *REnCiMa*, São Paulo, v. 12, n. 5, p. 1-25, ago. 2021.

SODRÉ, G. J. M.; FERREIRA, R. S. do.; GUERRA, R. B. Modelagem matemática reversa. *Acta Sci.* (Canoas), v. 24, n.6, 552-583, Nov./Dec. 2022.

SODRÉ, G. J. M.; GUERRA, R. B. O ciclo investigativo de modelagem matemática. *Educ. Matem. Pesq.*, v. 20, n.3, p. 239-262, 2018.

STRØMSKAG, H.; CHEVALLARD, Y. Breaches of the didactic contract as a driving force behind learning and non-learning: a story of flaws and wants. *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 2022.

WITTGENSTEIN, L. *De la certitude*. Paris. Gallimard: 1976.

5- Um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de métodos de resolução de sistemas lineares

Fernando Cardoso de Matos
José Messildo Viana Nunes

Introdução

Neste artigo trabalharemos aspectos relacionados ao ensino de Álgebra Linear, no que tange os métodos de resolução de sistemas lineares, voltado aos alunos de graduação em Matemática, pois tal objeto necessita ser compreendido para que se desenvolva em um nível de complexidade crescente os demais objetos da Álgebra Linear. Este ensaio teórico retrata parte da pesquisa de doutorado sobre fundamentos da didática francesa, que tratou sobre um estudo histórico epistemológico de objetos da Álgebra Linear em um curso de Licenciatura em Matemática.

Celestino (2000) relata que as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da disciplina Álgebra Linear na década de 1990, no Brasil, eram tímidas. Tal problemática fora estudada nas pesquisas internacionais de Dorier (1990, 2000), Dorier et al. (1999), Laugwitz (1974), Carlson (1993) e Uhlig (2015). No cenário nacional temos os trabalhos de Karrer (2006, 2009), e Barros (2018). Esta seção primeira tem a função de apresentar o tema da pesquisa, o problema que será discutido, a justificativa e o(s) objetivo(s) do estudo.

Na tese de Matos (2017) revelou-se que estudar sistemas lineares (SL), isto é, o estudo qualitativo deste objeto é fundamental no estudo de toda a Álgebra Linear (AL). Mas este objeto, ainda encontra diversas dificuldades por parte de alunos em engendrar os SL com outros objetos da AL. Daí trata-se de uma tarefa fundamental para o ensino da AL.

Temos como objetivo elaborar uma proposta de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) sobre o estudo qualitativo dos SL, no que tange os métodos de resolução de sistemas lineares, que sirva de entendimento mínimo, para analisar as praxeologias institucionais presentes em instituições de ensino superior, que ensinam sistemas lineares na disciplina AL. Não abordaremos todo o modelo, tratado em Matos (2017), mas a parte que trata em revelar que os três métodos de resolução dos sistemas lineares são na realidade o método da substituição e eliminação, que é um método potente para resolução de sistemas.

Tratar-se-á neste artigo de um processo de transposição didática interna quando realizada por um docente (um dos autores), que questiona as próprias práticas com matemáticas de um determinado objeto, que vive em uma determinada instituição, se constitui em um dispositivo didático de formação pessoal relativo a esse objeto.

Nosso MER tem inspiração no ensino da AL para licenciatura, na perspectiva de compreender que papel a AL "joga" para o ensino básico. A ideia perpassa em uma estrutura mínima de entendimento sobre a nossa versão de saber, sendo nosso jeito de pensar e fazer, em relação ao ensino de objetos da AL para o ensino básico. Neste sentido fora criado uma nova OMD, que para atender nosso propósito, de articular com o ensino básico, por meio do estudo qualitativo de sistemas lineares, que não é estudado no ensino básico, pois a nosso ver não se dispõe de práticas para isso, a não ser por determinantes, que é uma técnica limitada, baixo alcance, para ser introduzido na formação de futuros professores, no sentido da compreensão do objeto da matemática básica. Ou seja, pensamos em um modelo para resolver um problema do ensino básico, mas também na formação de professores, isto é, com impacto direto na formação de professores, já que sistemas lineares é um dos problemas da AL.

Nesta proposta há condições para que esta organização praxeológica funcione, como um sistema didático, ou seja, quando formos colocá-lo em prática durante uma futura aplicação do PER, já que neste artigo trabalharemos com um PER solitário, pois são os dois autores na construção do MER, este estará sujeito a novas condições/restrições e ao final do processo de estudo, conforme a TAD, este será "concluído". Esta estrutura mínima de entendimento se faz necessária para nos guiar perante o enfrentamento de tarefas e dos questionamentos que surgirão durante o processo de estudo, com um conjunto de práticas com menos abstração, que conforme as pesquisas correlatas, representa um obstáculo ao processo de ensino.

A ideia é iniciar com tarefas sobre sistemas lineares bem simples, para fazermos com que os alunos atinjam a arte da prática[50], para em seguida resolver tarefas cada vez mais complexas.

5.1 Referencial teórico

Barros (2018), constatou que mais de 75% dos estudantes, que participaram da sua pesquisa, concordam ou concordam totalmente que a interação e discussão estabelecida no seio do grupo contribuíram para a partilha e a construção conjunta de novo conhecimento (92,8%), ultrapassar algumas das dificuldades (89,3%), evitar que cometessem erros que provavelmente fariam se resolvessem individualmente as tarefas (89,2%) e sentir mais confiança nas suas capacidades (85,7%). Os resultados obtidos permitiram constatar que os alunos têm diversas dificuldades na resolução de questões relacionadas com Matrizes e determinantes e Sistemas de equações lineares, tendo-se concluído que algumas delas têm origem em conteúdos propedêuticos à Álgebra Linear.

Nossa reflexão ao nível epistemológico ocorre por meio de uma dialética entre as nossas investigações sobre o ensino de Álgebra Linear e a história deste tema. Na tese de Matos (2017) há um forte estudo epistemológico dos SL, e que o MER proposto, tem suas bases fundamentadas em tais estudos. A epistemologia aparece como um termo que ligará as obras históricas ao trabalho docente. Logo a epistemologia tem um papel transversal, no sentido de interagir com a didática e a história da matemática.

Mendes (2015) propõe que devemos construir um ambiente investigatório, em que o professor possa possibilitar aos estudantes o desenvolvimento de habilidades matemáticas para (re) descontextualizar e (re) despersonalizar o seu conhecimento.

Bosh e Gáscon (2001) alertam que no enfoque epistemológico em Didática das Matemáticas as práticas docentes do professor de matemática têm aparecido muito tarde, ao menos de um modo mais explícito. Chevallard (1991) propõe por meio da Teoria da transposição Didática (TTD) que não é possível interpretar adequadamente a atividade matemática escolar sem levar em conta os fenômenos relacionados com a reconstrução escolar das matemáticas que tem sua origem na instituição de produção do saber matemático. Tal atividade se integra a uma problemática muito mais ampla, que são as atividades matemáticas institucionais.

[50] As tarefas não são mais um problema para os alunos. Isto é, deixaram de ser problemáticas. Tornaram-se rotineiras.

Para se ter acesso ao conhecimento científico não é feito sem um ambiente didático, sem a intenção de ensinar. É por isso que se coloca o nosso propósito em uma relação constante entre a referência epistemológica e a observação didática, ou seja, que um saber, por sua artificialidade, somente é alcançado pelo estudo e nele se insere o ensino. Para nós, a epistemologia é uma ferramenta consistente na didática, uma vez que fornece elementos determinantes de compreensão relativos à construção do saber, permitindo, especialmente, a questionar a especificidade dos saberes científicos na sua relação com outros saberes

5.2 Proposta do MER

Consideremos nossa proposta de MER como um instrumento que nos auxiliará a descrever e analisar do modelo epistemológico dominante na instituição que iremos analisar, nos possibilitando, ainda a identificar as condições ou restrições presentes no modelo.

É necessário compreender as OM propostas no MER como um modelo inteligível de praxeologias, sendo que tal construção não se deve dar de forma espontânea, mas responder a uma questão institucional que constitui as razões de ser da organização matemática ou extra matemática.

Na Teoria Antropológica do Didático (TAD), conforme Chevallard (2012), a pedagogia de questionar o mundo, isto é, possibilidade de trilhar um caminho de pesquisa, que serão os meios pelos quais aprendemos é uma tentativa de ressignificar o paradigma escolar presente, o da monumentalização do saber, por meio de um percurso de estudo e pesquisa (PEP) solitário, para estudo de uma questão geradora Q_0 de outras questões derivadas Q_i com respostas provisórias $R^\diamond$, protagonizadas por alunos e professor, incrementadas a partir de obras O_i, que constituirão o milieux didático, a partir de um sistema didático $S(X, Y, Q)$.

Nossa proposta de MER visa construir um sistema de tarefas, que articulem práticas, que aparecem e é procurar dar uma articulação entre objetos do ensino médio e a AL. No Brasil e em outros países, predominantemente os alunos em primeiro lugar aprendem matrizes, operações e solução de sistemas lineares e sem grandes dificuldades em fazê-lo. Quando falamos de modelos epistemológicos não estamos nos referindo a alguma coisa abstrata, mas que se concretiza, nas práticas dos professores de matemática.

Nosso MER fora elaborado a partir de uma compreensão teórica, alicerçada na TAD, que trata que todo saber tem que ser organizado e que este é prático, logo o saber, segundo a TAD, é algo que se manifesta, incerto não palpável, que é a própria prática, isto inclui os saberes práticos, que são as práticas propriamente ditas e como são organizadas essas práticas, a partir da compreensão que temos sobre estas, assim logo nosso MER proposto deste trabalho é um modelo baseado na compreensão que a TAD nos dar.

Ressalto que o MER tem um caráter provisório, ou seja, uma hipótese a ser contrastado com os dados empírico e estará sujeito a modificações permanentes, logo não é algo fechado, logo será um modelo dito relativo, já que na (TTD) Chevallard (1985, 1991a) revela que não existe um sistema privilegiado, absoluto, para se observar e analisar a vida institucional, tanto intra como interinstitucional das OM.

Neste momento há um processo de reconstrução da OM, que deve conter momentos exploratórios onde a tecnologia (*método da eliminação e substituição*) irá justificar t_1.

Gênero de tarefa: estudar qualitativamente os sistemas lineares

T1: Resolver o sistema linear m x n. A razão de ser: estudo qualitativo dos sistemas lineares.

t1: Resolver o sistema linear S_4 (4 linhas e 4 variáveis).a seguir, pelo método da eliminação e substituição

τ_1: Utilização do método da substituição e eliminação.

Sistema S_4 (momento do trabalho da técnica)

$$\begin{cases} (E_{41}) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ (E_{42}) \quad x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ (E_{43}) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ (E_4) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Isolando-se x_1 na equação E_{41}, temos: $x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4)$ e substituindo x_1 na equação E_{42}:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ 7 - (x_2 + x_3 + x_4) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 \end{cases}$$

Substituindo x_1 nas equações E_{43} e E_{44}, e reduzindo os termos semelhantes, tem-se:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) & (E_{411}) \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (E_{421}) \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & (E_{431}) \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & (E_{441}) \end{cases}$$

Simplificando os termos semelhantes e isolando x_2 na equação (E_{421}), temos:

$$x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$$

Substitui-se $x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$ nas equações E_{431} e E_{441}:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 + x_4) \\ x_3 + x_4 = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x_3 = 1 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 2 \end{cases}$$

Trabalhando com as duas últimas equações, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) & \\ x_2 = 1 - (x_3 - x_4) & \\ x_3 = 1 - x_4 & (E_{432}) \\ x_3 + 2x_4 = 2 & (E_{442}) \end{cases}$$

Substituindo $x_3 = 1 - x_4$ na equação E_{442}, temos:

$$\begin{cases} x_1 = 7 - (x_2 + x_3 + x_4) \\ x_2 = 1 - (x_3 - x_4) \\ x_3 = 1 - x_4 \\ x_4 = 1 \end{cases}$$

Observando para a equação E_{442} chegamos em um sistema 1 por 1, onde o valor de uma varável é encontrado facilmente, que é $x_4 = 1$. Logo $S = \{(6,0,0,1)\}$ é a solução deste sistema.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ \qquad x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad x_3 + x_4 = 1 \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 1 \end{cases} \qquad \text{Sistema escalonado } (S_4{}^9)$$

O estudo qualitativo de sistemas lineares, que se dá pela aplicação do método da eliminação e substituição. Nesta proposta de MER, criar OMR, onde a tecnologia irá articular e coordenar as técnicas, assim deve conter o trabalho da técnica e seu progressivo desenvolvimento, pois fazemos as tarefas se tornarem rotineiras, inicialmente, para conseguinte provocarmos um desenvolvimento progressivo dessa técnica 1, gerando assim técnicas novas para a comunidade de estudo (momento tecnológico teórico).

Na forma triangular a solução de que chamaremos $S^9{}_4$, (pois o sistema foi transformado 9 vezes) é simples, pois deixamos o sistema inicial S4 na forma escalonada (formato triangular). Portanto a solução do sistema S94 é $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ e $x_1 = 4$, portanto obtemos como solução do sistema linear o conjunto solução: $S^9{}_4 = \{(4, 2, 0, 1)\}$.

Precisamos abstrair o processo para se visualizar como ocorre o processo. (momento do exploratório).

T_2: Resolver o sistema linear genérico com n (variáveis) por m (equações) S5.

t_2: Resolver o sistema linear S_5 genérico 3x3 (n = 3) e (m = 3) pelo método da eliminação e substituição.

τ1: utilização do método da eliminação e substituição.

Θ_1: estudo qualitativo de sistemas lineares. Razão de ser: Abreviar a resolução do sistema para enxergar os operadores elementares e o método do escalonamento.

(momentos do primeiro encontro e exploratório da técnica)

Vamos trabalhar com um sistema de 3 incógnitas e 3 equações, ou seja, **n = m** = 3.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 & (E_{51}) \\ a_2x + b_2y + c_2z = f_2 & (E_{52}) \\ a_3x + b_3y + c_3z = f_3 & (E_{53}) \end{cases}$$

Isolando-se x na E_{51}:

$$x = \frac{f_1}{a_1} - \frac{(\mathrm{b_1y + c_1z})}{a_1}$$

Adicionando-se a_1x no 2º membro da equação E_{51}.

$$x = \frac{f_1}{a_1} - \frac{(\mathrm{a_1x + b_1y + c_1z})}{a_1} + \frac{a_1x}{a_1} \therefore x = \frac{f_1 - (\mathrm{a_1x + b_1y + c_1z}) + a_1x}{a_1}$$

$$como \ -E_{51} = f_1 - (\mathrm{a_1x + b_1y + c_1z}), então:$$

$$x = \frac{-E_{51} + a_1x}{a_1} \therefore x = \frac{-E_{51}}{a_1} + \frac{a_1x}{a_1} \therefore x = \frac{-1}{a_1}E_{51} + x \therefore x = x - \frac{1}{a_1}E_{51}$$

Substituindo-se nas equações E_{52} e E_{53}, temos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \Leftrightarrow x = x - \dfrac{1}{a_1}E_{51} \\ a_2\left(x - \dfrac{1}{a_1}E_{51}\right) + b_2y + c_2z = f_2 \\ a_3\left(x - \dfrac{1}{a_1}E_{51}\right) + b_3y + c_3z = f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \Leftrightarrow x = x - \dfrac{1}{a_1}E_{51} \\ a_2\text{x} - \dfrac{a_2}{a_1}E_{51} + b_2y + c_2z = f_2 \\ a_3\text{x} - \dfrac{a_3}{a_1}E_{51} + \; + b_3y + c_3z = f_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \Leftrightarrow x = x - \dfrac{1}{a_1}E_{51} \\ a_2\text{x} + b_2y + c_2z - f_2 - \dfrac{a_2}{a_1}E_{51} = 0 \\ a_3\text{x} + b_3y + c_3z - f_3 - \dfrac{a_3}{a_1}E_{51} = 0 \end{cases}$$

Como $a_2x + b_2y + c_2z - f_2 = 0$ é a E_{52} e $a_3x + b_3y + c_3z = f_3$ é a E_{53}, então S'_5:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = f_1 \Leftrightarrow x = x - \dfrac{1}{a_1}E_{51} \\ E_{52} - \dfrac{a_2}{a_1}E_{51} = 0 \\ E_{53} - \dfrac{a_3}{a_1}E_{51} = 0 \end{cases}$$

Sistema S'_5

Para o novo sistema formado S'_5 na equação E_{52}, isola-se a variável y e substitui na equação E_{53} iremos anular por simetria o a variável **y** na equação E_{53} e ficamos com o sistema na forma triangular. Assim prosseguimos até o sistema ficar escalonado, ou seja, na forma triangular.

Após determinarmos **z**, como o sistema está no *formato triangular*, determinamos **y** e **x**. A *descrição* do método da substituição e eliminação ganha uma regularidade que pode ser descrito de uma maneira mais simples, como *operações entre as linhas (*E_k*)*. Observa-se que na descrição do método temos um problema essencialmente numérico, ou seja, aritmético, pois trabalhamos com os coeficientes.

É possível revelarmos que o *método da substituição e eliminação, do ponto de vista epistemológico é a gênese do método de eliminação Gausseana*, (momento de institucionalização), ou seja, a abstração do método da substituição e eliminação é o método do escalonamento, tornando a prática mais rápida (econômica), com uma diferença, pois no primeiro método vem da prática da manipulação das variáveis, enquanto que no método do escalonamento a ideia é trabalhar com os coeficientes, dando a ideia inicial de *matriz, isto é a tecnologia, segundo a TAD*. Generalizando em uma forma de ver o que acontece com o sistema (institucionalizando):

As operações elementares entre linhas são:

i) $E_k * \alpha E_k$, onde $\alpha \neq 0$

ii) $E_k * E_k + \alpha E_j$, $\alpha \neq 0$ operação entre as linhas onde $E_{\mathbf{k}} \neq E_{\mathbf{j}}$. Adição de um múltiplo escalar da linha **j** à linha **k**.

iii) $E_k \Leftrightarrow E_j$ sejam equivalentes.

iv) Adição de múltiplos escalares em ambas as linhas: $E_k * \beta E_k + \alpha E_j$. Onde $\beta \neq 0$ e $\alpha \neq 0$.

A permutação entre equações, que acontece quando não se tem uma variável, por exemplo, na primeira equação, então se permuta com a segunda equação para poder eliminar esta variável nas demais equações. Mostraremos um exemplo prático que propusemos para o sistema S_6, utilizando o mesmo tipo de tarefas T_1.

T_1: Resolver o sistema linear m x n. (momento do primeiro encontro, segundo a TAD)

t_{11}: Resolver o sistema linear S_6 pelo método da eliminação e substituição, mas agora adicionando e retirando no segundo membro da equação a variável x_n. (**n** representa a variável isolada). Temos um *método avançado da técnica*.

τ_1: Aplicação método da eliminação e substituição.

θ_1: Estudo qualitativo de sistemas lineares.

(Momento exploratório e do trabalho da técnica)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) \end{cases} \qquad (S_6)$$

Da E_1 temos: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$

Então: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 7 = 0$

Isolando $x_1 = (7 - x_2 - x_3 - x_4)$

Obtemos: $x_1 = -(-7 + x_2 + x_3 - x_4)$

$x_1 = \mathbf{x_1} - (\mathbf{x_1} - 7 + x_2 + x_3 + x_4)$

$x_1 = x_1 - E_1$

Substituindo na equação E_2, temos:

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$(x_1 - E_1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8$

$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8 - E_1 = 0$

$E_2 - E_1 = 0$

Substituindo $x_1 = x_1 - E_1$ na E_3, temos: $E_3 - E_1 = 0$

Substituindo $x_1 = x_1 - E_1$ na E_3, temos: $E_4 - E_1 = 0$ da mesma forma.

Voltando ao sistema S_6:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8 & (E_2) = E_2 - E_1 \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 9 & (E_3) = E_3 - E_1 \\ (x_1 - E_1) + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 10 & (E_4) = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Chamaremos as equações deste novo sistema de equação 2, equação 3 e equação 4, respectivamente por E'_2, E'_3 e E'_4, em um sistema que chamaremos de S_6'.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & x_1 = x_1 - (E_1) \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 8 = E_1 & (E_2') = E_2 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 9 = E_1 & (E_3') = E_3 - E_1 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 - 10 = E_1 & (E_4') = E_4 - E_1 \end{cases}$$

Substituindo E_1 no sistema anterior, temos:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & (E_2') \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & \end{cases}$$

Fazendo o mesmo para (E_2'), isto é, $x_2 = 1 - (x_3 + x_4)$ chegamos a $x_2 = x_2 - E_2'$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & \leftrightarrow \quad x_2 = x_2 - E_2' \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2 & E_3' \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 & E_4' \end{cases}$$

Substituindo nas equações E_3' e E_4', resultando em:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \quad \text{conforme os anteriores } x_3 = 1 - x_4 \\ x_3 + 2x_4 = 2 & E_4'' \end{cases}$$

Trabalhando com E_3" assim como já mostramos e substituindo em E_4", resulta no sistema equivalente S_6'', em relação a S_6. Então, a partir de todas as substituições e eliminações que fizemos em S_6, surge o sistema S_6'':

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 & E_1 \\ x_2 + x_3 + x_4 = 1 & E_2' \\ x_3 + x_4 = 1 & E_3'' \\ x_4 = 1 & E_4'' = E_4'' - E_3'' \end{cases} \qquad \text{Sistema } S_6''$$

A solução de S_6'' é simples, pois deixamos o sistema inicial S na forma escalonada. Portanto a solução do sistema S' é $x_4 = 1$, $x_3 = 0$, $x_2 = 0$ e $x_1 = 6$, portanto obtemos como solução do sistema linear $S_6 = \{(6,0,0,1)\}$

Institucionalizando, nesta resolução apresentada começando pelo sistema **S_6** e terminando no **S_6''** é possível se verificar que o método do *escalonamento* ou *Método de Gauss* é a *descrição do método da substituição e eliminação*, deixando de se trabalhar em uma *perspectiva algébrica* para se dar um *tratamento aritmético*, portanto um processo *econômico*, pois se observou que poderíamos trabalhar só com os coeficientes das incógnitas das equações do sistema, ou seja, poderíamos representar ou mesmo *abstrair* os sistemas de equações lineares por uma disposição em formato de linhas e colunas o que veio a ser chamado de *matriz, por Cayley (1858)* na obra [A Memoir on the Theory of Matrices].

Os encaminhamentos tecnológico-teóricos, que permeiam a tarefa t_2 [Resolver o sistema linear S_5 genérico 3x3 (n = 3) e (m = 3) pelo método da eliminação e substituição], estão em conformidade com a TAD. Nesse aspecto, avaliamos a técnica τ_1 como uma alternativa didática que auxiliará a prática do professor de matemática no estudo qualitativo de sistemas lineares.

Para mostrar que o método da substituição e eliminação está embutido nos outros métodos (comparação e adição) vamos partir do tipo de tarefas T_0 (resolver o sistema linear 2x2) e deste solucionar a tarefa t_4: resolver o sistema linear $\mathbf{S_7}$, utilizando os métodos da: (i) *substituição e eliminação,* (ii) da *comparação* e (iii) da *adição*. A técnica τ_4 utiliza os métodos da substituição e eliminação, comparação e adição. O sistema S_7 é o seguinte:

(momento exploratório)

A razão de ser da tarefa seguinte é as resoluções são justificadas pelo método da [*substituição e eliminação].*

T_1: Resolver o sistema linear mxn.

t_{01}: Resolver o sistema linear 2x2 ($\mathbf{S_7}$), utilizando os métodos da *substituição e eliminação* (i), da *comparação* (ii) e da *adição* (iii)

τ_4: aplicação dos métodos da *substituição e eliminação*, da *comparação* e da *adição*

θ_1: estudo qualitativo de sistemas

trabalho da técnica

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases} \qquad (S_7)$$

Pelo método (i) isola-se o x = 4 – y na primeira equação. A ideia é que se tenha um sistema triangular. Substituindo o x = 4 – y na segunda, ficamos com o sistema triangular a resolução do sistema fica simples de ser resolvido, pois como x = 4 – y, e y = 1, então x = 4 – 1 = 3, logo S = {(3,1)}.

Já vimos que o método da eliminação e substituição resolve qualquer sistema, ou seja, tem um longo *alcance* (*alcance da técnica*).

Pelo método (ii): Trabalha-se com as incógnitas. Vamos isolar o y.

$$\begin{cases} x + y = 4 \Rightarrow y = 4 - x \\ x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2 \end{cases}$$

Igualando-se y = y, chegamos a solução S = {(3,1)}.

Pelo método (iii): é uma abstração do método da substituição e eliminação.

$$\begin{cases} x + y = 4 \quad + \\ \underline{x - y = 2} \end{cases}$$
$$2x = 6 \rightarrow \qquad x = 3$$

Consequentemente substituindo x em qualquer uma das equações verifica-se que $y = 1$. Chegamos à solução $S = \{(3,1)\}$.

T_{51}: Resolver um sistema $\mathbf{S_8}$ 3 por 3 utilizando os três métodos. Por conveniência didática tomemos o sistema a seguir.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases} \qquad (S_8)$$

τ_4: utilização dos 3 métodos: *substituição e eliminação* (i), da *comparação* (ii) e da *adição* (iii)

Pelo método **i**, chegamos no sistema triangular, que é simples de ser resolvido.

$$\begin{cases} x = 1 - (y + z) \\ \quad y + z = 0 \\ \qquad z = 1 \end{cases}$$

Obtemos como solução $S = \{(1,-1,1)\}$

Pelo método **ii**: por ser uma prática que não está mais presente nos livros, resolveremos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

Isolamos a variável x.

$$\begin{cases} x = 1 - (y + z) \quad \mathrm{I} \\ x = 2 - (y + 2z) \ \mathrm{II} \\ x = 1 - (2y + 2z) \ \mathrm{III} \end{cases}$$

I = II, temos: $1 - (y + z) = 2 - (y + 2z)$

I = III, temos: $1 - (y + z) = 1 - (2y + 2z)$, então:

$$\begin{cases} x = 1 - (y + z) \\ 1 - (y + z) = 2 - (y + 2z) \\ 1 - (y + z) = 2 - (y + 2z) \end{cases}$$

Reduzindo-se os termos semelhantes, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \qquad z = 1 \\ \quad y + z = 0 \end{cases}$$ Onde sua solução é $S = \{(1,-1,1)\}$

Podemos observar na resolução pelo método **ii**, que é a mesma coisa que o método da eliminação e substituição.

Pelo método **iii**, tem-se:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + 2z = 2 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y - z = -1 & \text{I} \\ x + y + 2z = 2 & \text{II} \\ x + 2y + 2z = 1 & \text{III} \end{cases}$$

Ao somarmos a I com a II e a I com a III, temos:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ \quad z = 1 \\ y + z = 0. \text{ Onde sua solução é } S = \{(1,-1,1)\} \end{cases}$$

Surge a questão *Q': Mas o que estes métodos têm em comum?*

Similares a *tecnologia* que as justifica (θ_1) é o *método da eliminação e substituição*, mostrando que as questões da OM estão associadas, são confiáveis e estão suficientemente trabalhadas. Dispomos de diferentes técnicas para cada tipos de tarefas, com isto estamos interpretando o funcionamento e o resultado da aplicação das técnicas.

O método da eliminação e substituição se trabalha com as variáveis e o da adição se trabalha com os coeficientes. Podemos até dizer que a gênese destes métodos está no método da eliminação e substituição. Estes três métodos, com certeza, foram desenvolvidos por uma necessidade.

O método da comparação pode ter surgido por uma necessidade da atividade matemática de matemáticos ou uma necessidade do ensino da matemática. A *ecologia do saber* deste método pode ter desdobramentos, pois surge na escola básica em um dado momento, mas nos dias de hoje não está mais presente no currículo do ensino básico, enquanto poderíamos trabalhar com este método para se verificar o ponto de interseção entre duas retas, ou não, se forem paralelas, podemos trabalhar com equações não lineares, como a interseção de uma parábola com uma reta, propiciando o estudo de equações irracionais e remete ao estudo da teoria do ponto fixo.

A T_5 a seguir, mostra diferentes técnicas associadas a um questionamento tecnológico, onde há critérios que as difere, mas que estão articuladas com θ_1.

T_5: Resolver o sistema pelo método da adição (iii) é uma abstração do método da substituição e eliminação.

t_5: Resolver o sistema genérico S_9 a seguir que o método da adição (iii) é uma abstração do método da substituição e eliminação.

$$(S_9)\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

τ_5: método da adição.

θ_1: estudo qualitativo de sistemas lineares

A técnica se dá em aplicar o método da adição. Então, multiplicando a primeira equação por $-a_2$ e a segunda equação por $+a_1$, temos:

$$\begin{cases} -a_2a_1x + (-a_2)b_1y + (-a_2)c_1z = -a_2d_1 \\ a_1a_2x + a_1b_2y + a_1c_2z = a_1d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Somando a primeira com a segunda equação e colocando o resultado na segunda equação, temos, deixando a primeira na forma inicial:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ a_3 + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Multiplicamos a primeira equação por $-a_3$ e a terceira por a_1, e o somarmos a primeira com a terceira equação, colocando o resultado na terceira equação, temos, deixando a primeira na forma inicial. Observe que manipulamos os coeficientes das equações.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ (-a_3b_1 + a_1b_3)y + (-a_3c_1 + a_1c_3)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \end{cases}$$

Multiplicando-se a segunda equação por $-(-a_3b_1 + a_1b_3)$ e a terceira por $(-a_2b_1 + a_1b_2)$ teremos:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ -(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2b_1 + a_1b_2)y - [(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2c_1 + a_1c_2)]z = -[(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2d_1 + a_1d_2)] \\ (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3b_1 + a_1b_3)y + (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3c_1 + a_1c_3)z = (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_2d_1 + a_1d_2) \end{cases}$$

Ao somarmos a segunda equação com a terceira resulta em:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ (-a_2b_1 + a_1b_2)y + (-a_2c_1 + a_1c_2)z = -a_2d_1 + a_1d_2 \\ \{(-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_3c_1 + a_1c_3) - [(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2c_1 + a_1c_2)]\}z = (-a_2b_1 + a_1b_2).(-a_2d_1 + \\ a_1d_2) - [(-a_3b_1 + a_1b_3).(-a_2d_1 + a_1d_2)] \end{cases}$$

(Institucionalizando). Ao deixarmos o sistema na forma *triangular*, observa-se que neste método da adição (iii), que há uma *transferência* do *método algébrico para o aritmético*, pois a partir do exemplo dado, tem-se a clareza que este método se opera apenas com os *coeficientes*, portanto estamos diante de um problema aritmético. Observemos se trabalhamos com os coeficientes, o que permitiu representar os sistemas na forma de *matriz*.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Vamos operar da mesma forma com as matrizes, ou seja, multiplicando a primeira linha por $-a_2$ e a segunda linha por $+a_1$, temos:

$$\begin{pmatrix} -a_2a_1 & -a_2b_1 & -a_2c_1 & -a_2d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_1a_3 & a_1b_3 & a_1c_3 & a_1d_3 \end{pmatrix}$$

Ao somarmos a primeira com a segunda linha e colocando o resultado na segunda equação, temos, deixando a primeira na forma inicial:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & (-a_2b_1 + a_1b_2) & (-a_2c_1 + a_1c_2) & -a_2d_1 + a_1d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

Multiplicamos a primeira linha por $-a_3$ e a terceira por a_1 e ao somarmos a primeira com a terceira linha da matriz e colocando o resultado na terceira equação, temos, deixando a primeira na forma inicial. Observe que manipulamos os coeficientes das equações.

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & (-a_2b_1 + a_1b_2) & (-a_2c_1 + a_1c_2) & -a_2d_1 + a_1d_2 \\ 0 & (-a_3b_1 + a_1b_3) & (-a_3c_1 + a_1c_3) & -a_3d_1 + a_1d_3 \end{pmatrix}$$

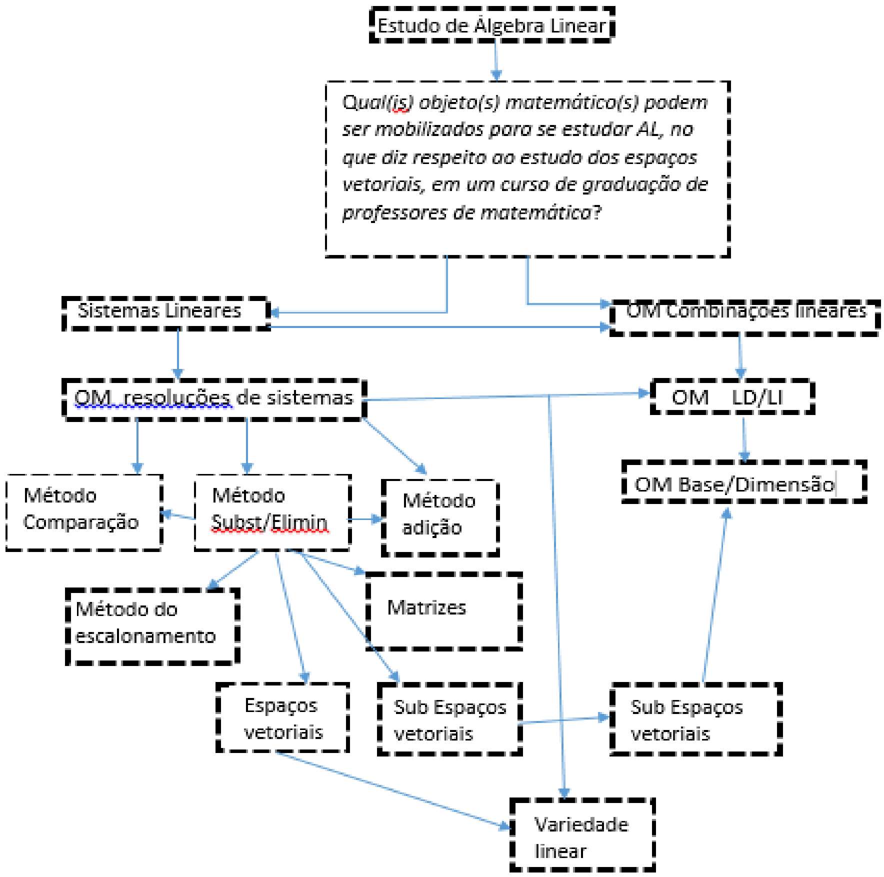
Multiplicando-se a segunda linha por $-(-a_3b_1 + a_1b_3)$ e a terceira por $(-a_2b_1 + a_1b_2)$ e somarmos a segunda equação com a terceira resulta em:

$$\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\
0 & (-a_2b_1+a_1b_2) & (-a_2c_1+a_1c_2) & -a_2d_1+a_1d_2 \\
0 & 0 & \begin{matrix} -(-a_3b_1+a_1b_3)(-a_2c_1+a_1c_2)+ \\ (-a_2b_1+a_1b_2)(-a_3c_1+a_1c_3) \end{matrix} & \begin{matrix} -(-a_3b_1+a_1b_3)(-a_2d_1+a_1d_2) \\ (-a_2b_1+a_1b_2)(-a_3d_1+a_1d_3) \end{matrix}
\end{pmatrix}$$

Podemos notar que essa prática com sistemas de equações, podemos fazer com as matrizes, assim podemos assumir, conforme Cayley (1858) que *as matrizes são abstrações de sistemas lineares*.

Nosso modelo epistemológico foi problematizado, mas se faz necessário considerar que os saberes matemáticos, objeto de ensino nas instituições de ensino superior, não estão prontos e acabados. Apresentamos de forma esquemática todo nosso MER, mas neste artigo é trabalhado uma parte do mesmo (Figura 1).

Figura 1 – Esquema de conexões das OMD.



Fonte: Autores

Finalmente, nosso modelo apresenta traços fortes da proposta de Chevallard (1999) e Delgado (2006) quando trata do MER e do problema da desarticulação entre objetos matemáticos, pois considera o MER fundamental para articular as tarefas, pois há a intenção de tornar o *saber matemático* em *saber ensinado*. A ideia do MER foi minorar as limitações das atividades matemáticas no que diz respeito ao estudo de AL, e por meio do MER provocar articulações por intermédio da presença da tecnologia que justifica a técnica, pois foram construídas outras praxeologias matemáticas, propiciado por meio de tarefas o que possibilitou a construção do *saber* de uma forma mais *econômica*.

5.3 Considerações Finais

Nestas considerações iremos retomar aspectos relevantes da pesquisa no sentido de fazermos uma reflexão a respeito da fundamentação teórica, da proposta do MER apresentado no artigo e de suas contribuições para a área da Educação Matemática, assim como o objetivo geral, além de termos contribuído para uma melhor compreensão de futuros professores sobre os objetos da Álgebra Linear.

A potencialidade de nossa proposta de modelo, que para reformulação de fenômenos transpositivos sobre o ensino de alguns objetos da disciplina AL, nos revelou a possibilidade de sustentar um desenho e experimentar alguns itinerários didáticos a partir de sistemas de tarefas, desencadeadas pelo gênero de tarefas estudar qualitativamente sistemas lineares. Nossa investigação em didática nos fez criar um modelo, em que usamos objetos do ensino médio para desenvolver o estudo de AL e que não estivéssemos assujeitado a instituições dominantes como os livros didáticos; mas a fontes históricas nos deram bons indícios de como (re) construir essa OMD.

Em nosso modelo as práticas com os sistemas lineares fizeram emergir o estudo das matrizes, os operadores elementares tiveram sua gênese no método da substituição e eliminação, que por sinal é um método potente, com amplo alcance, é seguro e eficaz, pois resolve qualquer sistema.

A ideia do modelo foi pensada para um curso de AL para graduandos em matemática, mas com articulações de objetos do ensino básico, como os sistemas de equações lineares, mas com impacto direto na formação de professores, já que o estudo qualitativo não é abordado naquele nível de ensino, e por meio de um sistema de tarefas engendramos às práticas, revelando a transacionalidade desse objeto.

A tecnologia, estudo qualitativo de sistemas, perpassa pelo gênero de tarefa: estudar sistemas lineares. Esta tecnologia apresentada no modelo foi fundamental e justifica o estudo de objetos da AL como, por exemplo: as matrizes. No modelo é possível se observar que tudo perpassa por sistemas e que o método da substituição e eliminação justifica os outros dos métodos apresentados. Sendo assim estamos diante de OMD Regional, pois nossas tarefas estão associadas a um componente tecnológico e houve a presença de diferentes técnicas para cada tipo de tarefas com a possibilidade de discernir critérios entre elas.

A teoria, base epistemológica desta pesquisa, a TAD visa descrever as práticas humanas que se desenvolvem em diversas instituições em termos, relativamente, genéricos com o intuito de se evitar introduzir distinções culturais pouco fundamentadas. Na TAD se postula que toda a atividade humana pode ser descrita em termos de praxeologias. No caso de a atividade ser de estudo, então esta praxeologia pode ser denominada de estudo ou didática.

Nossa OMD é utilizada quando uma pessoa estuda uma organização matemática com fins didáticos. Nossa OM preconiza um sistema de tarefas, que foi elaborada pelos autores desse trabalho. Apresentamos tipo de tarefas, tarefas e técnicas, articuladas entre si para que os professores e alunos a utilizem de maneira efetiva. Caso consideremos o professor como diretor de estudo e o aluno como estudante, então podemos diferenciar a praxeologia didática da qual o professor se utiliza de praxeologia docente e a do aluno como praxeologia discente, havendo assim uma cooperação tanto do professor quanto do aluno.

Em nosso MER o marco tecnológico-teórico que engloba todas as técnicas necessárias para o enfrentamento do novo conjunto de tarefas, onde as técnicas utilizadas são confiáveis, econômicas, são pertinentes, já que o discurso tecnológico ajuda na explicação das técnicas, implicando em uma tecnologia inteligível para outras indivíduos da instituição, permitindo que a técnica habite institucionalmente.

O bloco do logos presente no MER está contemplado no terceiro postulado antropológico, o qual se refere à ecologia das tarefas e das técnicas, isto é, das condições e das restrições que permitem ou não a produção e a utilização nas instituições.

Referências

BARROS, P. M. O ensino e a aprendizagem de conceitos de álgebra linear no ensino superior politécnico. Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Portugal. 2018. Disponível em http://repositorium.sdum.uminho.pt/handle/1822/56688. Acesso em: 15 jul. 2023.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Las práticas docentes del professor de matemáticas. XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques. Versión provisional. Barcelona. 2001.

CARLSON, N. D. Teaching linear algebra: Must the fog always roll in? The College Mathematics Journal, v. 24, n. 1, 1993. p. 29-40.

Celestino (2000) relata que as pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da disciplina Álgebra Linear na década de 1990, no Brasil, eram tímidas. Tal problemática fora estudada nas pesquisas internacionais de Dorier (1990, 2000, 2002), Dorier et al. (1999), Laugwitz (1974), Carlson (1993) e Uhlig (2015). No cenário nacional temos Padredi (2003), Karrer (2006, 2009), e Prado (2010).

CELESTINO, M. R. Ensino e aprendizagem de álgebra linear: as pesquisas brasileiras na década de 90. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000. Disponível em: http://www.sapientia.pucsp.br/tde_arquivos/3/TDE-2007-0622T11:44:09Z3609/ Publico/dissertacaomarcosrobertocelestino.pdf. Acesso em: 20 abr. 2015.

CHEVALLARD, Y. La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné. Grenoble: La Pensée Sauvage. [Traducción en español de Claudia Gilman (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saberenseñado. Buenos Aires: Aique]. 1985.

CHEVALLARD, Y. La Transposition Didactique: Du Savoir Savant au Savoir Ensigné. Grenoble, La pensée Sauvage. 1991a.

CHEVALLARD, Y. La notion de PEP: problèmes et avancées. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161. 2009a. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/ article.php3?id_article= 155>. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009c. Disponível em: <http://www.ardm. eu/book/export/html/676>. Acesso em: 27 jun. 2015.

CHEVALLARD, Y. Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counterparadigm. Plenary talk at 12th International Congress on Mathematical Education, Seoul, Korea, 2012.

DORIER, J. L. Analysis historique de l'emergence des concepts élémentaires d'algëbre linéaire. Cahier Didirem n. 7, IREM de Paris 7, 1990.

DORIER, J. L. On the teaching of Linear Algebra. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000, p. 151-175.

DORIER, J. L.; ROBERT, A; ROBINET, J.; ROGALSHI, M. Teaching and learning linear álgebra In first year of french Science University. Actas del I European Research in Mathematics Education, France: Paris. 1999, p. 103-112.

KARRER, M. Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo. 2006.

KARRER, M. Transformações Lineares: A problemática das tarefas que têm o Gráfico como registro de partida. In: IX ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática. 2009. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/Comunicação Cientifica.html>. Acesso em: 30 mar. 2014.

LAUGWITZ, D. Motivation and Linear Algebra. Educational Studies in Mathematics 5. Dordrecht, Holland, 1974. p. 243-254.

MENDES, I. A. História da matemática no ensino: entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisa. São Paulo: Editora Livraria da Física., 2015.

UHLIG, F. A new unified, balanced, and conceptual approach to teaching Linear Algebra, Department of Mathematics, Auburn University, Auburn, USA. Disponível em: <www.auburn.edu/~uhligfd/TLA/download/tlateach.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2019.

6- Um Modelo Epistemológico de Referência para o ensino de frações: introdução à adição e subtração de frações

Raquel Soares do Rêgo Ferreira
Renato Borges Guerra

Introdução

Falar de frações não é novidade e tampouco está esgotado quando se trata de ensino e aprendizagem, pois ainda há grande interesse na educação matemática em estudar para ensinar esse objeto dito culturalmente matemático. Embora seja apresentada nos livros didáticos como um ente matemático abstrato denominado de números racionais, ela continua viva nas práticas da matemática escolar por meio de hipotéticas situações envolvendo supostas práticas sociais com objetos concretos do mundo real.

As frações são numerais e, como tais, estão associadas às práticas sociais concretas, em geral, de quantificação de grandezas, enquanto os números racionais são entes matemáticos abstratos e, como tais, independem de qualquer prática social com objetos concretos de nosso mundo sensível, mas que são necessários para o desenvolvimento da matemática enquanto campo de conhecimento acadêmico.

Daí a importância do estudo de frações na educação básica, por sua relação direta com o mundo sensível, mesmo quando em hipótese, por meio de diferentes situações, das cotidianas até as mais complexas, como por exemplo, as frações observadas em uma receita culinária ou em tratamentos de dados sobre a distribuição demográfica de um país, além do seu caráter inequivocamente utilitário em diferentes atividades humanas e, entre elas, o estudo da fração observada em as outras disciplinas desde a escola básica até a escola superior.

A importância do conhecimento dos numerais fracionários para o conhecimento da realidade do mundo no qual vivemos é inegável, como também é inegável as relações das pessoas com frações, mesmo aquelas com formação superior, uma vez que não se mostram nada amigáveis, como apontam Campos e Rodrigues (2007, p. 70), "[...] a prática de sala de aula, entretanto, revela que mesmo alunos de nível médio ou superior apresentam dificuldades no trato com as frações."

As dificuldades enfrentadas com o uso das frações têm demandado muitas pesquisas na área da educação matemática, em particular sobre o ensino e aprendizagem de frações, em particular os trabalhos Fandiño Pinilla (2007), Guerra e Silva (2008), Kichow (2009), Andrade (2012), Ferreira (2014), dentre outros.

Como formadores de professores, observamos dificuldades dos professores em formação inicial frente às atividades que exigiam pensar ou usar frações. Nessas situações de tais enfrentamentos, eles demonstravam resistência para iniciar as tarefas, principalmente quando era exigido recorrer às operações com frações. Alegavam que não "entendiam" por não encontrar respostas para seus questionamentos do tipo Q_1: "Por que achamos o MMC (mínimo múltiplo comum) entre $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$? Ou ainda Q_2: "O que significa reduzir ao mesmo denominador?"

Essas dificuldades, em geral, não são "tratadas" nos estudos da matemática para a formação inicial de professores para as séries iniciais, por ser assumido pela instituição formadora que o objeto (conteúdo) fração já foi suficientemente estudado por eles em outras posições de seus percursos de estudos escolares anteriores e, por isso, lhes seriam suficientemente naturais.

Nesse sentido, podemos "pensar" inicialmente que as instituições formadoras seguem a recomendação de Pinilla (2007, p. 5) sobre o ensino de frações e números racionais, mais precisamente, que deve haver um tempo para cada estudo respeitando os níveis de ensino, tendo em conta que não é possível ensinar "tudo" de frações. Portanto, é necessário construir uma *Transposição Didática* (CHEVALLARD, 1991) tornando o ensino acessível aos alunos frente à seguinte linha de desenvolvimento: frações no primário e no ensino secundário, números decimais no ensino primário e no secundário e, finalmente, os racionais na escola secundária superior ou universidade.

No entanto, tal recomendação parece estar longe das formações de professores, já que essas instituições não se dão conta que a compreensão *das práticas* com frações é construída em situações e, como tais, não se confundem com a compreensão *sobre as* *práticas*, isto é, a noção de fração enquanto numeral, que relaciona objetos no mundo real, como é explorado no ensino dos anos iniciais da escola básica, não se confunde com a compreensão sobre a noção de fração enquanto número racional que habita o mundo da matemática acadêmica. Essa, de fato, nunca está presente na escola básica. Neste sentido, Chevallard (2005, p.171) assim alerta.

> Mas ocorre que entre um saber e uma prática há uma distância nunca inteiramente abolida. (De modo que existe sempre uma distância entre a escola de formação profissional e a profissão: a aprendizagem no local de trabalho, a aculturação profissional, por mais que a formação universitária tente reduzir seu papel, não deixam de ser necessárias).

Assim, o conhecimento sobre as práticas com fração se completa ao conhecer essas práticas. Nesse sentido, a ausência de uma pode levar à falsa compreensão da outra, pelo menos em completude.

Essa problemática parece ignorada pelos formadores e isso fica mais claro quando os professores em formação são postos, enquanto profissionais, frente a uma turma de alunos dos anos iniciais de uma escola básica para ensinarem fração.

Nesse caso, um problema didático P_0 (GASCÓN, 2011) se evidencia e pode ser anunciado na forma do seguinte questionamento P_0: “O que ensinar e como ensinar adição e subtração de frações para os alunos dos anos iniciais da escola básica?”. Uma resposta para esse questionamento parece se encontrar pronta nos manuais escolares para os anos iniciais da escola básica e legitimados pelos órgãos de controle educacional da sociedade.

No entanto, essas respostas prontas não contemplam a problemática da completude ou da integração do conhecimento sobre a prática com o conhecimento da prática, pois não atendem o objetivo fundamental para o ensino, que é a aprendizagem, considerando as dificuldades manifestadas por muitos professores, principalmente os professores dos anos iniciais da escola básica.

É nesse contexto que consideramos a problemática da formação de professores para os anos iniciais relativa às dificuldades frente ao saber a ser ensinado e aprendido, nesse caso, a adição e a subtração de frações. Nessa linha, o nosso objetivo é propor uma resposta, mesmo que parcial, a partir de conhecimentos disponíveis na instituição escolar básica, principalmente os conhecimentos presentes nos equipamentos praxeológicos dos professores em formação.

O problema didático P_0 emerge da compreensão sobre o ensino e a aprendizagem da matemática à luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Esse recurso teórico tem como um de seus objetos de interesses, os saberes ensinados e/ou aprendidos no interior de uma ou mais instituições frente aos condicionamentos, nem sempre claros, a que estão submetidos pela escola, pelos produtores desses saberes, pela pedagogia, pela sociedade e, não menos importante, pela cultura na qual estão inseridos, todos sob o fator condicionante da humanidade.

Nesse sentido, frente à TAD, recorremos aos aspectos da história e da epistemologia do uso de frações como conhecimentos indispensáveis. Primeiro, para atender aos condicionamentos da pedagogia que recomenda o uso da “história da matemática” no ensino. Segundo, para atender à sociedade que clama o uso dos saberes aprendidos pelos professores nas instituições formadoras do ensino. Nesse caso, o que defende a teoria da transposição didática (TTD) de Chevallard (2005) sobre a manipulação de saber para o ensino é manter uma proximidade entre e com a história e epistemologia desse saber.

Essa compreensão pode permitir construir uma resposta, mesmo que parcial, para o problema P_0, por meio do dispositivo metodológico denominado de Percurso de Estudo e Pesquisa para a Formação de Professores (PEP-FP) relativa a um ou mais saberes da profissão docente.

O PEP-FP é um percurso de estudos e pesquisas (PEP) (CHEVALLARD, 2009) orientado por um Modelo Epistemológico de Referência (MER) (GASCÓN, 2011) na qual professores em formação o contrastam com o modelo epistemológico vigente na escola, relativo a um ou mais saberes que são ali ensinados.

É submerso nesse campo teórico que compreendamos que a problemática de formação profissional relativa ao enfrentamento do problema didático P_0 admite uma resposta, embora nem sempre definitiva a qual, inicialmente, reside na construção de um MER.

A construção de um MER é justificada por ele se constituir em um dispositivo didático indispensável para o formador, pois não somente permite formular problemas didáticos, como também subsidia os professores em formação a construir e/ou a reconstruir organizações matemáticas (OM) para o saber ser ensinado. Essa afirmação se sustenta de acordo com os estudos de Gascón (2011, p.208):

> Na formulação de qualquer problema didático, o didata sempre utiliza, embora implicitamente, uma descrição, uma interpretação — isto é, um modelo epistemológico do âmbito matemático que está em jogo. A TAD destaca de princípio a necessidade de *explicitar* esse modelo e utilizá-lo como *referência* para analisar os fatos didático–matemáticos (GASCÓN, 1993, 1994, 1998, 1999a, 2001a). Atualmente se chama *modelo epistemológico de referência* (MER) e tem carácter *sempre provisório.* Com

> base no MER, o didata pode *desconstruir* e *reconstruir* as praxeologias cuja difusão intra-institucional e interinstitucional pretende analisar.

É no fazer colaborativo dos professores em formação para desconstruções e reconstruções de OM que um PEP-FP se desenvolve sob a orientação de um MER, criando condições pedagógicas favoráveis que encaminhem seus agentes a formularem questões e respostas. As validações se dão pela comunidade em formação constituída nesse percurso de estudo do saber considerado, que em nosso caso, são os saberes relativos à problemática profissional P_0.

Aqui, nosso interesse se restringe a essa fase inicial da construção de respostas, a fase ainda exclusiva dos professores formadores, que é a fase de construção de um MER sobre adição e subtração de frações que permita encaminhar a formação por meio desse PEP-FP.

Considerando que o saber fração não é tomado como propriamente um saber pela academia matemática, mas tão somente como um registro de representação de seus números racionais, recorremos aqui à noção mais geral do MER referida por BOSCH (2022, p. 101) nos seguintes termos:

> Uma vez que a TAD concebe todo saber como uma organização praxeológica, podemos chamá-los de *modelos praxeológicos de referências*. Esta última expressão permite mais generalidade quando se abordam sistemas didáticos em torno de "saberes" que não são considerados como tais, como exemplo, aprender a amarrar os nós dos sapatos, organizar uma excursão nas montanhas ou trocar cordas de uma guitarra elétrica.

Essa compreensão considera que um MER pode assumir a forma de uma organização de praxeologias didático-matemática (OPDM) e, por isso, chamada de Modelo Praxeológico de Referência (MPR) de modo que o PEP possa ser visto "como uma versão didática experimental do MPR" (BOSCH, 2022, p. 107).

Nessa linha, encaminhamos a seguir os recursos teóricos que sustentam a construção de um MPR, dentre outros possíveis, relativo ao problema profissional P_0, que pode ser visto como uma resposta inicial do formador e como condição indispensável para a realização do PEP-FP associado aos professores em formação.

6.1 A organização praxelógica didática-matemática (OPDM) local como MPR

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) assume que toda forma de conhecimento pode ser interpretada por meio das atividades humanas desenvolvidas no interior de instituições e que essas atividades podem ser modeladas por organizações praxeológicas, cuja forma específica ou pontual é chamada de praxeologia, decorrente das palavras gregas: práxis e logos.

A *práxis é o saber fazer* que se destaca nessa teoria por se referir a um tipo de ação, geralmente visível, de enfrentamento de uma tarefa na realização de uma atividade, ou seja, é a técnica que se recorre para enfrentar essa tarefa que, por sua vez, pode relacionar alguns tipos de questões problemáticas e com isso, demandar estudos de determinadas técnicas que respondam a essas questões. Para isso, é indispensável o conhecimento sobre a práxis, o *logos, o qual designa o saber sobre a práxis*, no sentido de justificar, explicar ou produzir a práxis.

De acordo com Chevallard (2018), a noção de praxeologia permite buscar uma compreensão de como o saber é construído e transmitido por meio de práticas específicas e por diferentes sujeitos em contextos específicos, seguindo o princípio de que o saber não está pronto e acabado e tampouco absoluto, mas que é uma construção coletiva que é moldada e modificada por interações sociais.

A noção de praxeologia também permite analisar as interações entre os diferentes sujeitos e instituições envolvidas na utilização, na produção, no ensino e, sobretudo, na transposição didática dos saberes. Essa última manipulação de saberes está estreitamente ligada à manipulação de saberes para o ensino, embora com ele não se confunda.

Aqui, vamos nos deter na esfera dos saberes ensinados e, portanto, de saberes transpostos que são manipulados segundo as intenções didáticas do professor, sob condições impostas pela cultura matemática escolar frente à epistemologia e à história do saber a ser ensinado, bem como, das condições impostas pela pedagogia.

Isso está materializado, inicialmente, por meio de organizações de praxeologias que relacionam objetos matemáticos para atender um propósito de ensino, chamadas de *Organizações Praxeológicas Matemáticas (OPM)* que servem para delimitar as maneiras como a matemática está estruturada e organizada e que, posteriormente, serão materializadas em *Organizações Praxeológicas Didáticas (OPD)*, referidas por Chevallard (1999, p. 229) como as formas dadas à matemática no ensino, apreendida e que está diretamente relacionada às práticas e aos métodos, aos materiais e às estratégias utilizadas pelos professores e pelos alunos no processo de estudo.

Segundo Chevallard (1999), uma OPM pode ser vista como um conjunto de tipos de tarefas, de técnicas, de tecnologias etc., mobilizadas para o estudo concreto, como o estudo de frações e de curso de formação de professores, por exemplo - em uma instituição concreta. Por outro lado, uma OPD é uma versão didática da OPM, o que inclui a pedagogia nela considerada.

É importante destacar que o apreendido se consolida com ajuda do ensinado e, portanto, já contou com ajuda de uma OPD, vista como uma interpretação que o professor faz da OPM, mesmo no caso de o professor ser também o aprendiz.

Em particular, o professor pode tomar suas OPD's derivadas de uma mesma OPM e as usa para subsidiar construções de novas OPM e vice-versa, de modo que se pode considerar o par OPM e OPD como faces de uma mesma moeda e, então, chamá-las de Organizações Praxeológicas Didático-Matemáticas (OPDM).

As derivações de novas OPM podem ser obtidas pelos professores por diferentes interesses, entre eles, para entender como a inclusão ou retirada de um ou mais tipos de tarefas em interações com outras tarefas nessa organização, afeta a aprendizagem de uma OPDM associada.

Esse é o caso, por exemplo, de o professor, quando em momento único de transposição didática, debruça-se sobre as OPM reconhecendo o saber a ser ensinado e, assim, começa a preparar sua aula em conversas com alunos hipotéticos. Ele então engendra uma dinâmica de alterações e recombinações praxeológicas, com interações entre tipos de tarefas que, hipoteticamente, podem assegurar o sentido do estudo desse saber.

Esses tipos de empirias para "facilitar" a aprendizagem dos alunos está no coração da profissão docente e demandam que o professor realize verdadeiras dinâmicas praxeológicas, de alterações e recombinações (CHEVALLARD, 2018), para a construção de novos tipos de organizações de tarefas, inclusive com a criação de tarefas inéditas.

As dinâmicas praxeológicas demonstram que um saber a ser ensinado pode ser interpretado, se assim posso dizer, por meio de diferentes OPDM. Talvez por isso, mas não somente, Chevallard (2018, p.35) afirme que as alterações e recombinações praxeológicas sejam um fenômeno no coração da história social das praxeologías.

No entanto, as construções de uma OPDM devem sempre considerar o alcance pretendido com o ensino dessa organização e, nesse caso, torna-se indispensável considerar as de maior alcance como as do tipo referido por Chevallard (1999) chamadas de Organizações Praxeológicas Locais (OPL).

As OPL são resultantes de reuniões de várias organizações praxeológicas específicas que são constituídas de um só tipo de tarefas, mas que ao serem sincronizadas por um mesmo saber tecnológico, tornam-se um estruturado harmônico de diferentes tipos de tarefas. Esse saber tecnológico permite justificar, explicar e relacionar entre si as técnicas usadas nessa estrutura de tarefas.

Tomamos uma noção de fração como o saber tecnológico para encaminhar uma OPDM local, considerando aspectos históricos-epistemológicos, desde a antiguidade sobre uso de frações, em particular, os que concebem a fração como um conhecimento que somente se manifesta adequadamente em determinados tipos de situações por se aproximarem com as OMD adotadas pela escola básica que estão em consonância com o PCN e ou BNCC. Portanto, atendendo diretamente a condições impostas pela disciplina, escola, pedagogia e sociedade.

Em nossa interpretação, as frações eram um conhecimento pré-construído que, como tal, aprendia-se em situação socialmente compartilhada na realização de certas atividades humanas e, sendo assim, sem necessariamente ser tomada como objeto de estudo ou ensino.

No entanto, as frações foram elevadas ao "status" de conhecimento a ser aprendido pelo ensino ainda sob a condição de dependerem de tipos de situações, como assim revelam os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997) que traz em seu bojo as recomendações sobre o ensino de frações para alunos a partir do 4º ano, destacando que o ensino deve contemplar as seguintes metas:

- Explorar o conceito de fração nas situações que está implícita a relação parte-todo, ou seja, o aluno deve perceber que um todo pode ser dividido em partes;
- Diferenciar a fração parte-todo da noção de fração quociente, exemplo: quando devemos dividir o numerador pelo denominador, consolidando a ideia de indeterminação da divisão quando o denominador for zero;
- Identificar a fração como razão ou comparativo entre duas grandezas, como em dados de censos: 7 a cada 10 habitantes são mulheres;
- Interpretar o significado de fração como operador, em que ela desempenha o papel de transformação, como por exemplo: que número devemos multiplicar por 5 para obter 4?

Deixando ao lado as críticas possíveis quanto as relações entre a noção de fração dependente de situações, observamos que entre estas, as do tipo parte-todo se faz presente diretamente e/ou indiretamente em todos as demais postas no PCN.

Assim, para construir uma OPDM local como MPR para o ensino de operações de frações, assumimos previamente a noção "parte-todo" de fração, por atender a condição sócio pedagógica imposta de considerar supostas situações que envolvam supostos objetos concretos divididos em partes iguais em que se toma algumas dessas partes como sendo frações desses objetos.

Essa noção intuitiva de fração foi realmente explorada em situações práticas em diferentes momentos históricos do desenvolvimento social do conhecimento humano e ainda está presente nos livros didáticos atuais. Essas organizações específicas passam a ser consideradas como parte da OPDM local a ser construída. De outro modo, a organização praxeológica sobre as operações de adição e de subtração de frações são consideradas como extensão dessas organizações.

Nesse contexto, de situação parte-todo que, em geral, supõe a manipulação de materiais concretos, ratificamos a recorrência à história e à epistemologia dos números como suporte teórico indispensável para a construção da OPDM local, considerando a riqueza de práticas sociais em situações concretas com uso de frações que reportam.

Nessa linha, dentre diferentes trabalhos nesse campo de investigações, consideramos útil o trabalho de Simon Stevin (1585) que assim é posto por Waldegg (1996, p.1):

> Na história da matemática, Simon Stevin (1548-1620) é reconhecido como o introdutor, na Europa Ocidental, da notação decimal para os números fracionários. No entanto, a fundamentação teórica que justifica a utilização da referida notação, e que Stevin pretendia dar em termos de um sistema axiomático-dedutivo, ainda não foi suficientemente valorizada. A abordagem teórica de Stevin deu origem a uma ruptura com a concepção grega que possibilitou o acesso a um conceito moderno de número associado tanto a grandezas discretas como a grandezas contínuas.

A noção de frações que recorremos, parte-todo, não se restringe a frações decimais e está associada a grandezas discretas, mesmo que a grandeza seja contínua. No entanto, o modo como Stevin trata os números em ruptura com a Matemática Grega, desperta outro interesse por ser útil para o propósito da construção do MPR, pois se assenta na relação entre "números" e manipulação de grandezas.

Para Waldegg (1996, p.9), essa ruptura acontece a partir das experiências cotidianas e profissionais de Stevin (1585), considerando que ele encaminhou a noção de números como uma extensão da prática generalizada de medir e, com isso, as práticas matemáticas em conformidade com as necessidades passaram a determinar o tipo de matemática que se devia considerar, a matemática pura ou a matemática aplicada, como referiam os gregos, distinção essa que nunca foi abolida até os dias de hoje.

Para Jakob Klein (1968, p. 1861), a construção do número no trabalho de Stevin se diferencia da construção da matemática grega, do seguinte modo:

> O conceito de número se constrói a partir do reconhecimento de um isomorfismo operatório entre número e quantidade, isto é, do reconhecimento de que se pode operar com os números da mesma maneira que se manipulam as quantidades em geral (contínuas ou discretas) dentro de sua "atividade prática".

A respeito desse pensar, a natureza discreta ou contínua é da quantidade, não dos números. Esses expressam as quantidades e se operam com eles como se operam com essas quantidades. Isso é um aspecto ainda vivo nos dias de hoje nas práticas sociais de quantificação de grandezas e, por isso, revela um dado importante para a construção de um possível MPR que considera a vigilância epistemológica do saber a ser ensinado, no sentido de que as OPDM ensinadas e aprendidas se mantenham próximas do saber prático sem se distanciar muito do saber teórico, mesmo que se recorra à técnica didática de operar com as quantidades de materiais concretos, próprio das atividades escolares dos anos iniciais da escola básica, a fim de dar sentido às tarefas de operações com frações.

Com a desvinculação da noção de número da natureza da quantidade, a definição dada por Stevin (1585, p.1) a qual afirma que "o número é aquilo pelo qual se expressa [se explica] a quantidade de cada coisa" exigiu uma complementação que é a noção de número aritmético, o qual é definido por Stevin (Op. cit. Def: 4, p. 31) como "o número que se expressa sem adjetivo de magnitude".

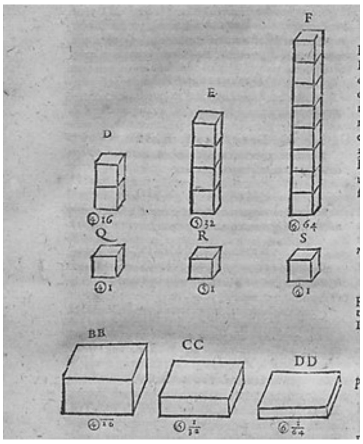
Isso permite pensar "que o número não é uma quantidade descontínua" (STEVIN, Op. cit. p 2, tradução nossa) e que é "contínuo" no sentido aristotélico, podendo ser dividido indefinidamente sem perda de sua essência, embora possa assumir a característica de contínuo ou discreto da "coisa" (sua quantidade) que se está quantificando, por exemplo: ao quantificar cadeiras, 1 cadeira é um número discreto, mas se está quantificando distâncias, 1 quilômetro é contínuo.

Em definitivo, para Stevin, a essência do número não está na grandeza que se quantifica, como prega matemática grega, mas nas operações. De outro modo, como refere Waldegg (1996, p.13).

> O número expressa a quantidade de cada coisa. As operações aritméticas, como relações e transformações de números, expressam as ações e transformações que se fazem com as coisas (enquanto quantificáveis). Então, são as ações que se realizam sobre as quantidades que dão sustentação as operações aritméticas e estas, por sua vez, as que constituem a essência do número; da mesma maneira que as ações de medir, comparar, partir, transformar, etc. são as que dão sentido a quantidade.

Restou, então, para Stevin mostrar que o resultado das operações com grandezas corresponde a um número que é produzido pelas operações entre os números associados a essas grandezas. Para isso, ele exibiu grandezas geométricas que se associam às potências de números fracionários. Como exemplo: partindo de um segmento de comprimento ½ (figura 1), constrói o quadrado correspondente com área $(½)^2$ = ¼ e o cubo com volume $(½)^3$ = 1/8. Dividindo o cubo pela metade obtemos um prisma cujo volume é $(½)^4$ = 1/16, e assim sucessivamente para as potências seguintes.

Figura 1: Representação de frações com cubos



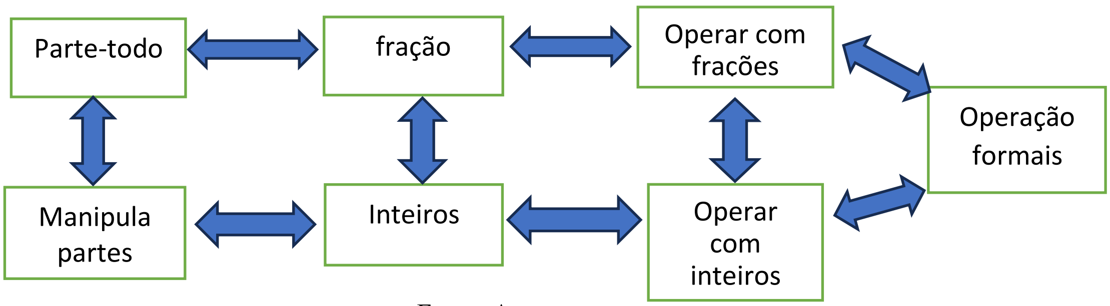
Fonte: Stevin (1645)

A figura 1 ilustra a operação de potenciação de números aritméticos a partir da manipulação de entes geométricos e, sobretudo de operar com frações do mesmo modo que se opera com esses entes geométricos. Além disso, a noção parte-todo de fração fundamenta explicitamente o modo de fazer e pensar a manipulação dos entes geométricos que leva a operação com as frações.

Os “esboços geométricos” podem ser vistos como técnica didática para determinados tipos de tarefas intermediárias (GASCÓN 2001, FERREIRA 2014), no sentido de que as tarefas são indispensáveis para a conexão entre as noções de parte-todo e de operações formais com frações e, a partir disso tornando possível fazer funcionar a OPDM.

As tarefas iniciais sobre a noção de parte-todo de frações tomam como técnica naturalizada, a contagem das partes. Isso evoca a noção de “números” inteiros e das tarefas sobre as operações entre eles, que pensados como partes, serão o mesmo que operar com frações. O esquema gráfico da figura 2 ilustra essas possíveis conexões.

Figura 2: Tarefas iniciais sobre a noção de parte-todo



Fonte: Autores

Exemplo: Seja o "Todo" retângulo dividido em seis partes iguais. Cada parte corresponde a fração $\frac{1}{6}$ que funciona como unidades justapostas que compõem todo o retângulo, como mostra a figura 3.

Figura 3: Representação de um retângulo dividido em 6 partes

$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Fonte: Autores

A fração $\frac{1}{6}$ representa as partes iguais e funcionam como um tipo de unidades que, como tal, podem ser contadas para quantificar outras partes do retângulo original.

Vejamos: a primeira metade do retângulo original tem 3 partes justapostas e, portanto, tem medida obtida pela operação de adição das partes 1 sexto mais 1 sexto, que dá 2 sextos, que adicionados de mais 1 sexto resulta em 3 sextos.

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=3\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{3}{6}$$

A adição de fração pode, então, ser vista inicialmente como adição de números inteiros adjetivados, tudo em acordo com as definições de Stevin (1585). Essa compreensão permite pensar em um possível MPR para frações que, em hipótese, pode contribuir para a compreensão dos professores em formação sobre os modos de fazer essas operações e, com isso, criar condições para que eles respondam aos questionamentos Q_1 e Q_2.

Uma vez reunida as condições teóricas da TAD para a construção do MPR, aqui entendida como uma OPDML, considerando a história e a epistemologia das frações, além das restrições da pedagogia e da escola, como as exigências de uso de recursos de materiais concretos, encaminhamos a construção do MPR

6.2 O MPR para o PEP: operações com frações

O que foi exposto até aqui permitiu pensar que o MPR deve relacionar a noção parte-todo de fração - que vive nos anos iniciais da escola básica - com operações entre essas partes, que ao serem contadas podem ser pensadas em termos de números inteiros.

Essas partes, e com elas a fração, podem ser representadas por materiais concretos ou ainda por "esboços geométricos" de figuras planas ou espaciais que permitam fazer a "relação entre área (volume) e fração" e com isso pensar que se pode operar com frações do mesmo modo que se pode manipular com as áreas (e volumes).

Como a construção de um MPR é para subsidiar a realização de um PEP-FP que posteriormente deve ser adaptado para sua replicação pelos professores em formação com alunos dos anos iniciais, optou-se em relacionar os esboços de figuras geométricas com frações, deixando a relação entre volumes - materiais concretos, por exemplo - para que os professores em formação desenvolvessem como uma OPDM associada.

Sob essas condições, a construção do MPR se inicia considerando as condições matemáticas, até agora não mencionadas, porém necessárias, senão indispensáveis, para esse processo, mesmo quando o saber matemático não possa ficar visível no próprio MPR e, sobretudo, na OPDM dele resultante. Essas condições matemáticas encaminham a OPM base para MPR que deve subsidiar um PEP-FP com professores em formação.

Nesse sentido, é preciso considerar que na história da "matemática" as frações foram posteriormente pensadas sem associação com grandezas, como fez Euler (1828, p.22-25). O apresentado por ele, de certo modo, pode ser interpretado com o que considera Stevin (1585) sobre manipular os números do mesmo modo que se manipulam grandezas.

Especificamente, Euler define a fração a partir de "frações base" que funcionam como uma "unidade" que compõem as outras frações, no sentido em que toda fração pode ser entendida como um múltiplo inteiro de uma delas. Tais frações são: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \frac{1}{9}, \frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}$ e etc, de modo que toda fração, cujo numerador é 1, pode ser tomada como fração base de um conjunto de frações de mesmo denominador. Simbolicamente.

$$\frac{m}{n} = m\left(\frac{1}{n}\right), com\ m\ e\ n \in N$$

Sob essa compreensão de Euler, nós definimos os operadores $F_n : N \rightarrow Q, n \in N$, em que N = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,9...} e $Q = \{\frac{a}{b}, com\ a\ e\ b\ \in N\}$, do seguinte modo.

$$F_n: N \to Q \ tal \ que \ \ F_n(x) = x\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{x}{n}, com \ x \ e \ n \in N$$

Mais precisamente,

$$F_n(x) = xF_n(1)$$

E mais geral que

$$F_n(kx) = kF_n(\,x), com \ k \ e \ x \ \in N$$

E com isso,

$$F_n(a+b) = (a+b)F_n(1) = aF_n(\,1) + bF_n(1) = \ F_n(a) + F_n(b)$$

Assim, segue que:

$$(a+b)F_n(\,1) = aF_n(1) + bF_n(1)$$

E, portanto,

$$\frac{a}{n} + \frac{b}{n} = \frac{a+b}{n}$$

Assim, quando $n = 2$, tem-se que

N = {1, 2, **3**, 4, **5**, 6,7, **8**, 9...}

↕ ↕ ↕

P(Q(2)) ={ $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \mathbf{\frac{3}{2}}, \frac{4}{2}, \mathbf{\frac{5}{2}}, \frac{6}{2}, \frac{7}{2}, \mathbf{\frac{8}{2}}, \frac{9}{2}$ ...} imagem $F_2(x)$

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2}$$

Deixando ao lado a estrita formalidade matemática, quando se tem o mesmo *n, chamado de denominador* para todas as frações, opera-se a adição/subtração dessas frações tomando para o numerador *m* a fração base $\frac{1}{n}$ como seu adjetivo. No exemplo *P(Q(2))* tem-se 3 meios adicionados a 5 meios, iguais a 8 meios.

É nesse sentido que se estabelece o isomorfismo entre operar com frações e operar com grandeza, mais precisamente, os naturais, os quais permitem a contagem das partes entendidas como frações bases.

É importante destacar que as frações, enquanto parte-todo, referem-se a uma quantidade de partes de uma única grandeza e que cada quantidade dessas partes é representada por frações como múltiplos inteiros de uma dada "unidade" ou parte, que identificamos como uma fração base de Euler, embora com ela não se confunda.

Por exemplo, a adição $\mathbf{\frac{3}{2}} + \mathbf{\frac{5}{2}}$ pode ser efetuada independentemente de associações com grandezas. Para isso, basta tomar a fração base $\mathbf{\frac{1}{2}}$.

$$\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 3\left(\frac{1}{2}\right) + 5\left(\frac{1}{2}\right) = 3F_2(1) + 5F_2(1) = (3+5)F_2(1) = 8F_2(1) = 8\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{8}{2}$$

Pode acontecer que as quantidades sejam expressas por frações com denominadores distintos. Nesse caso, as frações bases serão diferentes, o que corresponde a inteiros com adjetivações diferentes não sendo possível adicionar/subtrair esses inteiros, do mesmo modo que na escola não se pode encontrar a soma para 2 maçãs + 3 bananas, pois não é possível adicionar grandezas diferentes, uma vez que maçãs e bananas, não possuem uma unidade comum.

Felizmente, no caso de frações, é sempre possível encontrar uma fração base que seja comum às duas ou mais frações bases. Nesse caso, cada uma das frações bases são múltiplas inteiras dessa fração base comum, como se verifica a seguir.

$$F_{nm}(n+m) = (n+m)F_{nm}(1) = nF_{nm}(\ 1) + mF_{nm}(1) = \ n\left(\frac{1}{nm}\right) + m\left(\frac{1}{nm}\right)$$

$$(n+m)\left(\frac{1}{nm}\right) = \frac{n+m}{nm} \ = \ \frac{1}{m}+\frac{1}{n}$$

Em que: $\frac{1}{m} = n\left(\frac{1}{nm}\right)\ ,\frac{1}{n} = m(\frac{1}{nm})$

De forma geral, para duas frações bases $\frac{1}{n}$ e $\frac{1}{m}$, com m, n $\in N$, a fração base $\frac{1}{nm}$ será a fração base comum às frações bases $\frac{1}{m}\ e\ \frac{1}{n}$.

Operações formais entre frações podem ser ilustradas usando a técnica didática de Stevin (1585) de manipulação de esboços geométricos para explicar operações com frações. Especificamente, a partir de manipulação de retângulos para as frações $\frac{1}{2}\ e\ \frac{1}{3}$, como seguem:

Figura 4: Representa 1 Todo

1

Fonte: Autores

Figura 5: Dividindo 1 Todo em 2 partes iguais (1 meio de 1 Todo)

1 meio	1 meio

Fonte: Autores

Próximo passo,

Figura 6: Dividindo 1 meio em 3 partes iguais (1 terço de 1meio)

1 terço de meio	1 terço de meio	1 terço de meio	1 sexto	1 sexto	1sexto

Fonte: Autores

Na figura 6, resultante da divisão sucessiva das figuras 4 e 5, nessa ordem, observa-se que o todo ficou dividido em seis partes iguais. Isso quer dizer que 1 terço de 1 meio de 1 Todo é o mesmo que 1 sexto de 1 Todo. Observa-se também, comparando as figuras 5 e 6, que 3 vezes 1 sexto é o mesmo que 1 meio. Em termos de fração se escreve assim:

$$\frac{1}{2} = 3\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{3}{6}$$

Alternativamente, dividindo 1 Todo em 3 partes iguais (um terço de 1 Todo) fica como mostra a figura 7 a seguir.

Figura 7: Divisão de 1 Todo em 3 partes iguais

1 terço do Todo		

Fonte: Autores

Em seguida, dividindo em duas partes iguais de 1 terço de 1 Todo (1 meio de 1 terço) como representado na Figura 8, resulta também em 1 sexto.

Figura 8: Dividindo em duas partes iguais 1 terço de 1 Todo

meio de 1 terço	meio de 1 terço	1 sexto	1 sexto	1 sexto	1 sexto

Fonte: Autores

Particularmente, tem-se que 2 vezes 1 sexto é o mesmo que 1 terço. Em termos de fração se escreve assim:

$$\frac{1}{3} = 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6}$$

Então a adição dessas frações:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = 3\left(\frac{1}{6}\right) + 2\left(\frac{1}{6}\right) = 5\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{5}{6}$$

Na figura sequencial, essa operação pode ser realizada, simplesmente, contando as partes 1 sexto, 2 sextos mais 3 sextos, igual a 5 sextos.

$$\overbrace{\text{1 sexto} \mid \text{1 sexto} \mid \text{1 sexto}}^{3\left(\frac{1}{6}\right)} \mid \overbrace{\text{1 sexto} \mid \text{1 sexto}}^{2\left(\frac{1}{6}\right)} \mid \text{1 sexto}$$

Ratificando: quando as frações estão escritas como múltiplas de uma fração base comum, podemos pensá-las como números inteiros homogeneamente adjetivados. Assim, podemos operar com frações como se operam com números inteiros.

Dessa forma, o uso de esboços geométricos constitui técnica didática que ajuda a responder aos questionamentos Q_1 e Q_2, tornando-se auxiliar para melhor compreensão formal matemática dos professores em formação.

Considerando que os conhecimentos matemáticos aqui movimentados podem não estar disponíveis ou acessíveis a esse público-alvo, tais esboços geométricos também parecem ajudar a responder outros questionamentos que emergem nas formações de professores, entre eles, o questionamento da profissão docente, especificamente, Q_3: *"Como criar uma versão dessa OPL que seja inteligível para os alunos dos anos iniciais, inclusive para professores não especialistas em matemática?*

A resposta a esse questionamento não é simples, e demanda o desenvolvimento de um PEP-FP. Felizmente, a noção de PEP permite a integração de PEP relacionados ou ainda que um PEP possa ser visto como um percurso sempre em início, já que um novo questionamento forte pode encaminhar novos percursos de estudo. Daí a necessidade que o formador ter em disposição MPR com horizonte de maior alcance, no caso uma OPDML que permita o encaminhamento de estudos mais profundos sobre o saber em consideração.

É a respeito do propósito de construir a versão didático-pedagógica que recorremos aos estudos de Stevin (1634). Este estudo, embora seja anterior aos trabalhos de Euler (1828), pode ser visto como como uma possível OPDM desse trabalho.

Para isso, consideramos as operações com duas frações, seguindo as condições impostas para o MPR, inclusive sob as condições da OPM aqui construída, com suporte também dos estudos de Euler (1828) e de Stevin (1634) que envolvem operações entre frações com ajuda de esboços geométricos.

Os esboços geométricos de retângulos (como área), incluindo os quadrados, podem ser vistos numericamente como o produto de medidas de seus dois lados (Euclides, livro II). Segundo Bergé e Sessa (2003, p. 173) eles se mostraram adequados para o estudo desenvolvido por Guerra e Silva (2008) sobre as operações entre frações, uma vez que fazem uso recursivo de quadrados unitários como base para justificar essas operações.

Deixando de lado a complexidade que envolve a OPDM desenvolvida por Guerra e Silva (2008), tomamos uma de suas possíveis versões adaptadas como resposta à questão Q_3, tendo em conta as restrições: primeiro, no que diz respeito à ausência de saberes matemáticos (que pode ser minimizada, mas não eliminada) e, segundo, por suposta restrição do tempo para o ensino/aprendizagem de tarefas intermediárias (FERREIRA, 2014) que antecedem o estudo formal de tarefas de adição e de subtração de frações no estrito mundo dos numerais fracionários.

Nesse contexto, consideramos o quadrado unitário, no sentido de um quadrado com lados de medidas iguais a 1 que convencionamos ter superfície Q =1, como unidade de área que permite medir retângulos e, entre eles, os próprios quadrados não unitários.

Seguindo essa compreensão, um retângulo R com lados adjacentes de medidas dadas por frações do tipo $\frac{a}{m} = a\left(\frac{1}{m}\right)$ e $\frac{b}{n} = b\left(\frac{1}{n}\right)$, ambas menores que a unidade, estará completamente inserido no quadrado unitário Q.

Dividindo um lado do quadrado unitário Q em *n* partes iguais, cada uma terá medida $\frac{1}{n}$, pois $n\left(\frac{1}{n}\right) = 1$. Analogamente, dividindo o lado adjacente em *m* partes iguais, cada parte medirá $\frac{1}{m}$, pois $m\left(\frac{1}{m}\right) = 1$.

Agora, decompondo o quadrado unitário, por meio de segmentos de retas paralelas aos seus lados adjacentes, tantas vezes quanto foram divididos, obtém-se (*mxn*) retângulos R_{mn} congruente e justapostos, com lados $\frac{1}{m}$ e $\frac{1}{n}$. Disso, resulta que $(m \times n)$ R_{mn} = Q e, portanto, que $R_{mn} = \frac{1}{m} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{m \times n}$.

Essa compreensão é o logos que explica as técnicas das seguintes tarefas.

- **Tarefa T_0:** Esboçar no quadrado unitário a fração base comum às frações $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{n}$.
- **Técnica t_0**

(1) Construa o quadrado unitário e selecione dois lados adjacentes e associe cada um deles a uma fração dada;

(2) Divida cada lado em tantas partes (*m* ou *n*) quanto seja o denominador da fração associada e, sobre cada lado, identifique as frações com as quantidades de partes *a* e *b* das divisões respectivas;

(3) Em cada lado dividido, trace segmentos paralelos ao lado adjacente tantas vezes quanto foi a divisão do lado para obter os *(mxn)* "retângulos menores" R_{mn} justapostos e congruentes entre si. O retângulo menor R_{mn} representa a fração base comum às frações dadas.

Tarefa T_1

- Esboçar no quadrado unitário duas frações $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{n}$ a partir da fração base comum a elas.

Técnica t_1

(1) Realizar a tarefa T_0;

(2) Delimitar um retângulo, R $(\frac{a}{m})$ e R $(\frac{b}{n})$, um para cada fração, de acordo com o lado selecionado inicialmente, inclusive com as quantidades $q(\frac{a}{m})$ e $q(\frac{b}{n})$de retângulos menores contidos em seus interiores.

Os retângulos R$(\frac{a}{m})$ e R$(\frac{b}{n})$ representam geometricamente as frações $\frac{a}{m}$ e $\frac{b}{n}$, respectivamente. Do esboço resultará que $\frac{a}{m} = q(\frac{a}{m})\left(\frac{1}{d}\right)$ e $\frac{b}{n} = q(\frac{b}{n})\left(\frac{1}{d}\right)$, sendo $\frac{1}{d}$ a fração base comum.

Tarefa T_2

- Efetuar a operação (adição /subtração) entre duas frações dadas, $\frac{a}{m} \pm \frac{b}{n}$.

Técnica t_2:

(1) Realizar a tarefa T_0;

(2) Realizar a tarefa T_1;

(3) Efetue as operações indicadas (adição/subtração) entre os inteiros adjetivados $q(\frac{a}{m})\left(\frac{1}{d}\right)$ e $q(\frac{b}{n})\left(\frac{1}{d}\right)$ correspondentes aos retângulos R$(\frac{a}{m})$ e R$(\frac{b}{n})$.

- Exemplo: Efetuar as operações: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$ e $\frac{3}{4} - \frac{1}{2}$.

Resolução:

Essa tarefa é realizada pela técnica t_2 que demanda inicialmente a realização das tarefas T_0 e T_1 sequencialmente.

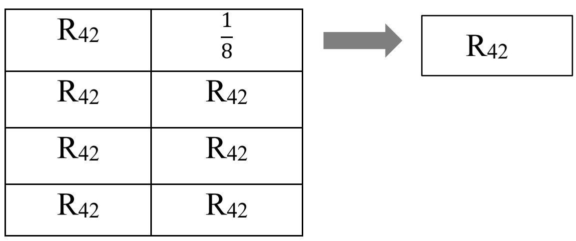
A tarefa T_0 é:

Esboçar no quadrado unitário a fração base comum às frações : $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$.

Resolução:

Realizando os passos de (1)-(3), resulta o seguinte esboço com 8 retângulos R_{42}:

Figura 9: O retângulo dividido em 8 partes



Fonte: Autores

No esboço, R_{42} é $\frac{1}{8}$ do quadrado unitário Q, portanto, a fração base comum é $\frac{1}{8}$.

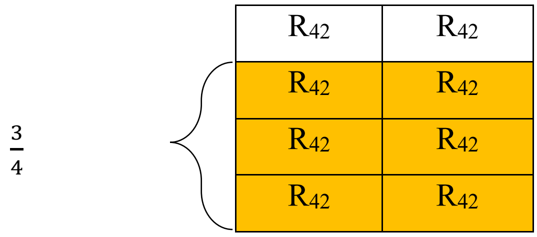
Agora, em sequência, a tarefa T_1.

- Esboçar no quadrado unitário as duas frações $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{2}$ a partir da fração base comum a elas.

Tomando o resultado de T_0 e realizando o passo 2 da técnica t_1.

→ R $\left(\frac{3}{4}\right)$ para a fração $\frac{3}{4}$ que resulta no seguinte esboço.

Figura 10: Esboço da fração ¾



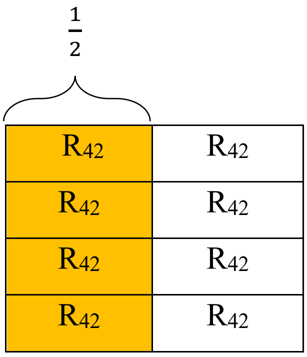
Fonte: Autores

Isso quer dizer que $q\left(\frac{3}{4}\right) = 6$ e que $R\left(\frac{3}{4}\right)$ é o mesmo que 6 vezes R_{42}, ou

$$\frac{3}{4} = 6\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{6}{8}$$

→ R $\left(\frac{1}{2}\right)$ para a fração $\frac{1}{2}$ que resulta o seguinte esboço

Figura 11: Esboço da fração ½



Fonte: Autores

Isso quer dizer que $q\left(\frac{1}{2}\right) = 4$ e que $R\left(\frac{1}{2}\right)$ é o mesmo que 4 vezes R_{42}, ou, $\frac{1}{2} = 4\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{4}{8}$

Finalmente, aplica-se o passo (3) da técnica t_2.

Adição: $\frac{3}{4} + \frac{1}{2} = R\left(\frac{3}{4}\right) + R\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{8}\right) + 4\left(\frac{1}{8}\right) = 10\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{10}{8}$

Subtração: $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = R\left(\frac{3}{4}\right) - R\left(\frac{1}{2}\right) = 6\left(\frac{1}{8}\right) - 4\left(\frac{1}{8}\right) = 2\left(\frac{1}{8}\right) = \frac{2}{8}$

As tarefas que compõe esse MPR, relacionam a parte-todo como frações, mas que são operadas como números inteiros e, com isso, se tornam factível para ser transposta didaticamente em diferentes OPDM, acessíveis a professores e a professoras não especialistas, como também para alunos dos anos iniciais da escola básica.

De outro modo, diferentes sistemas de tarefas podem ser derivados das tarefas T_0, T_1 e T_2 desse MPR para atender distintas condições que caracterizam as diferentes posições nas instituições de formações.

A tarefa final, de construir uma versão dessa OPDM, utilizando material concreto, por exemplo, como uma das respostas possíveis ao questionamento Q_3, é deixada aos professores em formação no PEP-FP para ser posta à prova no exercício de suas atividades profissionais como docentes.

6.3 Considerações finais

As articulações que apresentamos não se deram de forma caótica ou por acaso, todavia foram suportadas por dispositivos didáticos providos pela TAD, dentre eles, o que destaca a necessidade do desenvolvimento da OPL em complexidade crescente frente à dimensão epistemológica do saber a ser ensinado e tendo em conta as OPDM atuais e passadas, que vivem ou viveram nas escolas básicas.

A noção de *Transposição Didática* permitiu que fossem questionados os saberes ensinados como saberes nunca prontos para serem aprendidos ou mesmo se deviam ser aprendidos. Nesse fazer de transposição, a história e a epistemologia do saber deram uma indispensável ajuda na construção dos sistemas de tarefas, que permitiram o encontro de respostas ao problema didático P_0, relativo ao ensino de operações com frações, considerando as restrições de recursos teóricos da matemática e permitindo recorrer à noção de organizações praxeológicas em complexidade crescente, revelando a imbricada rede de saberes a que esse saber pode pertencer.

Isso mostra a potência da TAD para o exercício da profissão docente, visto que não somente revela problemas da profissão docente, sobretudo, relativos aos saberes específicos, como também provê dispositivos teóricos e metodológicos para enfrentá-los, como o PEP-FP e a ele relacionados, como o MPR, objeto deste trabalho.

No caso específico do que foi tratada, as operações de adição e de subtração de frações, enquanto objeto de ensino e de aprendizagem, tem sua construção de acordo com a posição que assumirá na escola, anos iniciais ou finais, pois as condições e as restrições impostas pela pedagogia, pela escola e pela disciplina, mostram-se diferentes.

Para o MPR foi assumida, a posição dos anos iniciais da escola básica, requerendo conhecimentos matemáticos disponíveis nessa posição de ensino, e a condição de o saber - operações com frações - se manifestar por meio de práticas com manipulações de materiais concretos que simulem superfícies de retângulos e que podem dar sentido as frações e os modos de fazer as operações entre elas, sem que se recorra a saberes da matemática acadêmica, embora possam estar invisivelmente presentes.

As práticas com materiais concretos permitem que os alunos criem relações mais próximas com as frações e, com isso, possa evocar as práticas vivenciadas com elas sempre que delas precisem nos enfretamentos de situações na qual as frações se façam presente. Espera-se que essas práticas do MPR, oportunizadas pelas tarefas, sejam para eles parte inseparável do saber fração.

É claro que o MPR não é único para o enfretamento do problema P_0 e tampouco as OPDM que dele possam derivar. Portanto, muito ainda pode ser objeto de investigação e, com isso, reformulações do MPR podem ocorrer.

Uma delas, dentre outras, é buscar o impacto na reestruturação do MPR para a extensão da técnica didática de manipulação de esboços de retângulos para as operações de multiplicação e de divisão de frações, bem como da inclusão de numerais mistos por necessidade de atender, devido alguma imposição da escola ao questionamento do tipo "Como fariam para calcular $1\frac{17}{28}$ x $2\frac{2}{7}$? (CHEVALLARD, BOSCH E GASCÓN 1997, p. 120, tradução nossa).

De qualquer modo, urge a necessidade de desenvolvimento de um PEP-FP orientado pelo MPR, proposto de modo a validá-lo, inicialmente, como condição favorável, restritiva ou neutra para a mudança nas relações de professores em formação com as práticas com frações.

Referências

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da Geometria Analítica.** Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

BERGÉ, A.; SESSA, C. **Completitud y continuidad revisadas através de 23 siglos: aportes a uma investigação didática.** Relime, v.6, n.3, p.163-197, julho de 2003.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Las prácticas docentes del profesor de matemáticas** XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques que se celebró. Agosto de 2001.

BOSCH, M. **Os modelos praxeológicos de referência: Reflexões metodológicas desde a TAD**. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, GUERRA. R.B, NUNES, J. M. V (org.). Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático – Fundamentos teórico-metodológicos para a formação. V.1. Curitiba: Editora CRV, 2022.

BRASIL. **Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental**. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

CHEVALLARD Y. **La Transposición Didáctica: del saber sabio al saber enseñado.** La Pensée Sauvage, Argentina. (1991)

______. **El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico.** Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

______. **La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado**. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

______. **La notion de PER**: problèmes et avancées. Toulouse, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=16 . Acesso em: 8 out. 2023

______. **A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática**. In: ALMOULOUD, S. A.; FARIAS, L. M. S.; HENRIQUES, A. (org.). A teoria antropológica do didático: Princípios e Fundamentos. Curitiba: Editora CRV, 2018.

CHEVALLARD, Y; BOSCH, M.; GASCÓN, J. **Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje**. Barcelona: ICE/Horsori, 1997.

CAMPOS, T. M. M.; RODRIGUES, W. R. A **idéia de unidade na construção do conceito do número racional**. REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática. Universidade Federal de Santa Cataria, UFSC/MTM/PPGECT, Florianópolis, SC, v2. 4, p. 68-93, 2007. Disponível em: <http://www.periodicos

EULER L. **Elements of álgebra**. Printed for longman, rees, orme, and co. paternoster-row. London, 1828.

FANDIÑO P. M.I. **Fractions: conceptual and didactic aspects.** Acta Didactica Universitatis Comenianae. Issue 7, p. 81-115, 2007.

FERREIRA, R. S. R. **Tarefas intermediárias: um modelo epistemológico de referência para o ensino das frações.** 2014. 120f. Belém: Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Belém, 2014. Disponível em: https://bit.ly/3HhH5Nr. Acesso em: 12 abr. 2020

GASCÓN, J. **Algunos problemas de investigación relacionados con la práctica docente del profesor de matemáticas**. XVI Jornadas del SI-IDM, Huesca (España) (2001). Disponível em http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/. Acessado em 20 de janeiro de 2014.

GASCÓN, J. **Desarrollo del conocimiento matemático y análisis didáctico: Del patrón análisis–síntesis a la génesis del lenguaje algebraico.** *Recherches en Didactique des Mathématiques 13* (3), 295–332. 1993.

GASCÓN, J. **Un nouveau modele de l'algébre élémentaire comme alternative à l' <<arithmétique généralisée>>**. *Petit x 37,* 43–63.1993-1994

GASCÓN, J. **El papel de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas.** *Educación Matemática 6* (3), 37–51. 1994.

GASCÓN, J. **Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.** *Recherches en Didactique des Mathématiques 18* (1), 7–34. 1998.

GASCÓN, J. **La naturaleza prealgebraica de la matemática escolar.** *Educación Matemática 11* (1), 77–88. 1999.

GASCÓN, J. **Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes.** *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa 4* (2), 129–159. 2001a.

GUERRA, R. B; SILVA, F. H. S. **As Operações com Frações e o Princípio da Contagem.** Bolema. Rio Claro (SP), Ano 21, nº 31, p. 41 a 54, 2008.

KLEIN, J. ***Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra,*** Dover Publications, Inc. N. York, 1968.

KICHOW, I. V. **Procedimentos didáticos relativos ao ensino de números racionais em nível de sexto e sétimo anos do ensino fundamental.** 2009. 116f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande, 2009.

STEVIN, S. *La pratique d'arithmétique* en Les Oeuvres Mathematique. Ed A. Girard, Leyde (I585)

________. **La disme**. In: GIRARD, Albert (Org.). Les Euvres Mathematiques de Simon Stevin de Bruges. Tradução de Albert Girard. Leinden: [s.n.], 1634. p. 2007-213. Disponível em: http://diglib.hab.de/drucke/n-11-2f-helmst/start.htm?image=00220 . Acesso em: 20 dez. 2023.

WALDEGG, G. **La contribución de Simon Stevin a la construcción del concepto de número**. Educación matemática, 8, (2), 5-17, 1996.

7- Um Percurso de Estudo e Pesquisa para a relação da integral dupla com as obras de Antoni Gaudí

Ana Karine Dias Caires Brandão
Maria José Ferreira da Silva
Saddo Ag Almouloud

Introdução

Na Educação selecionamos algumas escolhas metodológicas que descrevem uma trajetória em que o saber é avaliado, adequado e ressignificado para ser socializado com os estudantes. Nesse caminho os ruídos na comunicação, as interpretações diversas da linguagem formal e a falta de compreensão de contextos variados, em que um determinado conceito é empregado, se tornam empecilhos ou se transformam em exitosas experiências nos processos de ensino e de aprendizagem.

A mudança perceptiva ocorre na condução do percurso e nas intervenções do professor, pois a depender da sua ação o caminho pedregoso conduz a outras descobertas. A desestabilização frente a novas descobertas de ação causa espanto, estranheza e provoca questionamentos em busca de ações deliberadas e é no movimento que as rupturas acontecem. A essencialidade do percurso está na construção da teia de indagações intermediárias que se constituem como hipóteses a serem comprovadas por argumentos convincentes e aceitos pelo cânone científico para validação da resposta e, a sua unicidade é questionável, transitória e vulnerável, já que a qualquer momento novas pesquisas podem revelar equívocos não observados inicialmente.

A este processo, Chevallard (1999) denominou de Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), um dispositivo didático que possibilita ao discente estudar, pesquisar, criar técnicas e tecnologias para responder aos questionamentos que extrapolam o que está posto nos documentos oficiais (livros, Leis) e que por intermédio da pesquisa em outros meios (*internet*, entrevistas, experiências em laboratórios) é possível encontrar uma solução apropriada.

Aplicar e analisar os resultados de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) constitui um desafio, tanto metodológico quanto curricular, pois o sistema educacional brasileiro tem uma organização conteudista, linear e por níveis de escolaridade. O desenvolvimento de um PEP com uma questão mais ampla que envolve várias áreas do conhecimento pode trazer conhecimentos que não pertencem ao nível de escolaridade dos estudantes e excluir outros pertencentes. Esta restrição causa impactos na credibilidade do trabalho do professor, pois frente à cultura escolar brasileira e a concepção de educação dos pais dos discentes, ele não está cumprindo o currículo.

A instabilidade promovida com o PEP desencadeia certos ajustes no currículo e na percepção da sociedade do que é educação e como ela faculta caminhos distintos para o ensino e para a aprendizagem, pois cada discente é único. Entretanto, a educação brasileira está sujeita aos ditames da elite, dos políticos e do mercado de trabalho, que não tem interesse em investir financeiramente e culturalmente na mudança do *status quo*. Embora seja uma restrição macro sistêmica ela afeta diretamente no trabalho e no posicionamento das escolhas feitas pelo docente.

No entanto, há um compromisso velado dos professores com cada estudante, eles compreendem que “se a educação sozinha não transforma a sociedade, sem ela tampouco a sociedade muda” (FREIRE, 2000, p.67) e, tomados por esta consciência do papel que desempenham para a mudança é que alguns deles desafiam o sistema, fazem escolhas e viabilizam condições, aquém das restrições. São motivados pelo desejo de transformação que eles irão questionar o sistema e criar contextos em que o estudante possa se posicionar frente: ao tipo de educação que está submetido, às injustiças, ao monopólio das elites e às exclusões de uma parte da sociedade. São estes que recebem o adjetivo de “doutrinadores”, porque ousam transformar subordinados em “insubordinados criativos” (MORRIS et al., 1981).

Neste viés e contrário às restrições, desenvolvemos um PEP para o ensino de Integral Dupla com estudantes das Engenharias e da Licenciatura em Matemática tomando como referências as obras arquitetônicas de Antoni Gaudí. O intuito foi verificar quais os significados e as relações mobilizadas pelos graduandos entre o objeto matemático e as construções do artista.

A pesquisa de cunho qualitativo, foi desenvolvida apoiando-se nos pressupostos da Semiótica de Charles Sanders Peirce e na Teoria Antropológica do Didático (TAD).

No que tange a Semiótica abordamos os tipos de raciocínio: dedutivo, abdutivo e indutivo com ênfase no raciocínio abdutivo - o único capaz de gerar ideias novas e a semiose que é um processo em que as interpretações adquirem significados. Na TAD, destacamos o uso do dispositivo de um Percurso de Estudo e Pesquisa e as dialéticas criadas por Chevallard (2007, 2009a, 2013).

Do ponto de vista metodológico, os procedimentos de um *Percurso de Estudos e Pesquisa* foram acionados para o ensino de Integral Dupla para o cálculo da medida de Superfícies Quádricas, durante cinco encontros presenciais, áudio-gravados e filmados, que ocorreram aos sábados, com a participação de doze estudantes matriculados nos cursos da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia e das Engenharias (civil, elétrica e ambiental) do Instituto de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia e que haviam cursado a disciplina Cálculo Diferencial e Integral.

7.1 O Percurso de Estudo e Pesquisa, a integral dupla e Gaudí

No desenvolvimento de um PEP a escolha por uma questão geratriz demanda um estudo profundo do objeto científico e a construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER) capaz de situá-lo na estrutura interna da matemática e/ou exterior a ela. A questão geratriz consiste em um problema que demanda criar várias hipóteses para solucioná-la. Geralmente, são indagações não habituais e, portanto, não são encontradas nos livros didáticos, o que provoca a pesquisa e o estudo sobre o tema gerador em outras mídias e meios.

Por se constituir de várias hipóteses, nem sempre o caminho escolhido é o mais apropriado ou o levará a uma resposta coerente com o contexto matemático ou aplicável, o que exige do estudante traçar novas rotas para solucionar o problema. Durante todo o percurso o estudante acessa o raciocínio abdutivo, aquele capaz de gerar ideias novas (PEIRCE, 2005), ao articular hipóteses possíveis que permitam solucionar os questionamentos que surgem. No entanto, elas precisam ser avaliadas e julgadas pela dedução e indução, no intuito de produzir significado e ser coerente com a conjuntura proposta. O conjunto de respostas às questões subsidiárias e as hipóteses validadas conduzem à solução da questão geratriz.

Em nosso estudo, os contextos inspiradores para a elaboração da questão do nosso PEP foram as construções arquitetônicas de Antoni Gaudí, pois um dos autores deste texto ao visitar estas obras percebeu a relação da aplicação de objetos matemáticos em sua estrutura física, fato comprovado posteriormente por intermédio da consulta aos registros dos cálculos executado por Gaudí e as formas geométricas associadas aos diferentes objetos matemáticos, expostos em um museu de Barcelona.

Dois momentos foram oportunos para definirmos a nossa questão: o primeiro foi o estudo dos objetos matemáticos e não matemáticos que poderiam estar associados à Integral Dupla e às obras de Gaudí para verificar a relevância que as Superfícies Quádricas e os momentos de inércia tinham para o PEP. O segundo, foi o contato com Mariana Bosch que sugeriu relacionar as obras com o tempo de existência. Após estes encontros a questão geratriz ficou assim definida: Q_o: Como as obras de Antoni Gaudí resistiram as intempéries do tempo?

Ao decidirmos a questão do PEP, experimentamos sua viabilidade com um grupo de estudantes do mestrado em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo que, após realizarem pesquisas em alguns sites, conseguiram atingir o objetivo pretendido: associar as obras de Antoni Gaudí as Superfícies Quádricas. Percebemos também em um dos protocolos entregues que um dos estudantes fez uma associação da estabilidade das estruturas físicas com as formas tridimensionais, ao registrar: "ao usar os hiperboloides, catenárias e helicoides em sua estrutura física, ou melhor nas obras arquitetônicas, acredito que isso possibilitou que elas ficassem mais equilibradas e resistiram ao tempo" (Estudante voluntário 1).

Ao final deste primeiro experimento percebemos a exequibilidade do percurso proposto e, em seguida, estruturamos as praxeologias[51] matemáticas e didáticas[52] que deram suporte ao desenvolvimento do percurso.

7.2 As praxeologias didáticas e matemáticas do PEP

O planejamento da aula é uma atividade que o professor realiza no exercício laboral e não ocorre de forma diferente no Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). Ao analisarmos a questão geratriz detectamos elementos de matemática e de outras áreas (física, engenharias, arquitetura) que potencializariam respostas condizentes ao nosso objetivo – desenvolver um PEP relacionando a Integral Dupla com as obras arquitetônicas

[51] Chevallard (2002) esclarece que o termo praxeologia vem do grego práxis que significa "prática e refere-se ao bloco prático-técnico formado pela tarefa (T) e a técnica (τ), e do grego, logos, que significa a razão, o "discurso fundamentado", refere-se ao bloco teórico-tecnológico formado pela tecnologia (θ) e pela teoria (Θ).

[52] Segundo Chevallard (1999), as praxeologias (ou organizações) associadas a um saber matemático são de duas espécies: matemáticas e didáticas. As organizações matemáticas referem-se à realidade matemática que se pode construir para ser desenvolvida em uma sala de aula e as organizações didáticas referem-se à maneira que se faz essa construção.

de Antoni Gaudí. Neste interim, constatamos que a escolha das tarefas a serem propostas seriam fundamentais para a execução do projeto. Ao buscá-las em livros de Cálculo Diferencial e Integral (CDI), referendados nos planos de curso das graduações, verificamos a superficialidade e escassez dos modelos de atividades propostas quando associam a matemática com outras áreas do conhecimento, o que nos conduziu a criação das tarefas.

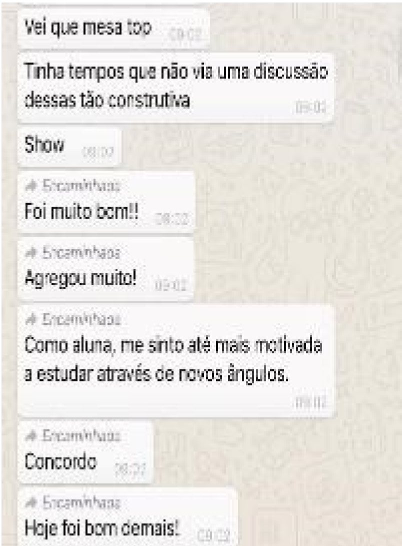
Quanto aos objetos matemáticos, Integral Dupla e Superfície Quádricas, apuramos por meio de pesquisas em sites, revistas e jornais acadêmicos a inexistência de publicações em que eles são aplicados em situações adversas à matemática e ao tema proposto. Pesquisas como as de Silva e Morretti (2018a; 2018b) sobre as Superfícies Quádricas e a de Henriques (2006) sobre as Integrais Múltiplas trazem valiosas contribuições no que tange aos objetos de forma individual, voltadas ao campo interno da matemática e ao uso de artefatos tecnológicos, mas não refletem suas aplicações em graduações para não matemáticos. Com relação às aplicações desses objetos matemáticos, Romo-Vázquez (2010a); Romo-Vázquez e Chávez (2017) discutem atividades que envolvem Transformada de Laplace e Equações Diferenciais para futuros engenheiros, mas não refletem na mesma direção que propomos.

No que diz respeito à praxeologia didática, elaboramos um curso denominado "(Se) Integre duplamente às superfícies quádricas" que ocorreu em cinco encontros presenciais, aos sábados, com estudantes das Engenharias e da Licenciatura em Matemática de duas instituições públicas do interior da Bahia. O critério para a seleção dos discentes foi ter cursado a componente curricular Cálculo Diferencial e Integral (CDI) III, *locus* em que se situa a Integral Dupla. Dos 32 inscritos foram selecionados 20 alunos, mas compareceram até o final do curso, apenas 13, sete da Licenciatura em Matemática e seis da Engenharia.

O primeiro encontro realizou-se em uma fazenda em período integral, o objetivo era a socialização com os partícipes para orientá-los quanto à proposta do curso e a assinatura dos documentos referentes ao Conselho de Ética. Em seguida, houve duas palestras: um convidado que abordou a Matemática em Contexto das Engenharias e a outra, de um dos autores deste artigo que discorreu sobre o PEP para expor, ao final, a questão geratriz. Temas como a criatividade na matemática e a formação de futuros professores foram assuntos que versaram neste encontro. Ao explanar a respeito da proposta do trabalho, expondo os objetivos, os estudantes questionaram, de forma espontânea, duas perguntas: Q_1*: Quem é Antoni Gaudí?* Q_2*: Quais são suas obras?* E a terceira a professora indagou: *Q_3: O que você identifica nessas obras com o curso ao qual está matriculado?* Como relatamos estas questões intermediárias são importantes para a elaboração final da resposta de Q_o.

No segundo encontro iniciamos com uma mesa temática em que convidamos profissionais das Engenharias Ambiental, Civil e Elétrica, um professor de matemática, um arquiteto e um professor de física que debateram o tema “Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas”. A participação dos estudantes com perguntas e comentários favoreceu um ambiente de trocas e aprendizado e o registro deles em conversas no aplicativo de WhatsApp apresentado na Figura 1, retratou o quanto gostaram da experiência.

Figura 1 - Registro da avaliação dos estudantes no grupo do WhatsApp (material da pesquisa)



Fonte: Brandão, 2021

Em um segundo momento, fizemos a leitura das pesquisas realizadas por eles para as três perguntas do primeiro encontro, nesta discussão os alunos trouxeram as formas geométricas aplicadas à arquitetura de Gaudí, elementos como a luminosidade, a localização de suas obras, o solo, o aproveitamento da água da chuva e de materiais, o sistema de refrigeração das casas construídas, entre outros elementos. Ao final, foram formuladas as seguintes questões pela pesquisadora: Q_4: Quais formas tridimensionais são identificadas nas obras de Gaudi? Elas possuem equações matemáticas? Q_5: Como essas fórmulas são utilizadas no exercício da sua atual graduação? Q_6: Como as obras de Gaudí podem ser trabalhadas no Ensino Básico?

No terceiro encontro, as atividades foram intensas, tivemos a apresentação de duas entrevistas gravadas, uma com uma pesquisadora da história das artes que discorre sobre o contexto histórico da época em que Gaudí viveu e analisa suas obras. Em seguida, passamos a discussão das respostas dos estudantes das questões intermediárias proposta no final do segundo encontro. Depois os estudantes realizaram uma atividade para a construção de objetos de aprendizagem com massa acrílica, tintas, palitos de churrasco, para representar as formas dos sólidos usados por Gaudí, identificados por eles na pesquisa. As Superfícies Quádricas: hiperboloide de uma folha, paraboloide elíptico, paraboloide hiperbólico, catenárias e elipsoides foram as formas construídas com o material disponibilizado.

No segundo momento, do terceiro encontro, a pesquisadora relembrou os conceitos das Superfícies Quádricas apresentando representações gráficas e algébricas de cada uma. Ao final, as questões subsidiárias geradas foram: *Q_7: O que é um centro de massa? Q_8:O que é um momento de inércia? Q_9: Qual a influência das Integrais Duplas de Superfícies Quádricas para o equilíbrio nas obras de Gaudí?*

O quarto e quinto encontros ocorreram no mesmo sábado em tempo integral, embora em locais distintos. No período da manhã, no quarto encontro, foi apresentada uma entrevista gravada com o professor Afonso Henriques (Universidade Estadual de Santa Cruz) em que ele explica o funcionamento de uma impressora 3D e apresenta os crivos sólidos[53] fabricados no grupo de pesquisa que ele coordena. Em seguida, perguntamos aos estudantes como poderíamos calcular a medida do volume daqueles sólidos, como também dos sólidos produzidos por eles. Um dos estudantes lembrou que poderíamos usar a mesma ideia da integral para fatiar em retângulos. Um outro, complementou que agora, seriam paralelepípedos tendo em vista que a figura estava em 3D. Outro discente acrescenta, “Então será uma Integral Dupla!”. Neste momento, a professora os parabeniza e se direciona até o quadro branco para institucionalizar a definição de Integral Dupla e revisar tecnologias e teorias a ela associadas, registrado na Figura 2 a seguir.

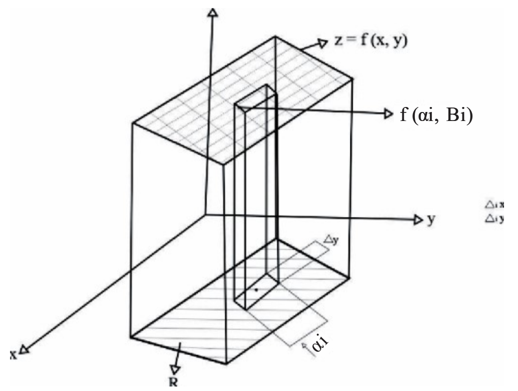
[53] Ver o conceito de Crivo-Geométrico em Henriques, Nagamine e Serôdio (2020, p. 257)

Figura 2 – Modelo praxeológico da matemática produzido pela pesquisadora

Integral Dupla

Suponha que uma função f seja numa região fechada R em R², vamos supor que $f(x, y) > 0$ em IR. O gráfico da função definida por $z = f(x, y)$ (Figura 29) é uma superfície que está acima do plano xy,

Figura 4: Sólido retangular



Fonte:Leithold (1994, p. 1025)

A figura mostra uma sub-região particular de IR tendo dimensões Δix e Δiy. É um sólido retangular tendo sub-regiões como base e f (αi, βi) como a medida da altura, onde (αi, βi) é um ponto na i-ésima sub-região. O volume do sólido retangular é dado por:

$\Delta_i\, v = f(\propto_i, \beta_i)\Delta A_i$, tomando

$\Delta A_i = \Delta_i x\,.\,\Delta_i y, então$

$\Delta_i\, v = f(\propto_i, \beta_i)\Delta_i x\,.\,\Delta_i y.$

Acontece que podemos ter n-sólidos e a soma aproxima da medida do volume do sólido tridimensional. O sólido é limitado acima pelo gráfico de f e abaixo pela região IR no plano xy.

Então: $\sum_{i=1}^{n} f\ (\alpha_i\ , \beta i)\ \Delta_i A = \Delta_1 v\ f\ (\alpha_1, \beta_1) +\ \Delta_2 v\ f(\alpha_2, \beta_2) + \cdots + \Delta_i v\ f(\alpha_1, \beta_1)$

$$\lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\big((\propto_i, \beta_i)\Delta_i\ A\big) = L$$

$$= \iint_R f\ (x, y) dA$$

Logo, a integral dupla pode ser interpretada geometricamente em termos de um sólido tridimensional.

Definição

Uma função f de duas variáveis será dita integrável numa região retangular fechada R se f estiver definida em IR e o número L existir.

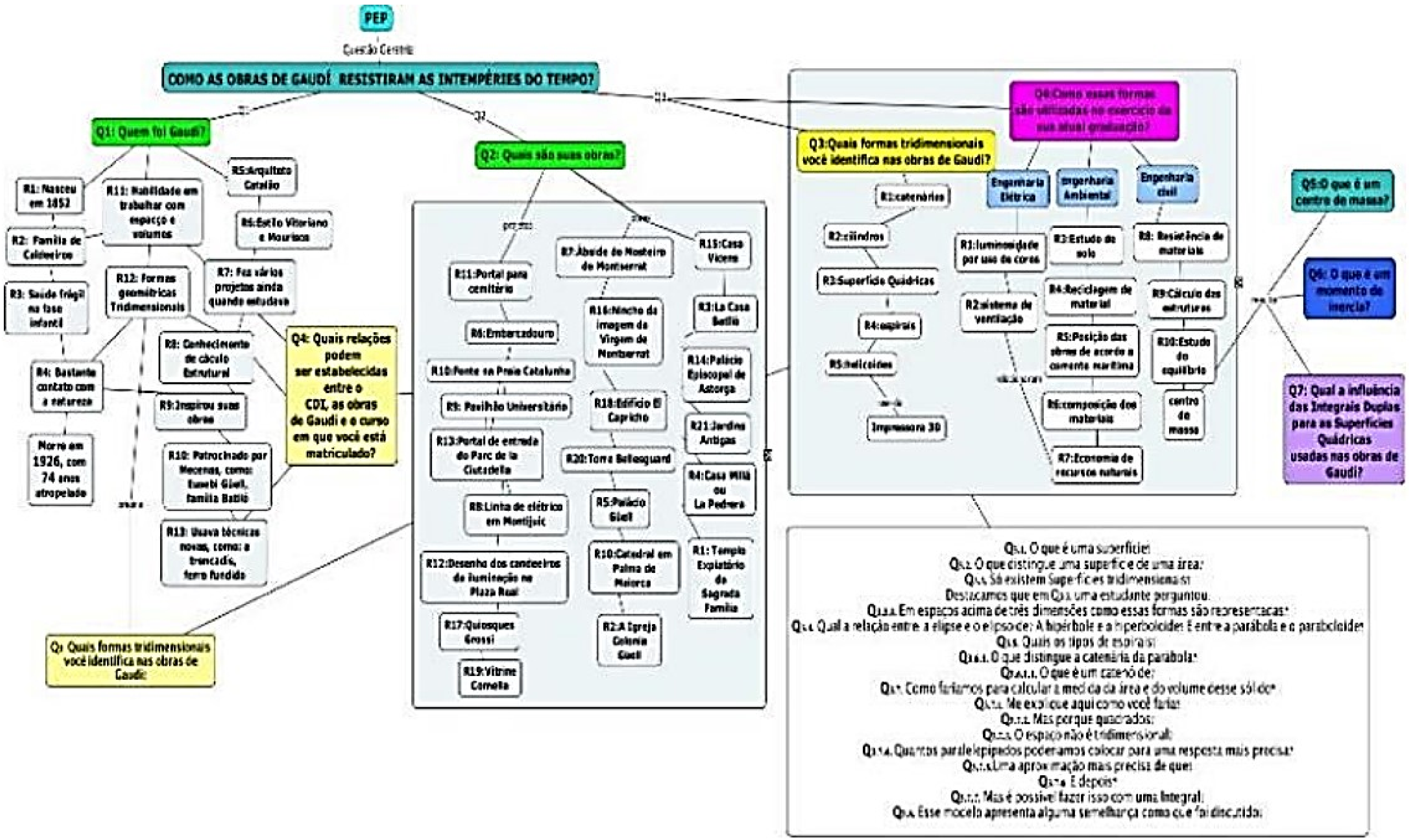
Esse número L será chamado de integral dupla de f em IR e escrevemos:

$$\lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f\big((\propto_i, \beta_i)\Delta_i\ A\big) = \iint_R f\ (x, y) dA$$

Fonte: Brandão, 2021, p.163-164

O quinto encontro, no período vespertino, foi marcado pela solução da atividade 2, que apresentava duas situações, uma da engenharia e a outra de como a Integral Dupla “vive” no Ensino Básico. Após responderem, demos um tempo para socialização e discussão das respostas, pois trabalharam em dois grupos (o da licenciatura e o das engenharias). Em seguida, discutimos as três últimas perguntas apontadas no terceiro encontro e depois, conseguiram sintetizar uma solução para a questão geratriz Q_o. Ao final dos cinco encontros registramos as questões (geratriz e intermediárias) abordadas no desenvolvimento do PEP e as sintetizamos na Figura 3.

Figura 3 – Síntese das questões levantadas durante o PEP. (elaborado pelos autores)



Fonte: Brandão, 2021, p.274

Na Figura 2 reproduzimos as questões ligadas diretamente a Q_o, mas outras foram produzidas no desenvolvimento do PEP. Inclusive em uma delas há indícios de que a questão geratriz poderia ser alimentada por outras indagações que favoreceriam o estudo de conceitos de funções vetoriais e Integrais de linha, objetos matemáticos pertencentes à componente curricular CDI-III. Na seção seguinte, apresentamos alguns resultados do PEP.

7.3 Resultados para a questão do PEP

Para a análise do PEP construímos uma matriz que acoplasse três elementos: criatividade, interpretação e atitudes e a denominamos de Matriz Diversidade (MD) por ter, como foco, a diversidade de significados que poderiam emergir das diferentes graduações e as relações mobilizadas pelos graduandos entre o objeto matemático e as construções do artista.

Na matriz MD pontuamos as atitudes, pois acreditamos que as circunstâncias são determinantes para a tomada de uma decisão frente a busca de uma resposta para uma questão. Neste sentido, analisamos as circunstâncias que determinam a ação, a atitude e a interpretação na busca de sentido ou de uma significação para as praxeologias empregadas no transcorrer do percurso. Porém, será na seleção "por meio dos atos que atualizam expressões mediante signos, que a linguagem encontra maneiras de se manifestar" (BICUDO, 2010, p.37).

Aristóteles defendia que o ser social não pode estar alheio à realidade em seu entorno. É preciso se indignar, causar desconforto, se estranhar, para só então contestar. O espanto (E) é o ponto de partida para a formulação crítica e racional. A dúvida (D), a segunda atitude filosófica, é a revelação de um pensamento oposto ao percebido. Ela é desencadeada após o indivíduo tomar consciência da estranheza, da perplexidade ao que o incomoda, para então, passar a discordar do que está posto. O rigor (R), terceira atitude filosófica, consiste em estabelecer argumentos convincentes que garantam a coerência, a não contradição e a veracidade das informações, consiste no ato de "colocar em xeque" o conhecimento. Todavia, é necessário que o indivíduo "visite" sempre as respostas obtidas, para avaliar e duvidar de suas próprias conclusões e certezas. Essa insatisfação(I) garante o sucesso provisório das suas atitudes, ou um resultado preciso. Pode-se detectar indícios da importância do conjunto das quatro atitudes filosóficas - EDRI – para o paradigma do questionamento do mundo, que Chevallard defende:

> A investigação exige suposições por parte do investigador e de certa forma "a incorporação" de certas atitudes que se revelam decisivas na mudança de paradigma didático escola-universidade ainda dominante, o da "visita às obras", ao paradigma emergente conhecido como do "questionamento do mundo" (CHEVALLARD, 2012, p.4, **tradução nossa**).

Essa afirmação revela que não passou despercebido, aos olhos de Chevallard, a importância das atitudes filosóficas para o modelo do paradigma emergente. Inferimos que ao descrever as cinco atitudes: problematizadora, herbartiana, procognitiva, exotérica, da enciclopédia comum (CHEVALLARD, 2012, p.4-5) para objetivar a mudança do paradigma nas escolas e nas universidades, ele apresenta uma releitura das atitudes filosóficas defendidas por Aristóteles.

Em um sentido filosófico, as atitudes imprimem ao olhar um espanto e um rompimento com o senso comum, com o trivial, diante de uma realidade. Por esse motivo, as atitudes podem ser auto-organizáveis e criativas para originar ações, que são as escolhas e as decisões tomadas em ato e que ajudarão a solucionar uma situação. Durante o processo de seleção de atitudes e de ação o interpretante faz inúmeras correlações entre pensamentos (signos) e objetos em que produz infinitas semioses, que são as interpretações que realiza ao e se deparar com uma situação. Estas duas componentes promovem um rompimento das crenças coletivas e possibilitam gerar outras. Nesse sentido, "a criatividade constitui um processo de auto-organização, no qual o raciocínio abdutivo ocorre, possibilitando a expansão de crenças bem estruturadas" (GONZALEZ; HASELAGER, 2002, p.28).

Assim, a matriz MD é constituída por MD = $\begin{bmatrix} Criatividade \\ Interpretações \\ Atitudes \end{bmatrix}$ e na análise de cada encontro agrupamos as informações para entender os significados mobilizados pelos estudantes.

Primeiro e Segundo Encontros:

Estes encontros, ocorreram em dois turnos com o objetivo de socializar os treze estudantes presentes e os orientar a respeito do curso. Os diálogos foram ricos e a linguagem foi descontraída, pois não houve a empregabilidade de conceitos, regras e símbolos matemáticos. Para este ensaio, fizemos alguns recortes das falas dos estudantes e optamos por transcrevê-las preservando suas identidades e as identificamos pela letra E, oriunda da palavra estudante, seguida de um número que registra a ordem em que se expressaram durante o discurso.

Neste primeiro momento, buscamos entender as crenças e a percepção dos estudantes da matemática, se ela pode ser considerada criativa, o que entendem quando usam palavras, como: exatidão e formalidade e, por fim, a aplicabilidade dos objetos matemáticos. Nos registros orais foi possível detectar as primeiras distinções de significados dos estudantes da Licenciatura Matemática e das Engenharias quanto a Matemática, enquanto um se atenta para os objetos matemáticos em uma versão científica, o outro os veem em sua aplicabilidade, constatados nas falas dos estudantes:

> *$Q_{1.5}$: Vocês já pensaram em Matemática como algo criativo? Pergunta a investigadora*
> *$R_{1.5.1.}$ Eu vejo a questão da imaginação associado as coisas que os engenheiros civis fazem. Está associado a curiosidade, a imaginação e a inovação. Em relação à matemática, nós temos mais imaginação do que outros estudantes que conseguem pegar a matéria, temos mais facilidade. Por exemplo, nós conseguimos enxergar um plano, um cubo, como uma equação tripla para calcular o volume com mais facilidade. A gente consegue visualizar a construção de um prédio, como vai ser, quais problemas podem ocorrer e conseguir resolver essas problemáticas melhorando. Então a gente tem o potencial pela imaginação de criatividade maior. Responde o estudante E_5 da engenharia civil.*
> *$R_{1.5.2.}$ Você está perguntando se o potencial criativo é criar a partir da matemática? O matemático faz sem saber para que vai servir aquilo um dia. Para criar cálculo, às vezes, a gente cria no escuro sem saber. Nem sabe que criou. A priori, desconhece. Responde E_3.*
> *$R_{1.5.4.}$ Há um contraste da matemática tanto para licenciatura quanto para a gente que é um pouco mais a aplicabilidade. Então para a gente é mais fácil enxergar. O caso do engenheiro civil vai fazer os cálculos e saber quanto de massa vai usar para fazer a viga (aquela que o colega falou...). Ou então, usar em projetos elétricos ou ambientais. Para a gente é a aplicabilidade, para vocês, já não e tão visto. Então, a gente tem uma deficiência tanto em uma área como na outra. Responde E_4*
> *$R_{1.5.5}$. O que estou querendo dizer é que na hora que as pessoas, os matemáticos, estavam criando estas teorias que vocês aplicam, não estavam imaginando o potencial criativo da criação em si. Responde $E_{3.}$*
> *$R_{1.6.1}$. Eu penso na criatividade de forma pedagógica, explicar um assunto de forma diferenciada. Por exemplo, criar um jogo, uma estratégia de aplicação. Eu vejo assim. Eu sei que tem outras formas de ver. Mas na licenciatura eu vejo a criatividade como uma forma de explicar o assunto da aula, uma didática diferente, sei lá...Uma abordagem diferente. Eu vejo criatividade nesse sentido. Responde E_6*

Em análise aos discursos dos estudantes verifica-se que as semioses produzidas geram interpretações vinculadas às graduações em que estão inseridos; à empregabilidade dos objetos matemáticos e ao currículo. A estudante E_3 deixa explícito que: "*que na hora que as pessoas, os matemáticos, estavam criando estas teorias que vocês aplicam, não estavam imaginando o potencial criativo da criação em si",* a argumentação tecida mostra aspectos de uma atitude herbatiana[54] ou de dúvida, pois revela um pensamento oposto ao percebido, bem como, uma atitude procognitiva ou de rigor quando articula inferências coerentes para sustentar a opinião pessoal sobre o tema.

A atitude procognitiva ou de rigor volta a aparecer na oralidade do estudante E_4 quando ele coloca em xeque o conhecimento ao expressar que "*Para a gente é a aplicabilidade, para vocês, já não e tão visto. Então, a gente tem uma deficiência tanto em uma área como na outra.*" Ao trazer a deficiência das áreas, o estudante levanta um aspecto interessante sobre o currículo e as lacunas do saber nas graduações, o que também pode causar estranheza, espanto, uma atitude problematizadora diante da restrição pontuada.

A percepção do estudante E_6 explicita uma outra interpretação para o questionamento da pesquisadora, ao trazer a questão das organizações didáticas como um fator promissor para a produção da criatividade no exercício de sua profissão.

No período vespertino as atividades foram voltadas para a explicação de como seriam as organizações didáticas do curso e o desenvolvimento do PEP. Ao final da abordagem a investigadora apresentou aos estudantes a questão geratriz do PEP: **Como as obras de Antoni Gaudí resistiram às intempéries do tempo?**

O estudante E_6 se manifesta: *"sabia que a coisa não seria tão simples! Como em uma obra de arte identificarei um conteúdo matemático?"*. O questionamento do aluno mostra uma preocupação relativa ao ambiente da Matemática, que a todo momento busca um objeto para produzir significados ao usar praxeologias matemáticas (tarefa, técnica, tecnologia e teoria). A afirmação nos faz inferir que há atitudes de espanto, de dúvida, de rigor e de insatisfação no registro oral expresso, manifesto ao articular a existência na arte gaudinense de aspectos matemáticos não explicitados na questão gerada.

O estudante E_7 apresenta uma conclusão: *às vezes dá a impressão de que a gente não sabe nada, né?"*. Inferimos que isso acontece devido a forma fragmentada em que o conhecimento é apresentado ao estudante, sem articulação com o seu entorno que causa a impressão de que é necessário apenas aplicar as técnicas do tema matemático, sem justificá-las, para que a aprendizagem se concretize, fato que podemos identificar como atitudes do EDRI.

---

[54] Chevalard (2012) define como uma "atitude receptiva em relação as perguntas não respondidas e problemas não resolvidos, que normalmente é a atitude do cientista em seu campo de investigação e deve tornar-se do cidadão em todos os domínios de atividades".

O estudante E_8 não tem conhecimento das obras de Antoni Gaudí e então expressa: *"Professora, podemos inicialmente conhecer as obras do artista e então identificar alguma relação com a matemática."* Tal afirmação traz para a cena do diálogo a atitude procognitiva, pois colabora para o surgimento das duas questões subsidiárias do PEP: Q_1: Quem foi Antoni Gaudí? e Q_2: Quais suas obras?

A emergência de questões subsidiárias está de acordo com a estrutura do PEP, como descrevemos é um percurso de indagações que construímos em conjunto com os estudantes, em busca de uma resposta para uma questão geratriz. Destacamos que esse dispositivo didático pode ser aberto ou fechado[55] quanto ao seu período de execução. A escolha por um PEP mais restrito que foque em um tema matemático está relacionada a algumas restrições: o número de encontros previstos; a carga horária proposta; a ausência de um vínculo institucional da pesquisadora (no período) com aqueles estudantes para ser desenvolvido em um tempo mais extenso e as dificuldades dos estudantes em conciliar o tempo de estudo das graduações com o curso.

A análise das restrições nos fez concluir que a função didática da cronogênese, em que "o tempo didático é assim reduzido a um pequeno número de encontros, que fixam o ritmo coletivo de estudo" (CHEVALLARD; LADAGE; 1999, p.6), foi um aspecto decisivo na escolha do tipo de PEP a ser aplicado.

Após a conclusão dos trabalhos daquele dia retornamos de ônibus para a Universidade do Sudoeste da Bahia (UESB). Durante o percurso, os estudantes estavam mais socializados e as conversas fluíram sobre temas diversos, inclusive sobre o curso. Um dos estudantes mencionou: "*estou animado para as outras etapas deste curso. Achei muito interessante!"*. Os outros estudantes concordaram com o colega.

A síntese no Quadro 1 retrata a Matriz Diversidade (MD) com os elementos: criatividade, interpretações e atitudes produzidas pelos estudantes no transcorrer do primeiro e segundo encontros.

[55] O professor pode impor um certo percurso que leva a classe a conhecer (e confrontar) as noções matemáticas escolhidas previamente por ele. Mais sutilmente, o professor pode ter escolhido a pergunta para investigar de tal maneira que, sob as restrições vigentes, o percurso passe por esta ou aquela obra matemática. No primeiro caso, falo de um percurso fechado; no segundo, de um percurso semiaberto. Chamarei aberto um percurso em que o papel desempenhado pelo professor é puramente negativo, no sentido de que o professor, como "chefe de investigação", conforma-se com impor de vez em quando a decisão de não ir encontrar tal ou qual obra, que lhe parece estar ainda fora do alcance do grupo de estudantes. Só neste caso falarei de percurso aberto. (CHEVALLARD, 2017, p. 168-169, tradução nossa).

Quadro 1- Matriz Diversidade do primeiro e segundo encontros (MD_1)

	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
MD_1	Criatividade	*- Para os futuros engenheiros: matemática aplicada ao exercício da profissão* *- Para os licenciandos em Matemática: emerge da criação das teorias e dos teoremas, bem como, de uma metodologia de ensino diferenciada para as aulas.*
	Interpretações	*- Abordam sobre o currículo e as perspectivas diferentes para os cursos da graduação.* *- A necessidade de relações do CDI com situações reais no curso das Engenharias.*
	Atitudes	*- Problematizadora ou do Espanto* *- Herbartiana ou da Dúvida* *- Procognitiva ou do Rigor* *- Exotérica ou da Insatisfação*

Fonte: Brandão, 2021, p.207

Durante a semana o grupo de WhatsApp intitulado Integre + ação foi criado e foram postados pelos estudantes vídeos retirados da busca realizada em sites que tratavam das obras e vida de Gaudi, também, foi divulgada, pela investigadora, a programação para o terceiro encontro.

Terceiro Encontro:

O terceiro encontro ocorreu em um auditório de uma Instituição pública em que o curso da Licenciatura em Matemática funciona. Doze dos treze alunos compareceram e houve outros participantes (voluntários do grupo de pesquisa e convidados). A organização didática elaborada pautou em uma mesa temática composta por um engenheiro civil, um engenheiro eletricista, uma engenheira ambiental, dois professores: um de matemática e outro de física e um arquiteto. O tema proposto para a discussão foi: “Interação do Cálculo Diferencial e Integral com as diferentes áreas de conhecimento: possibilidades e perspectivas”.

A engenheira ambiental destacou a importância das Integrais definidas no cálculo da medida da área alagada da barragem do rio Bonito, mostrou o mapa da barragem com o *google maps*, a planificação da área e a coleta de pontos para inserir em um plano cartesiano para, posteriormente, analisá-lo e ajustá-lo com a utilização do *software graph*, explicou a necessidade de rotacionar a figura para obter as demais áreas e de utilizar, várias ferramentas para obter os dados como, por exemplo o GPS.

O engenheiro eletricista apresentou um projeto de rede de distribuição de energia elétrica urbana em que o uso de Integrais Duplas estava presente no dimensionamento de estruturas (postes, entre outras), nos cabos de suspensão, equação de cabos suspensos, equação das catenárias, efeitos do peso nos cabos, sobrecargas adicionais, parâmetros condutores, variação de temperatura, variação com a elasticidade, Lei de Hooke, equação de mudança de estado e tabela de flechas.

O professor de Matemática situou a modelagem computacional como uma das ferramentas eficaz para transformar um problema físico em um modelo matemático. Mostrou alguns projetos de iniciação científica que coordena e orienta, aplicados em um curso de engenharia que envolvia o estudo do comportamento de equações diferenciais aplicadas ao fluxo de água no maciço de uma barragem de terra; verificação e avaliação do comportamento das EDO que regem um sistema de percolação no maciço de uma barragem de terra; estudo de modelos matemáticos aplicados ao fluxo de entrada e saída de água em barragens de abastecimento; simulações numéricas e computacionais de modelos matemáticos aplicados ao gerenciamento de recursos hídricos e estudo de modelos matemáticos aplicados a dispositivos eletrônicos.

O quarto palestrante, professor e engenheiro civil, discorreu sobre como se sentia na universidade ao estudar CDI sem a articulação com a prática e, acrescentou que só conseguiu entender a aplicação quando avançou nas componentes curriculares de resistências de materiais e análise de estruturas. Discorreu ainda a respeito da importância das Integrais para o estudo de vigas, de construção de pontes e de prédios.

O arquiteto explorou a questão do que é um projeto arquitetônico para destacar o uso do ponto, da linha e da forma e das etapas de um projeto: concepção, forma e função e a execução. Destacou a importância das superfícies, das projeções ortogonais para representar as formas tridimensionais na concepção do projeto e para a produção, além de destacar que a Integral pode estar presente na área, no volume, no dimensionamento de peças e na logística.

O professor de física falou da interação do Cálculo Diferencial e Integral com a Física: possibilidades e perspectivas. Inicialmente, abordou a questão histórica do Cálculo e como a física estava presente, por meio do limite, da taxa de variação, da eletricidade, do magnetismo, da massa, da inércia, do fluxo total de campos eletromagnéticos, da força gravitacional, das equações de Marxwell, da lei da eletricidade e do magnetismo de Gauss. Lei da indução de Faraday, Lei de Ampere e de Marxwell.

Ao final do debate os estudantes fizeram perguntas aos palestrantes, das quais destacamos:

E_3: Professor, as equações catenárias são utilizadas nas redes mais complexas?
Professor: Não. Para rede primária. A rede multiplexada agora está vindo com um cabo de aço, pois a dilatação é bem menor do que com o cabo de alumínio.

É possível perceber a interpretação e as semioses que o estudante estava tecendo em sua mente ao registrar sua fala. O estudo das obras de Gaudí conduziu o estudante a tecer uma articulação entre as catenárias presentes nas construções gaudinenses e a aplicação na área da graduação do interpretante. O signo catenária é associado ao objeto matemático – equações – ao realizar uma interpretação pragmática da Engenharia Elétrica. A ação do pensamento do estudante E_2, revelada a partir da articulação dos conhecimentos, apresenta indícios de que a aprendizagem do objeto extrapolou as praxeologias matemáticas e o direcionou para as praxeologias determinadas por uma situação, que podem ou não compreender o campo matemático.

Ao final de um pequeno intervalo os estudantes retornaram para o auditório no intuito de trazer respostas para as perguntas Q_1 e Q_2, em que levantaram várias articulações com as obras de Gaudí, registrada no seguinte diálogo:

P: Solicitei que vocês pesquisassem as obras e tentassem produzir significados com os cursos de vocês. Quem gostaria de falar sobre o que pesquisou?
E4: Eu pesquisei e achei alguns artigos em espanhol falando sobre a utilização da catenária em pontes.
P: Vocês viram que hoje o professor Danilo também falou sobre a catenária. Quando mencionou que o fio condutor da rede elétrica de um poste para outro tem a forma curva da catenária.
E4: Eu vi. E lembrei que na ponte ocorre o mesmo, a força de tração faz com que os fios da ponte tomem um formato de uma catenária.

As respostas obtidas revelam as interpretações realizadas pelo estudante E_4 ao realizar a pesquisa, mas também é possível detectar que há as quatro atitudes: espanto, dúvida, rigor e indignação, bem como, estabelece uma relação do objeto matemático com o mundo.

P: Isso. Vocês chegaram a ver a diferença entre a parábola e a catenária?
E4: Ela é diferente porque a catenária descreve um conjunto de funções.
P: Acho que tem outros elementos, que talvez os estudantes da Engenharia Civil poderiam trazer para mim.
E7: A gente viu também que Gaudí tinha um padrão nas estruturas dele. Ele usava bastante as estruturas treliçadas, no Templo da Sagrada Família e na Cripta é possível verificar. E a gente sabe que essas estruturas conseguem distribuir melhor as tensões, como se fosse uma estrutura linear.
P: Exatamente. A questão da diferença entre a catenária e a parábola, alguém sabe me dizer?

E1: Acho que é porque uma é um cosseno hiperbólico e a outra é um polinômio de segundo grau.
P: Tá. Você está olhando matematicamente, ótimo! Como pedi para que vocês produzissem significados a partir do curso de vocês. Mas existe uma diferença! Muitos professores de matemática ao abrir alguns livros se deparam com uma figura de uma ponte ligadas por arcos e colocam como se fossem exemplos de parábolas. E não são!
E1: Eu tenho uma dúvida: Tem alguma coisa a ver com a distribuição de massa igualmente na parábola do que na catenária?
P: Isso! Você acabou de responder. É como se na parábola ela fosse mais chata, ou seja, a força aplicada, a distribuição das flechas na catenária e na parábola são diferentes. Na parábola quando chega no seu centro a força da gravidade exerce mais força, por isso, que a parábola fica mais certinha, mais arrumadinha, às vezes, simétrica e a carga é distribuída uniformemente em linha reta. Enquanto, que nas catenárias a carga é distribuída uniformemente em torno do seu comprimento com o objetivo de equilibrar o sistema.
E2: Quando eu cheguei aqui hoje, a primeira coisa que eu perguntei ao arquiteto foi isso: se o arco parabólico era igual ao arco catenário? Ele virou para mim e falou: não! Ele me disse: Deixa, eu te explicar: se você cortar um cone assim, horizontalmente, eu teria uma parábola. Lógico pegando apenas uma parte do arco. Mas e se eu cortasse assim (mostra com a mão, a posição mais inclinada) eu teria uma catenária.
P: Acho que tem um equívoco que preciso constatar: para mim, a secção do cone se for horizontal é uma circunferência. E você terá um arco parabólico, se o plano for seccionado paralelamente a geratriz do cone.

Nesse relato podemos identificar que existe uma ação do sujeito E_2, que buscou respostas para os conhecimentos adquiridos com o arquiteto, com uma atitude que revela característica da EDRI caracterizada por uma semiose que aparece diante da dúvida e o leva a uma atitude de ser protagonista da construção de um conhecimento que ele desejou e que emergiu da situação de confronto entre dois conceitos que são tomados como semelhantes.

Foi possível detectar que os estudantes ao fazerem a pesquisa sobre o tema obtiveram dados que extrapolavam as questões propostas inicialmente, ampliaram o tema e trouxeram novos questionamentos, leituras e escritas que são alguns aspectos denominados por Chevallard (2012) como dialéticas.

Em síntese, a dialética do estudo e pesquisa são as fontes que são requisitadas, como: mídias, artigos, entrevistas. A dialética do indivíduo e do coletivo consiste nos diálogos, acordos que o estudante estabelece com a comunidade de estudo. A dialética da análise e síntese praxeológica são procedimentos de análise e síntese ocorrem no decorrer das decisões tomadas e são denominadas de praxeologias econômicas. Elas emergem da escolha coletiva do que, quando e como irão estudar as praxeologias (matemáticas, didáticas ou de outra área). A dialética do tema e fora do tema consiste na seleção das informações obtidas na pesquisa buscando "garimpar" as que contribuem ou não para a resposta. A dialética do paraquedista e dos buscadores de trufa tem como objetivo nortear as pesquisas para não distanciar demais do tema proposto quando buscam em outras áreas do conhecimento.

A dialética das caixas pretas e brancas seleciona as informações com clareza do que tem relevância ou não para a pesquisa. A dialética da leitura e da escrita consiste no registro escrito das leituras realizadas durante o percurso. A dialética da mídia e dos meios são os locais em que são acessadas as informações, mas também é o momento que são estabelecidas as conjunturas, os argumentos pautados nos cânones científicos. A dialética da difusão e da recepção é o momento em que o conhecimento é compartilhado, em que a resposta é recebida e difundida entre a comunidade e a dialética dos objetos ostensivos e não ostensivos aquela em que os registros de representações dos objetos são acionados para que eles possam ser visualizados e manipulados por meio das técnicas. Brandão (2021) inclui a dialética da pessoa e da situação em que consiste em atitudes e ações a serem tomada por um sujeito ou por um grupo em uma circunstância.

No PEP executado foi possível identificar as dialéticas: estudo e pesquisa, leitura e escrita, indivíduo e coletivo, da análise (e síntese) praxeológica e da análise(e síntese) praxeológica didática, do tema e fora do tema, do paraquedista e buscadores de trufas, das caixas pretas e brancas, da leitura e escrita, da mídia e do meio, dos objetos ostensivos e não ostensivos (no registro escrito que eles apresentaram, havia a representação algébrica das catenárias), bem como, a dialética do indivíduo e da situação elaborada por Brandão (2021). Este conjunto promove uma análise dos dados obtidos no desenvolvimento do PEP.

As percepções dos estudantes dos significados, das interpretações e as atitudes que emergiram no diálogo durante o III° encontro foram sintetizadas no Quadro 2.

Quadro 2- Matriz de Diversidade do III° encontro

	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
MD3	Significados	• *Para os futuros engenheiros: Identificam os objetos matemáticos em estudo, na construção de telhados, barragens, redes elétricas. Mas demonstram também conhecimento no campo interno do componente curricular.* • *Para os licenciandos em Matemática: a visualização dos objetos matemáticos em situações externas ao seu campo.*
	Interpretações	• *Dentro do próprio campo da matemática quando associam as superfícies quádricas com outros objetos matemáticos.* • *Relacionam as formas encontradas nas obras de Gaudí com os objetos matemáticos e os representam na forma algébrica e gráfica.* • *Mobilizam objetos não ostensivos que mediam o papel desempenhado pelo registro dos ostensivos.*
	Atitudes	• *Problematizadora ou do Espanto* • *herbartiana ou da Dúvida* • *Procognitiva ou do Rigor* • *Exotérica ou da Insatisfação*

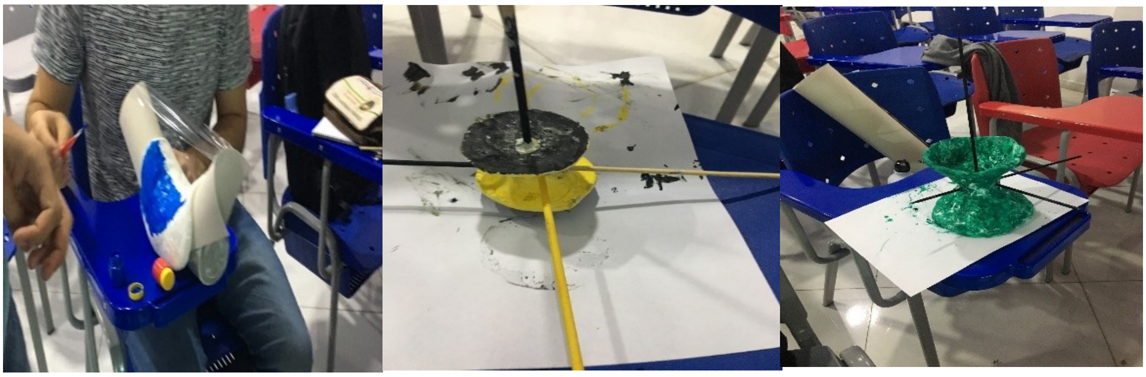
Fonte: Brandão, 2021, p. 379

Ao final do terceiro encontro foram propostas duas questões: Q_3: Quais formas tridimensionais você consegue identificar nas obras de Gaudí? Q_4: Quais relações podem ser estabelecidas entre o CDI, as obras de Gaudi e o curso em que você está matriculado?

Quarto encontro:

Iniciamos as atividades com a construção de sólidos que apresentassem semelhanças com as obras de Gaudí. Para a realização da tarefa os estudantes utilizaram massa acrílica, palitos de picolé e de churrasco, tinta e papel que são mostrados na Figura 4.

Figura 4 – Sólidos construídos pelos participantes do curso.



Fonte: Brandão, 2021, p. 383

Ao final, fizeram a exposição dos sólidos construídos e então a investigadora solicitou as respostas dos estudantes para as questões Q_3 e Q_4. A respeito da questão Q_3 apresentaram respostas que versavam sobre as estruturas físicas das obras de Gaudí e a relação com as Superfícies Quádricas ao mencionarem: elipsoide, paraboloides, hiperboloides, helicoides, bem como, espirais e arcos de catenárias. Um dos estudantes mencionou a impressora 3D como uma tecnologia capaz de reproduzir sólidos em espaços tridimensionais que nos conduziu a uma entrevista com um professor do interior da Bahia que desenvolve pesquisa com esse tipo de impressora.

Acerca das respostas à Q4 registramos, resumidamente, os relatos dos estudantes, de acordo a graduação que pertencem:

a) os futuros engenheiros elétricos associaram a luminosidade com a disposição das cores do azul e do branco no emprego de lajotas nas paredes internas da Casa Batlló.
b) os graduandos em engenharia ambiental destacaram o aproveitamento dos pedaços desses ladrilhos para formação de mosaicos; o estudo da melhor posição no terreno para a construção arquitetônica com a observação da corrente marítima do Mar Mediterrâneo. Nesse momento, foram interrompidos por um dos futuros engenheiros elétricos que acrescentou o impacto, atualmente, na economia de energia elétrica, com tal escolha. Ao retorno da palavra, destacaram ainda, a estabilidade do solo e a forma de aproveitamento dos espaços para avaliar os ricos de danificar a natureza, como ocorreu no Parque Güell. Relataram, ainda, a composição química do tipo do gesso que Gaudí usava para dar forma que a deixavam estável e resistente.
c) os estudantes da engenharia civil destacaram o emprego do ferro fundido, que Gaudi usava em suas instalações, a preocupação com o equilíbrio dos centros de massa das formas espaciais usadas ao destacar a importância dos cálculos estruturais que Gaudí mostrou ter bastante conhecimento.

Após o momento de exposição das respostas de Q_3 e Q_4 pelos estudantes iniciamos uma revisão dos conteúdos de Superfícies Quádricas e da Integral Dupla que fizeram surgir perguntas subsidiárias, entre elas:

Q3.1. O que é uma superfície?

Q3.2. O que distingue uma superfície de uma área?

Q3.3. Só existem Superfícies tridimensionais?

Destacamos que em Q3.3. uma estudante perguntou:

Q3.3.1. Em espaços acima de três dimensões como essas formas são representadas?

Q3.4. Qual a relação entre: a elipse e o elipsoide? A hipérbole e o hiperboloide? E entre a parábola e o paraboloide?

Q3.5. Quais os tipos de espirais?

Q3.6.1. O que distingue a catenária da parábola?

Q3.6.1.1. O que é um catenóide?

Ao longo da exposição oral as questões eram respondidas pelos estudantes com o uso de uma linguagem natural e a investigadora convertia para uma linguagem formal e simbólica da matemática no quadro de escrever. Alguns deles trouxeram as pesquisas em papel com registro de representações gráficas e algébricas das Superfícies Quádricas. Destacamos que, para explicar o formato do paraboloide hiperbólico, utilizamos como material uma batata frita que tem esse formato e é comercializada em uma embalagem cilíndrica. Depois as oferecemos para que saboreassem aquelas curvaturas, comendo-as.

Após o intervalo retornamos com as seguintes perguntas:

Q3.7. Como faríamos para calcular a medida da área e do volume desse sólido que construíram?

Apenas um aluno arriscou uma resposta ao sugerir o uso de Integral, no entanto, quando perguntado:

Q3.7.1. Me explique aqui, nesse sólido, como você faria?

A investigadora pegou um dos sólidos construídos e apontou na direção do estudante, que se levantou, pegou o sólido e balançou a cabeça afirmando não saber.

Outro estudante sugeriu que fizesse uma somatória de quadrados, como se faz na soma de Riemann, ao que a professora questionou:

Q3.7.2. Mas porque quadrados?

Q3.7.3. O espaço não é tridimensional?

Então, o primeiro aluno questionado respondeu que poderiam ser cubos ou paralelepípedos e um outro disse lembrar de algo assim em CDI -III.

A investigadora pegou alguns palitos de picolé, previamente, colados e mostrou um paralelepípedo e perfurou o sólido para mostrar, por simulação, uma noção do processo do cálculo da medida da área, ou do volume de um sólido. Então, pergunta-lhes:

Q3.7.4. Quantos paralelepípedos poderíamos colocar para uma resposta mais precisa?

Um estudante da licenciatura responde que usaria um limite tendendo ao infinito para uma aproximação mais precisa.

Q3.7.5. Uma aproximação mais precisa de que?

O estudante volta a responder dizendo ser do número de paralelepípedos que deveria ser usado, com a medida de seus lados bem pequenos, quase próximo do zero.

Q3.7.6. E depois?

Um outro estudante responde:

E_3: Se na Integral de Riemann usávamos a somatória, faremos o mesmo.

No entanto, a investigadora questiona:

Q3.7.7. Mas é possível fazer isso com uma Integral?

Uma estudante afirma:

E_6: Acho que sim, mas usando as Integrais Duplas ou Triplas.

Neste momento, a investigadora faz uma revisão de Integral Dupla com suas técnicas e as tecnologias que compreendem a teoria. Um dos estudantes comenta:

> *E_2: Pró, quando pesquisei a relação das obras de Gaudí com a minha graduação, vi que o centro de massa é responsável pelo equilíbrio das estruturas nas construções. Lembrei que em CDI-II vimos que tem relação com a Integral.*
> *P: Muito bem, seu raciocínio foi bem articulado e tem sim. Então, quais perguntas poderíamos formular?*

Espontaneamente surgiram Q_5, Q_6 e Q_7:

Q5. O que é um centro de massa?

Q6. O que é um momento de inércia?

Q7. Qual a influência das Integrais Duplas nas Superfícies Quádricas usadas nas obras de Gaudi?

No Quadro 3, registramos a análise dos significados, das interpretações e das atitudes dos estudantes no quarto encontro.

Quadro 3– Matriz da Diversidade do IVº encontro

	Elementos da Matriz	Especificação na Situação
MD_4	Significados	• *Compreenderam a definição abstrata da Integral Dupla por intermédio da construção de um objeto de aprendizagem manipulável.* • *Produziram situações-problemas criativas e relevantes para o CDI e mobilizaram praxeologias matemáticas coerentes.*
	Interpretações	• *Dentro do próprio campo da matemática quando associam as superfícies quádricas com a Integral Dupla.* • *Relacionam as formas dos objetos de aprendizagem criados com as superfícies quádricas, com objetos matemáticos e com as obras de Gaudí.* • *Mobilizam objetos não ostensivos que mediam o papel desempenhado pelo registro dos ostensivos.* • *Relacionam: situação, praxeologias e registros dos objetos ostensivos coerentemente.*
	Atitudes	• *Problematizadora ou do Espanto* • *Herbartiana ou da Dúvida* • *Procognitiva ou do Rigor* • *Exotérica ou da Insatisfação*

Fonte: Brandão, 2021, p.394

Quinto Encontro:

O quinto encontro foi iniciado com um vídeo de uma entrevista com o professor Afonso Henriques em que discorreu e mostrou o funcionamento de uma impressora 3D para a construção de crivos que representam fisicamente sólidos geométricos. Essa atividade foi incluída por conta da resposta do estudante que abordou o uso da impressora 3D e que despertou o interesse dos outros participantes.

Em seguida, discutimos as pesquisas que realizaram em torno do centro de massa e do momento de inércia que gerou o seguinte diálogo:

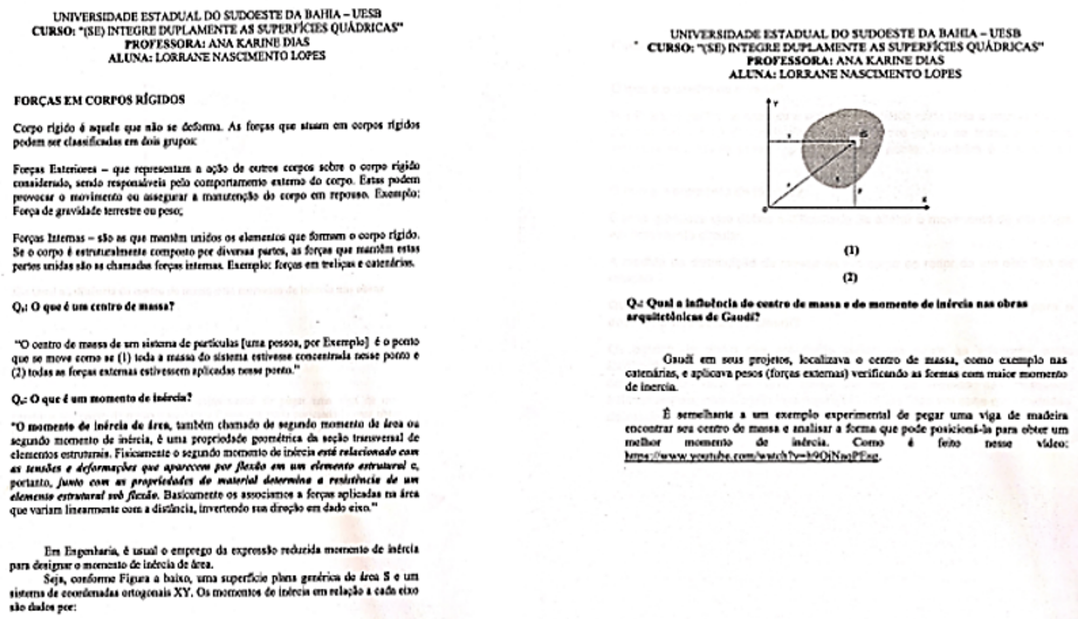
P: Vamos iniciar o encontro com as respostas Q_5, Q_6 e Q_7?
E_7: Professora eu achei interessante que quando estudei as Integrais Duplas eu não vi essa parte da aplicação.
E_{10}: Eu também não vi lá.
P: O conteúdo de Cálculo 3 lá no IFBA é realmente muito extenso. É o Cálculo 3 e 4 da UESB. Mas queria direcionar para as respostas. Como pensaram?
E_1: Eu escrevi primeiramente sobre corpo rígido e as forças externas e internas que atuam neste corpo. Em seguida expliquei o que era centro de massa e momento de inércia.
E_8: Também fiz o mesmo, mas coloquei a fórmula para se calcular cada um deles e então observei que faz uso da Integral Dupla.
E_{11}: Eu também fiz o mesmo que E_1, mas não coloquei a relação com a Integral.
E_6: Eu também não fiz!

Fonte: Áudio-gravação realizada no dia 27/04/2019

Na oralidade os estudantes divulgaram o que haviam investigado e relataram que a aplicação da Integral Dupla em seus cursos da graduação nem sempre é explorado. Inferimos que existe uma relação inversamente proporcional entre praxeologia matemática e praxeologia situacional (BRANDÃO, 2021), quando uma é demasiadamente explorada a outra fica relegada a um segundo plano. É necessário que haja um equilíbrio entre elas, pois os benefícios para o ensino quando as organizações didáticas são planejadas para desafiar o estudante a questionar consistem em atitudes emancipatórias.

A Figura 5 mostra o registro escrito do estudante E_1 em que as dialéticas: do estudo e da investigação e a dialética da pesquisa e da resposta foram identificadas. O raciocínio usado é dedutivo e não apresentou mobilização de objetos ostensivos e não ostensivos associados a praxeologia matemática.

Figura 5 - Protocolo do Estudante E_1



UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
CURSO: "(SE) INTEGRE DUPLAMENTE AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS"
PROFESSORA: ANA KARINE DIAS
ALUNA: LORRANE NASCIMENTO LOPES

FORÇAS EM CORPOS RÍGIDOS

Corpo rígido é aquele que não se deforma. As forças que atuam em corpos rígidos podem ser classificadas em dois grupos:

Forças Exteriores – que representam a ação de outros corpos sobre o corpo rígido considerado, sendo responsáveis pelo comportamento externo do corpo. Estas podem provocar o movimento ou assegurar a manutenção do corpo em repouso. Exemplo: Força de gravidade terrestre ou peso;

Forças Internas – são as que mantêm unidos os elementos que formam o corpo rígido. Se o corpo é estruturalmente composto por diversas partes, as forças que mantêm estas partes unidas são as chamadas forças internas. Exemplo: forças em treliças e catenárias.

Q_1: O que é um centro de massa?

"O centro de massa de um sistema de partículas [uma pessoa, por Exemplo] é o ponto que se move como se (1) toda a massa do sistema estivesse concentrada nesse ponto e (2) todas as forças externas estivessem aplicadas nesse ponto."

Q_2: O que é um momento de inércia?

"**O momento de inércia de área**, também chamado de segundo momento de área ou segundo momento de inércia, é uma propriedade geométrica da seção transversal de elementos estruturais. Fisicamente o segundo momento de inércia ***está relacionado com as tensões e deformações que aparecem por flexão em um elemento estrutural*** e, portanto, ***junto com as propriedades do material determina a resistência de um elemento estrutural sob flexão***. Basicamente os associamos a forças aplicadas na área que variam linearmente com a distância, invertendo sua direção em dado eixo."

Em Engenharia, é usual o emprego da expressão reduzida momento de inércia para designar o momento de inércia de área.

Seja, conforme Figura a baixo, uma superfície plana genérica de área S e um sistema de coordenadas ortogonais XY. Os momentos de inércia em relação a cada eixo são dados por:

UNIVERSIDADE ESTADUAL DO SUDOESTE DA BAHIA – UESB
CURSO: "(SE) INTEGRE DUPLAMENTE AS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS"
PROFESSORA: ANA KARINE DIAS
ALUNA: LORRANE NASCIMENTO LOPES

(1)

(2)

Q_7: Qual a influência do centro de massa e do momento de inércia nas obras arquitetônicas de Gaudí?

Gaudí em seus projetos, localizava o centro de massa, como exemplo nas catenárias, e aplicava pesos (forças externas) verificando as formas com maior momento de inercia.

É semelhante a um exemplo experimental de pegar uma viga de madeira encontrar seu centro de massa e analisar a forma que pode posicioná-la para obter um melhor momento de inércia. Como é feito nesse vídeo: https://www.youtube.com/watch?v=h9QjNaqPEag.

Fonte: Brandão, 2021, p.396

No protocolo da estudante E_1, ela destaca, em negrito, que o momento de inércia "está relacionado com as tensões e deformações que aparecem por flexão em um elemento estrutural e, portanto, junto com as propriedades do material determina a resistência de um elemento estrutural sob flexão" para mostrar a aplicabilidade nas Engenharias. A construção do raciocínio a ajudou a responder à pergunta Q_7 quando afirmou que Gaudí localizava o centro de massa em seus projetos e citar as catenárias como um exemplo.

Na Figura 6 apresentamos uma síntese elaborada pelos estudantes E_{11} e E_6, respectivamente, para as questões Q_5, Q_6 e Q_7.

Figura 6 – Protocolos dos estudantes E_{11} e E_6

Gustavo Prates de Oliveira

O que é o centro de massa?

Em física, o centro de massas é o ponto hipotético onde toda a massa de um sistema físico está concentrada e que se move como se todas as forças externas estivessem sendo aplicadas nesse ponto. Também é o ponto de equilíbrio.

O que é o momento de inércia?

É uma grandeza que define a dificuldade de alterar o movimento de um corpo em movimento circular.

A medida da distribuição da massa de um corpo ao redor de um eixo fixo de rotação

Qual a influência das integrais duplas e Superfícies Quádricas para o equilíbrio nas obras de Gaudí?

Os pontos de apoio das estruturas superiores sobre as inferiores estão localizados no lugar geométrico referente ao centro de massa, ou seja, o ponto de equilíbrio. Isso se deve muito ao fato do método das maquetes tridimensionais, pois ele utilizava pesos em cordas fixas em suas extremidades, deixando evidente esses pontos e depois era só inverter a maquete.

Respostas para as questões geradoras do último encontro:

O que é um centro de massa?

O centro de massa é uma posição relativa a um ou sistema de objetos. É a posição média de todas as partes do sistema, ponderada de acordo com a massa de cada objeto.

O que é um momento de inércia?

O momento de inércia expressa o grau de dificuldade em se alterar o estado de movimento de um corpo em rotação. Quanto maior for o momento de inércia de um corpo, mais difícil será girá-lo ou alterar sua rotação.

O momento de inércia de um objeto depende de sua massa e da distância da massa ao seu eixo de rotação.

Creio que para gente, interessa-nos somente o momento de inércia de área, ou seja, relacionado com as tensões e deformações máximas que aparecem por flexão em um elemento estrutural, e portanto, junto com as propriedades do material determina a resistência máxima de um elemento estrutural sob flexão.

Qual a influência do centro de massa e do momento de inércia nas obras arquitetônicas de Gaudí?

Bom, creio que por ele usar algumas superfícies quádricas em sua maioria por rotação, o momento de inércia está aí presente. Além disso, em alguns arcos catenários podemos ver claramente a influência desses conceitos.

Quando nos referimos ao módulo resistente de uma superfície plana em relação a algum eixo que contém o centro de massa ou de gravidade, nada mais é que a razão entre o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo centro e a distância máxima entre o eixo e a extremidade da seção estudada, muito importante para a resistência de materiais, a exemplo, a viga, pois a viga mais apropriada a um projeto de engenharia está de acordo com as especificações e critérios sobre o momento de inércia para elaboração de projetos estruturais.

Nas obras de Gaudí, essas forças são bem distribuídas, fazendo assim com que talvez elas estejam de pé até hoje. O fato dele utilizar hiperboloides de uma folha ou o paraboloide hiperbólico em suas obras é devido ao fato dessas superfícies regradas apresentarem vantagens estruturais.

Fonte: Brandão, 2021, p.397

No protocolo do estudante E_{11} vemos que ele relaciona o centro de massa e o momento de inércia com a Física, mas não registra nenhuma relação com o CDI. Embora as definições dadas sejam coerentes, as respostas são superficiais. A respeito das influências dos objetos deste estudo na construção das obras de Gaudí, o discente discorreu sobre o trabalho sistemático em que o arquiteto utilizava maquetes como experimentos, antes da criação de suas obras. Nesse protocolo identificamos as mesmas dialéticas da estudante E_1 acrescidas da dialética do paraquedista e dos buscadores de trufas.

No registro da estudante E_6 é possível identificar as mesmas dialéticas dos estudantes E_1 e E_{11}. No entanto há a presença do raciocínio abdutivo, pois ao associar o centro de massa e o momento de inércia com as obras de Gaudí, ela destacou que "essas forças são bem distribuídas, fazendo assim que talvez elas estejam de pé até hoje". Neste trecho, a discente apresenta indícios de uma possível resposta para Q_0 e ainda complementa: "o fato dele utilizar hiperboloides de uma folha ou o paraboloide hiperbólico em suas obras é devido ao fato dessas superfícies regradas apresentarem vantagens estruturais”. A praxeologia apresentada aqui é situacional, pois a circunstância favorece as articulações entre dois mundos: o dos conceitos e o da arte.

Quadro 4 –Matriz da Diversidade do V° encontro

<table>
<tr><th rowspan="4">MD5</th><th>Elementos da Matriz</th><th>Especificação na Situação</th></tr>
<tr><td>Significados</td><td>• Compreenderam a aplicabilidade da Integral Dupla.
• Produziram discussões relevantes para as situações-problema apresentadas na Atividade 2.
• Estabeleceram a relação entre as obras de Gaudí, as Superfícies Quádricas, o centro de massa, o momento de inércia e as Integrais Duplas.
• Destacam a importância do centro de massa e do momento de inércia com o equilíbrio de forças atuando na arquitetura gaudinense.</td></tr>
<tr><td>Interpretações</td><td>• Dentro do próprio campo da matemática associaram o cálculo do centro de massa e do momento de inércia com a Integral Dupla.
• Mobilizam objetos não ostensivos que mediam o papel desempenhado pelo registro dos ostensivos, representando-os em representações pictóricas, algébricas e gráficas.
• Relacionam: situação, praxeologias e registros dos objetos ostensivos coerentemente para resolver a atividade 2 proposta.
• Os dois grupos de estudantes apresentaram interpretações diferentes para a situação-problema 1, da Atividade 2.</td></tr>
<tr><td>Atitudes</td><td>• Problematizadora ou do Espanto
• Herbartiana ou da Dúvida
• Procognitiva ou do Rigor
• Exotérica ou da Insatisfação</td></tr>
</table>

Fonte: Brandão, 2021, p.410

Justificamos que optamos em não colocar os significados mobilizados pelos estudantes ao responder Q_0 no Quadro 4, porque os utilizaremos para comprovar as hipóteses de nosso estudo e generalizarmos a resposta dada por eles.

A resposta a Q_0:

Tendo chegado ao fim da difusão dos resultados da tarefa, os estudantes foram convidados a responder individualmente à questão Q_0: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? A seguir, transcrevemos os relatos orais dos estudantes.

P: Agora vocês têm condições de me responder à questão Q_0. Quero ouvi-los individualmente, vamos lá?

E_8: Na casa Batlló ele usou a luz natural. Tipo: você usar a natureza a favor e não contra eu acho que ajuda a perpetuar. E o lance da matemática também, porque você vê que ele não usa parábolas e sim catenárias, por conta da distribuição de peso e tudo mais. Eu acho que tudo isso fez com que as obras dele durassem até hoje.
E_{11}: Como ele constrói os modelos tridimensionais através de pesos nas cordas estendidas já cria um sistema fixo de uma estrutura rígida para sustentar e gerenciar essa distribuição de peso.
E_{10}: Esse último tema que falamos, o centro de massa e o momento de inércia foi muito importante porque as obras dele foram coisas propiciais para que tivesse uma linearidade e uniformidade e tivesse um controle. Além das figuras tridimensionais, mesmo que ele estivesse fazendo coisas "anormais" para a sua época, ele se preocupou com os cálculos. Não foi só pelo lado criativo, ele pensou também pelo lado do futuro, pela permanência e preservação deles.
E_6: O estudo dele a gente observa que ele fez tudo antes de aplicar. Então ele sabia o que ia dar certo e como ia dar certo para ficar da melhor maneira possível. Então, foi tudo muito bem calculado, muito esquematizado.
A aluna E_9 interrompe E_6.
E_9: Tudo muito equilibrado, tudo muito cuidado para que tivesse êxito e durasse tanto tempo. Foi bem exato. Tanto que tudo que li sobre as obras dele falava do equilíbrio e da exatidão das coisas (referindo as obras de Gaudí).
A aluna E_6 retoma a fala e complementa.
E_6: E, também, o que a gente viu sobre as áreas. Ele usou Arquitetura, junto com a Matemática e com a Engenharia. Ele fez a junção dessas várias áreas, misturou tudo e deu uma obra.

Fonte: Transcrição das gravações realizadas no dia 27/04/2019.

Interrompemos a descrição para uma análise das cinco primeiras respostas de Q_0 obtidas. Com base nos relatos orais, identificamos alguns significados mobilizados pelos estudantes: os fenômenos naturais que podem deteriorar com a ação do tempo foram aproveitados a favor da preservação das obras do artista; a escolha por formas tridimensionais; a preocupação em manter sempre o equilíbrio das forças que atuam nas obras possibilitou formar estruturas rígidas capazes de resistirem ao tempo; os moldes feitos em sacos de areia e o material utilizado permitiram alcançar o equilíbrio e a exatidão dos cálculos em suas obras; dos objetos da física que são usados pelo arquiteto estão o centro de massa e o momento de inércia.

Ao considerar essas cinco percepções, constatamos que os elementos apresentados pelos estudantes permanecem com uma linguagem contrafactual e em (dis)curso[56] que agrega respostas convincentes e coerentes com Q_0. As atitudes do EDRI foram

[56] A linguagem contrafactual, segundo Brandão (2021) é aquela desprovida de regras, ela emerge da intuição, livre de julgamento e capaz de elaborar novas ideias. Os artistas, os grandes matemáticos a utilizam quando desenvolvem suas obras e seus teoremas. A linguagem em (Dis)Curso é o discurso empregado pelos professores quando criam sua organização didática extrapolando o livro didático, usando outros textos, outras tarefas produzidas por eles de acordo a experiência vivida.

construídas em todo o desenvolvimento do PEP e a praxeologia situacional[57] em conjunto com as praxeologias didática e matemática contribuíram para as interpretações e respostas elaboradas. As funções didáticas também favoreceram o meio, com algumas restrições a respeito da cronogênese, pois o último encontro foi muito profundo em termos de discussões e muitas atividades a serem desenvolvidas em um curto espaço. No entanto, os estudantes conseguiram manter a qualidade das respostas e a motivação até o final do curso.

Na sequência expomos as falas de dois outros participes.

> *E_7: Nas minhas primeiras pesquisas, eu vi que ele dedicou seus últimos anos de vida a construção da Basílica* (o estudante se refere ao Templo Expiatório da Sagrada Família). *A preocupação dele, sendo matemático e sendo arquiteto, era de medir tudo bonitinho e distribuir toda a força e depois capturar aquilo e girar, mostra como ele se preocupava como a obra dele ia perpetuar pela vida toda. Que é o mais interessante! A forma como ele usa as Superfícies Quádricas, no caso dos paraboloides hiperbólicos que ele vai e vira. E aí ontem, eu fiquei pensando: Como é que pode hoje ter tanta cobertura nesse formato?*
> O estudante E_3 interrompe E_7 e fala:
> *E_3: E ser tão resistente!*
> *E_7: Não é? Recentemente hoje o que falei sobre a Basílica de Brasília que também tem esse formato. Eu fiquei lá pensando e aí fui entender a relação entre o centro de massa e a construção das vigas na disciplina de resistência de materiais, que usa os momentos de inércia e o centro de massa e aí você ver arquitetos preocupados com isso. Não somente ele (*refere-se a Gaudí*), mas de outros espanhóis, inclusive de pavilhões lá que eu vi para a questão que eu estava elaborando.*
> *E_3: Tirando a questão física eu citaria a questão das Superfícies Quádricas que é uma marca registrada dele. Porque, por exemplo, se eu visse uma estrutura de um paraboloide e uma toda quadradinha, eu diria que a toda quadradinha durava bem mais. Eu não sabia que algo daquele tipo fosse tão resistente. Então, com certeza, ao utilizar essas formas, essas curvas tão diferenciadas ele propiciou que elas (as obras) continuassem e perpetuassem até hoje. Esse foi o diferencial.*

Fonte: Transcrição dos áudios gravados em 27/04/2019.

As falas destes dois depoentes diferenciam-se das anteriores, no que diz respeito à importância dada por Gaudí às Superfícies Quádricas e a presença do *insigth* do arquiteto em fazer movimentos giratórios com os moldes para preservar o equilíbrio das estruturas. Para além da percepção das obras gaudinenses, o estudante E_7 situa obras atuais com o mesmo formato e expõe a relação dos

[57] Brandão (2021) retrata que existe uma praxeologia associada a situação em que o objeto matemático é empregado, ou seja, um saber - fazer e um saber que são desenvolvidos na sua empregabilidade em diferentes profissões: pelo pedreiro, pelo engenheiro, entre outros, e que necessariamente não precisam das técnicas do saber científico matemático.

conteúdos matemáticos abordados com um componente curricular cursado por ele, resistência de materiais. Outro raciocínio abdutivo que merece destaque está presente na fala do estudante E_3 que comparou as estruturas no formato de paraboloide e de quadrado para concluir que a quadrada lhe parecia mais resistente.

Os dois últimos cursistas também fizeram considerações relevantes para a resposta a Q_0 declarado na oralidade exposta a seguir.

> E_{12}: Tanto que eu conversando com os colegas de Civil sobre iluminação essa parte da luz serviu tanto para a iluminação como para manter o material da estrutura. E, também, esse negócio dele ter desenvolvido a parte dos pesos, que foi algo que ele se preocupou para distribuir, porque ele fez uma coisa incomum. Para ele ter certeza de que ia dar certo, ele fez uma coisa diferente para dar uma relação de exatidão naquela forma.
> E_7: E para além disso, ele ainda se preocupava em estudar a natureza, a anatomia de alguns animais para que o projeto dele não fosse matematicamente rigoroso, aquela coisa crua, feio de olhar. Então, ele se preocupou até nisso, na estética né?
> E_1: Acho que citaram todos os pontos, mas acho interessante citar também a composição dos sólidos que ele faz. Porque ele faz a união entre vários sólidos e deve ser visto como um elemento de resistência porque essa união não é feita do jeito que a gente fala: de qualquer jeito! Foi feita mesmo pensando na resistência, no equilíbrio. Uma coisa interessante, também, é a sutileza que tem dentro da obra dele. Pois a gente olharia e não pensaria que a gente **usaria a Integral Dupla ali para calcular a massa, o centro de massa, o momento de inércia.** Tipo, a gente ia olhar para aquela obra em si, mas não para toda a Matemática que tem por trás. (destaque feito em negrito pelos autores do estudo)

Fonte: Transcrição dos áudios gravados em 27/04/2019

O destaque em negrito, realizado pelos autores deste estudo, estabelece a relação entre as obras de Gaudí, as Superfícies Quádricas, o centro de massa, o momento de inércia e as Integrais Duplas, percepção que ousamos inferir ao visitar as construções físicas do artista.

As respostas dos estudantes não são únicas, consistem em uma família de soluções plausíveis que estariam sob a perspectivas de outros: olhares, estudos, profissionais, estudantes, áreas, entre outros. Quando realizamos um experimento aberto, temos a consciência de que a amplitude de conhecimentos que podem ser mobilizados para a constituição de uma resposta é vasta e, por isso, consideramos as sínteses dos discentes como algo muito relevante e que retrata o desenvolvimento do PEP.

7.4 Algumas considerações

No desenvolvimento do PEP trilhamos um percurso incerto, em que muitas vezes nos sentimos inseguros se os estudantes alcançariam uma resposta que relacionasse as superfícies Quádricas, a Integral Dupla e as obras de Gaudí. No entanto, quando os estudantes iniciaram as pesquisas nas mídias e nos meios as formas gaudinense foram identificadas e associadas às Superfícies Quádricas e representadas visualmente na construção de sólidos. A ação de manipular esses sólidos levou ao questionamento de como calcular a medida de seu volume e o conceito de Integral Dupla emergiu. Em seguida, as noções de equilíbrio, centro de massa e momento de inércia surgiram como aplicações da Integral Dupla e como elementos que contribuíram para a resposta da questão geratriz.

Para a resposta a Q_o: Como as obras de Gaudí resistiram as intempéries do tempo? – os estudantes associaram: as formas das Superfícies Quádricas com a arquitetura das obras de Gaudí, a resistência dos materiais empregados e o cálculo do centro de massa e do momento de inércia (que empregam a Integral Dupla) para o equilíbrio estático das construções do arquiteto.

Um dos pontos relevantes da pesquisa foi a possibilidade de acrescentar novas perguntas a Q_0 que permitiria explorar outras tecnologias do CDI, como as funções vetoriais e as Integrais de Superfícies, despertadas em um questionamento realizado por um dos estudantes durante o PEP.

Para a aplicação deste modelo de PEP, em uma sala de aula com um número maior de estudantes, um currículo brasileiro que não viabiliza as pesquisas, algumas crenças educacionais vigentes e o fator tempo (com dois encontros semanais de 100 minutos no transcorrer de um semestre) algumas adaptações seriam necessárias, tais como a elaboração de tarefas que articulassem a construção de tecnologias para as técnicas da Integral Dupla e as Integrais de Superfície baseadas em dados reais das obras gaudinenses, além de repensar outras questões intermediárias referentes ao contexto.

Referências

BICUDO, Maria A. V. Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. *In*: BICUDO, Maria A. V. (org). **Filosofia da educação matemática:** fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas. São Paulo: UNESP, 2010.

BRANDÃO 2021, A. K. D. C. Um percurso de estudo e pesquisa para o ensino de integral dupla: significados e praxeologias mobilizados por estudantes de engenharias e de licenciatura em matemática. 2021, 439f. **Tese**. (Doutorado em Educação matemática). Pontíficia Universidade Católica de São Paulo - São Paulo, 2021

CHEVALLARD, Y; LADAGE, C. E-learning as a touchstone for didactic theory, and conversely. **Journal of e-Learning and knowledge Society,** v.4, n.2, 163-171, 1999. Disponível em http://yves.chevallard.free.fr.

CHEVALLARD, Y. L´analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologique du didactique. In: Recherches en Didactique des Mathématiques. v. 19. nº 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. 1. Structures & fonctions. **Actes** da la 11 École d'Éte de Didactique des Mathématiques. France: La Pensée Sauvage. 2002. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr.

CHEVALLARD, Y. Passé et present de la théorie antropologique du didactique; **Actes** do premier congrès international sur la théorie anthropologique du didactique. Universidad de Jaén, 2007, pp. 705-746.

CHEVALLARD, Y**. Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. Lyon, 19 de maio de 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf. Acesso: 30 de outubro de 2023.

CHEVALLARD. Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009a. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Infrastructure_didactique_PER.pdf. Acesso: 30 de outubro de 2023.

CHEVALLARD, Y. Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm. Proceedings of the **12ª International Congress on Mathematical Education** (12 ICME). 8 a 15 July, Seoul, Korea, 2012. Disponível em: yves.chevallard.free.fr.

CHEVALLARD, Y. Enseñar Matemáticas en la Sociedad de Mañana: Alegato a Favor de un Contraparadigma Emergente. **REDIMAT – Journal of Research in Mathematics Education**, Barcelona, jun. 2013, v. 2, n. 2, p. 161-182, Disponible en: <http://www.hipatiapress.com/hpjournals/index.php/redimat/article/view/631/pdf>.

CHEVALLARD, Y. ¿Por qué enseñar matemáticas em secundário? Una pregunta vital para los tiempos que se avecinan. **Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española**, 2017, 20(1), p. 159-169.

FREIRE, P. **Pedagogia da indignação**: cartas pedagógicas e outros escritos. Apresentação de Ana Maria Araújo Freire. Carta-prefácio de Balduino A. Andreola. São Paulo: Editora UNESP, 2000.

GONZALEZ, M. E. Q; HASELAGER, W. P. F. G. Raciocínio abdutivo, criatividade e auto-organização**. Cognitio**. São Paulo, n.3, nov.2002, p.22-31.

HENRIQUES, A. **L'enseignement et l'apprentissage dês intégrales multiples**: analyse didatique intégrant l'usage Du logiciel Maple. 2006, 500f. Tese (Doutorado em didática da matemática), Université Joseph Fourier –Grenoble, 2006.

HENRIQUES, A.; NAGANINE, A.; SERÔDIO, R. Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior. **Educação Matemática Pesquisa:** Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, ISSN: 1516-5388, Vol: 22, Issue: 1, 2020.

MORRIS, V. C.; CROWSON, R. L.; HURWITZ JR., E.; PORTER-GEHRIE, C. **The urban principal. Discretionary decision-making in a large educational organization** 1981. Disponível em: <http://eric.ed.gov/?id=ED207178>. Acesso em: 30/10/2023

ROMO VÁZQUEZ, A. Projets D'ingénierie : Étude Dúne activité pratique dans la formation d'ingénieurs. **Anais** de Didactique et sciences Cognitives. v. 15. 2010.a

ROMO VÁZQUEZ, A.; CHÁVEZ, O. C. Matemáticas para la vida. Una propuestapara la profesionalizaciòn docente de profesores de matemáticas **Inovacion Educativa.** V.17, n.73, 2017.

SILVA, S. F.; MORETTI, M. T. Registro em língua natural das superfícies quádricas: análise semiótica e possibilidades de uso de novos registros. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 1, p.294-314, 2018a

SILVA, S. F.; MORETTI, M. T. A abordagem de interpretação global e na aprendizagem das superfícies quádricas. **Educação Matematica Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 2, p.283-308, 2018b

8- Regra de Três inversa: uma criação didática genuína para escola

Denivaldo Pantoja da Silva
Renato Borges Guerra

Introdução: problematização da regra de três inversa

Este construto resulta da investigação desenvolvida por Silva (2017) que tratou da invariabilidade das práticas da regra de três na escola. Aqui buscamos centrar nossa atenção em saberes matemáticos e não matemáticos, procedimentos, esquemas gráficos e outros rudimentos na tentativa de identificar componentes que poderão integrar certa infraestrutura, no sentido de um suporte à edificação ou ao funcionamento de uma estrutura concreta ou abstrata. Mais especificamente, uma infraestrutura didática como sistema de infraestruturas em todos os níveis de codeterminação disciplinar – pedagógico, escolar, societário, civilizacional – sobre o qual se eleva a superestrutura didática (CHEVALLARD, 2009), neste caso investigamos as praxeologias da Regra de Três Inversa para entendê-la como uma Criação Didática – um dispositivo algorítmico específico criado ou "suscitado pela necessidade do ensino" (Chevallard, 1991, p. 45, tradução nossa).

A complexidade intrigante da regra de três, em particular da Regra de Três Inversa, desempenha um papel crucial no avanço deste estudo. Esta abordagem não apenas se distingue por seus métodos algorítmicos específicos, mas também por taxonomias diversas, como sistemas proporcionais inversos ou reversos, inversamente proporcionais, sistema indireto, hiperbólico. Essa diversidade terminológica provavelmente reflete ou é derivada da atividade matemática.

Certamente, a busca por esse aparato praxeológico infraestrutural, poderá nos dar subsídios essenciais para tentarmos delinear de modo mais ou menos preciso uma Criação Didática elaborada para atender práxis escolares. Nesse sentido, trilhamos a história da transmissão das ideias matemáticas no transcurso do tempo, destacando os trabalhos de

Høyrup (1994; 2007a; 2007b; 2012), Sarma (2002), Heeffer (2007; 2014) e Datta e Singh (1938), bem como apresentamos a Didática das Matemáticas, onde situamos este trabalho, tomando como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD, daqui em diante) proposta por Chevallard (1991, 1992, 1999, 2009).

Reputamos que as práxis da regra de três como superestrutura – universo de infraestruturas – capaz de disponibilizar os elementos fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho, embora sua constituição seja genuinamente de natureza prática (SILVA, 2011), convive historicamente em diferentes atividades humanas, inclusive na escola onde se mostra como ferramenta útil para o enfrentamento de situações específicas nos ofícios urbanos distintos (DEL POLTRO; DE LA LLAVE, 2004).

No âmbito das investigações em Didática das Matemáticas encontram-se trabalhos que tratam de algum modo da Regra de Três Inversa à luz da TAD, tais como Bosch (1994), Comin (2000), Bolea (2003), Garcia (2005) dentre outros. Nesses trabalhos, embora o objeto investigado seja a proporcionalidade, acabam dedicando capítulos para tratar da regra de três, inclusive da Regra de Três Inversa.

Na Educação Matemática, geralmente, enquanto campo de pesquisa, a regra de três também vem despertando o interesse de pesquisadores como Pontes (1996), Mazzanti (2008), Guerra e Silva (2008), Oliveira (2009), Neto (2014), Da Rocha Raimundo e Araújo (2016), inclusive, de matemáticos como Ávila (1986) e Lima (1986; 2001). Nesses trabalhos, o foco principal é o ensino da regra de três e suas possíveis variações e, em particular, destaca-se a aplicação da noção de proporcionalidade como fundamento matemático na resolução dos problemas.

No currículo escolar oficial, a Regra de Três Inversa geralmente é apresentada compondo organizações matemáticas para tipos de problema específico. Nos manuais escolares, essa regra é incorporada nas organizações didático-matemáticas sob a compreensão da proporcionalidade. Ela é desenvolvida por meio de problemas protótipos[58] que envolvem grandezas ditas diretamente ou inversamente proporcionais, caracterizados por determinar o valor de uma grandeza desconhecida a partir dos valores conhecidos de outras grandezas.

Talvez o fenômeno da transposição didática tenha contribuído decisivamente para restringir as relações entre as grandezas envolvidas em situações de regra de três em direta

[58] São problemas caracterizados, de padrão regra de rês.

e inversa, mesmo que a Regra de Três Inversa seja fundamentada numa noção estranha à instituição Matemática; a de proporcionalidade inversa.

Por outro lado, Sarma (2002) ressalta que a importância da regra de três não reside na sutileza da teoria que lhe fundamenta, mas sim no processo simples de resolução de diferentes tipos de problemas, mesmo sem o conhecimento duma teoria matemática. O processo algorítmico consiste em dispor os três termos dados no enunciado do problema numa sequência linear A→B→C, para em seguida, efetuar o produto do terceiro termo pelo segundo e dividir o produto pelo primeiro termo, ou seja, $C \times B \div A$. Na Regra de Três Inversa o processo é reverso, a disposição da sequência linear dos dados é mantida, mas o cálculo das operações é efetuado no sentido contrário ao da regra original, $A \times B \div C$.

As práxis docentes, por sua vez, frente às situações de regra de três seja direta ou inversa, engendram um fazer praxeológico invariante, mecânico e pontual que pode ser resumidamente descrito do seguinte modo: a partir da leitura do enunciado, constroem um esquema gráfico explicitando as grandezas e os dados associados ao problema, acompanhado de um discurso retórico supostamente explicativo sobre a variação das grandezas envolvidas, dizendo ser direta ou inversa, para em continuação, escrever uma equação que produzirá a resposta desejada (SILVA, 2011; 2017). Nesse fazer, a noção de proporcionalidade parece não ser objeto de discussão[59], assume-se que as grandezas envolvidas ou são diretas ou inversamente proporcionais determinado por critérios imprecisos.

Nos problemas de Regra de Três Inversa a análise da variação das grandezas segue a definição de grandezas *inversamente proporcionais*, quando observado o discurso seguinte como válido: se o aumento de uma grandeza produzir a diminuição da outra ou o contrário. Essa conclusão implicará "naturalmente" na inversão de uma das razões da proporção que modelará o problema e, consequentemente, a resposta procurada.

Mas, Lima (1991) observa que, ao aplicar um modelo matemático para analisar uma situação em contexto concreto, devemos ter consciência dos limites da validez do mesmo. Por exemplo, nem sempre o modelo da proporcionalidade é o mais adequado para uma dada situação. Em algumas circunstâncias ele pode produzir resultados satisfatório e em outras não.

---

[59] Sobre essa questão, recomendamos a leitura do trabalho de Silva (2011).

No trabalho de Bosch (1994) os problemas de Regra de Três Inversa são nomeados *sistemas hiperbólicos* ou *sistemas proporcionais inversos*. A diferença entre esses sistemas está em uma pequena *inversão* em determinado ponto do processo de modelização que consiste em construir um esquema gráfico de arranjo dos dados – denominado modelo tabular – o qual ajudará na determinação do caráter inverso pela análise da variação das grandezas envolvidas, em seguida, escrever a equação proporcional invertendo a primeira razão para, então, determinar a resposta do problema.

Em Høyrup (2012), há uma abordagem onde afirma que as taxonomias *inversamente proporcional* e *não proporcional* não têm sentido matematicamente nas praxeologias da Regra de Três Inversa. O termo *oposto* parece ser o mais adequado para a situação, pois de acordo com Rozenfeld (1983) que "traduz o termo crítico *mubayin* nem como não proporcional nem como inversamente proporcional, mas como *protiv*, oposto", (...) (HØYRUP, 2012, p. 9, tradução e grifos nossos).

Observamos que os matemáticos hindus buscavam métodos alternativos eficientes de ensino para superar as dificuldades associadas aos problemas de regra de três, por exemplo, de determinar o tipo da relação entre as grandezas, se direta ou inversa que constitui ponto crucial do processo de resolução desses tipos de problemas. Nesse caso, além do uso de termos técnicos, recorriam a um algoritmo geral conduzido por esquemas gráficos como orientadores dos arranjos e rearranjos de dados do problema, que, por sua vez, orientavam também a hierarquia das operações de cálculo a serem efetuadas.

Importante destacar que a ergonomia do método de resolução é conservada em acordo com o seguinte princípio operacional: primeiro multiplicar e dividir depois.

O matemático indiano Brahmagupta (628 d.C.) faz uso de termos técnicos para anunciar formalmente a regra de três, para ele: "Na regra de três, *argumento*, *fruto* e *requisição* [são os nomes dos termos técnicos] o primeiro e último termos devem ser semelhantes. *Requisição*, multiplicado pelo *fruto* e dividido pelo *argumento* é o resultado" (SARMA, 2002, p. 137, tradução e grifos nossos). Na Regra de Três Inversa, segue o mesmo padrão de formulação da regra de três, mas, distinguia-se fundamentalmente no modo de cálculo das operações: "[...] o produto entre *argumento* e *fruto*, dividido pela *requisição*, é a resposta" (SARMA, 2002, p. 150, tradução e grifos nossos).

Certamente com o decorrer do tempo, o uso frequente da regra de três nas atividades sociais e as complexidades das práxis envolvidas, buscou-se criar condições para superar as dificuldades inerentes às práxis da regra, sobretudo, verificou-se a emergência da criação da Regra de Três Inversa, recorrendo a mecanismos, procedimentos algorítmicos que auxiliassem no enfrentamento desses tipos de problemas em contextos específicos.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo buscar construir uma compreensão das práxis da Regra de Três Inversa que nos permita compreendê-la como uma exímia Criação Didática, isto é, um algoritmo específico para atender o campo de práticas escolares, recorrendo a componentes infraestruturais matemáticos e não matemáticos necessários para o funcionamento dessas práxis. Desse modo, um questionamento parece inevitável e pertinente: Como a práxis da Regra de Três Inversa poderá se constituir em uma Criação Didática, ou seja, um algoritmo específico para atender o campo de práticas escolares?

Para o enfrentamento dessa questão, considerando a complexidade intrínseca a ela, entendemos que possíveis respostas poderão ser construídas no desenvolvimento deste trabalho, partindo da hipótese de que não existe Regra de Três Inversa, embora exista na literatura escolar a noção de proporcionalidade inversa, sua natureza generativa reside fundamentalmente em situações de composição, ou seja, são Criações Didáticas corporificadas por articulações integradas e sistemáticas que contam com procedimentos, esquemas gráficos, termos técnicos, etc. elaborados para composição da infraestrutura didático-matemática de organizações praxeológicas escolares.

Desse modo, consideramos essencial discutir inicialmente, na seção seguinte, o papel instrumental que joga os esquemas gráficos nas praxeologias da regra de três, um instrumento didático criado com funcionalidade bem definida presentes na Matemática dos hindus. Para além disso, buscaremos entendê-los como um dispositivo estratégico na infraestrutura algorítmica específica da Regra de Três Inversa.

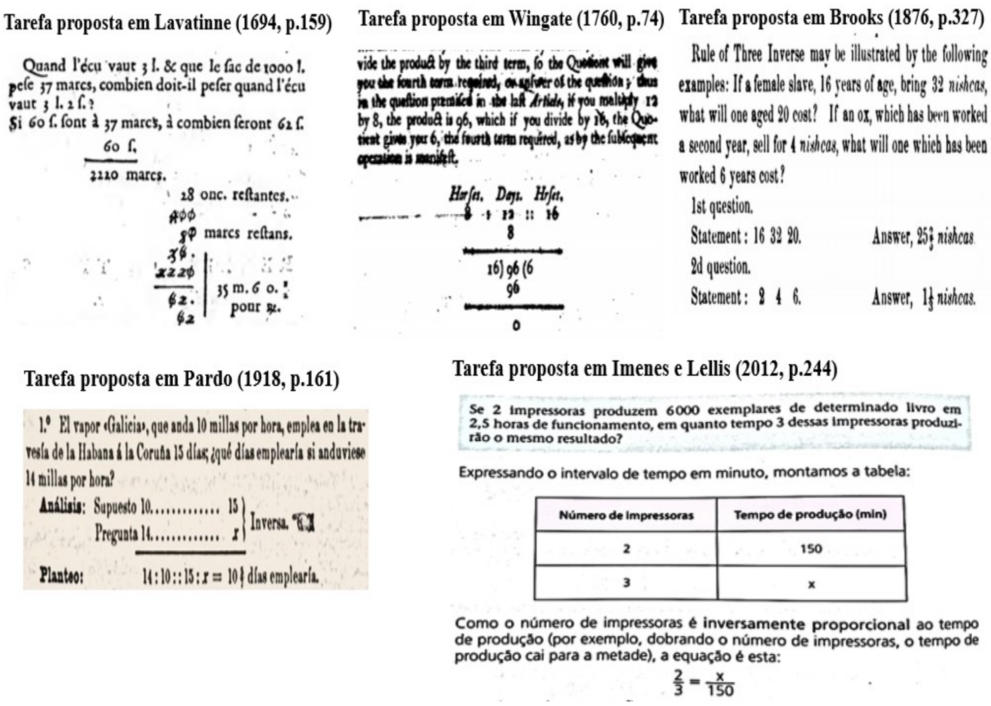
8.1 Esquema gráfico: o papel instrumental nas praxeologias

A historiografia da Matemática (Datta; Singh, 1938; Høyrup (1994; 2007a; 2007b; 2012); Sarma, 2002; HeeffeR, 2007; 2014) mostra que esse importante dispositivo instrumental – os esquemas gráficos – se fazem presente regularmente nas praxeologias da regra de três. Como anunciamos anteriormente, nas praxeologias hindus os esquemas são usados para orientar os rearranjos dos dados presentes no enunciado do problema de modo a deixá-los prontos para atender à regra com sua ergonomia[60] que prescreve

[60] Adotamos esse termo no sentido de conforto e otimização do trabalho humano na execução da regra.

multiplicar números inteiros e ao final dividir para obter o resultado procurado. O painel de tarefas que apresentamos a seguir (Figura 1) pretende ilustrar de modo a esclarecer o sentido da proposição que anunciamos anteriormente, nele apresentamos tarefas escolares de Regra de Três Inversa acompanhadas das resoluções, nas quais é possível perceber o uso recorrente de esquemas gráficos de arranjo de dados. Destacamos que essas praxeologias foram elaboradas, em geral, com fins didáticos como podemos observar nos recortes de livros datados do século 17 ao 21.

Figura 1: Painel de tarefas escolares da Regra de Três Inversa



Tarefa proposta em Lavatinne (1694, p.159)

Quand l'écu vaut 3 l. & que le sac de 1000 l. pese 37 marcs, combien doit-il peser quand l'écu vaut 3 l. 2 s.?

Si 60 s. font à 37 marcs, à combien feront 62 s.

60 s.

2220 marcs.

28 onc. restantes.

400

50 marcs restans.

36.

2220

62.

62

35 m. 6 o. pour 31.

Tarefa proposta em Wingate (1760, p.74)

vide the product by the third term, so the Quotient will give you the fourth term required, or answer of the question; thus in the question premised in the last Article, if you multiply 12 by 8, the product is 96, which if you divide by 16, the Quotient gives you 6, the fourth term required, as by the subsequent operation is manifest.

Horses. Days. Horses.

8 . 12 :: 16

8

16) 96 (6

96

0

Tarefa proposta em Brooks (1876, p.327)

Rule of Three Inverse may be illustrated by the following examples: If a female slave, 16 years of age, bring 32 *nishcas*, what will one aged 20 cost? If an ox, which has been worked a second year, sell for 4 *nishcas*, what will one which has been worked 6 years cost?

1st question.

Statement: 16 32 20. Answer, $25\frac{3}{5}$ *nishcas*

2d question.

Statement: 2 4 6. Answer, $1\frac{1}{3}$ *nishcas*.

Tarefa proposta em Pardo (1918, p.161)

1.º El vapor «Galicia», que anda 10 millas por hora, emplea en la travesía de la Habana á la Coruña 15 días; ¿qué días emplearía si anduviese 14 millas por hora?

Análisis: Supuesto 10............ 15 / Pregunta 14............ x } Inversa.

Planteo: $14 : 10 :: 15 : x =$ 10[illegible] días emplearía.

Tarefa proposta em Imenes e Lellis (2012, p.244)

Se 2 impressoras produzem 6000 exemplares de determinado livro em 2,5 horas de funcionamento, em quanto tempo 3 dessas impressoras produzirão o mesmo resultado?

Expressando o intervalo de tempo em minuto, montamos a tabela:

Número de impressoras	Tempo de produção (min)
2	150
3	x

Como o número de impressoras é **inversamente proporcional** ao tempo de produção (por exemplo, dobrando o número de impressoras, o tempo de produção cai para a metade), a equação é esta:

$$\frac{2}{3} = \frac{x}{150}$$

Fonte: Elaboração dos autores (2019)

De acordo com Sarma (2002), as praxeologias dos hindus seguiam uma ordenança para resolver problemas de regra de três, isto é, uma vez “identificados” os termos técnicos *argumento, fruto* e *requisição,* os dados são dispostos em um esquema gráfico formado por duas colunas, uma associada ao *argumento* e outra à *requisição*, por vezes fechados com bordas simples ou duplas e, em geral, com divisões internas que formavam as células para alocação dos dados do problema como os apresentados na Figura 2 seguinte.

Figura 2: Modelos hindu de esquema gráfico

Argumento	requisição
x	y
z	

Argumento	Requisição
v	y
z	O

Fonte: Elaboração dos autores (2019)

É claro que esse esquema gráfico mostrado na Figura 2 desempenhava, e ainda desempenha, efetivamente, o papel de orientar a disposição dos dados no processo de resolução dos problemas de regra de três, de modo a se obter um arranjo final composto por números inteiros preferencialmente, encaminhados para o passo derradeiro de efetuar as operações preconizado pela ergonomia da regra.

O uso rotineiro de dispor os dados – valores das grandezas – em duas colunas verticais, atribui-se ao matemático indiano Brahmagupta (628 d.C.), embora usasse também um esquema gráfico de uma linha horizontal para resolver os problemas (Sarma,2002). Desse modo, por exemplo, para dispor os dados do seguinte problema – Se 5 mangas custam 10 rúpias, quanto 8 mangas custarão? – existia nas praxeologias dos hindus pelo menos quatro tipos de esquema disponíveis como os apresentados na figura 3:

Figura 3: Modelos de esquema gráfico

(i)

5	10	8

(ii)

5
10
8

(iii)

5	8
10	

(iv)

5	8
10	*O*

Fonte: Sarma, 2002, p. 154

Daí podemos perceber o importante e estratégico papel instrumental que jogam os esquemas gráficos na resolução de problemas de regra de três. Para ilustrar essa ideia recorreremos às praxeologias dos hindus que usavam uma sequência de duas regras de três na resolução como mostra o problema seguinte extraído de Datta; Singh (1938): Se o juro de cem *niskas* em um mês faz cinco *niskas*, qual será o juro de 16 *niskas* em 12 meses?

A resolução se inicia com a primeira regra de três que denominamos auxiliar assim anunciada: Se 100 *niskas* em 1 mês produz 5 *niskas,* quanto produzirá em 12 meses?

Do enunciado identifica-se primeiramente os temos técnicos argumento=1 mês, fruto=5 *niskas* de juro e requisição=12 meses, para dispor esses dados no esquema gráfico:

1	5	12

Com os dados dispostos adequadamente no esquema, aplica-se a regra para obter a resposta auxiliar, ou seja, uma solução parcial do problema como segue:

$\frac{12\times 5}{1} = 60$, produzirá 60 n*iskas*.

Em continuação, de posse desse valor parcial, formula-se a segunda regra de três: Se 100 *niskas* produz, em 12 meses, $\frac{12\times 5}{1}$ *niskas*, quanto produzirá 16 *niskas* em 12 meses?

Novamente, organiza-se os termos técnicos *argumento e* r*equisição* (capital) e o f*ruto* produzido (pelo capital 100), no caso o juro de $\frac{12\times 5}{1}$ *niskas*, para encaminhar a segunda ordenação de dados do seguinte modo: argumento=100 *niskas*, fruto= $\frac{12\times 5}{1}$ *niskas* de juro, requisição=16 *niskas*. No esquema gráfico, seguindo o mesmo procedimento aplicado anteriormente, dispõe-se os dados adequadamente para, em seguida, aplicar a regra e encontrar o segundo valor que será a resposta final do problema proposto:

100	$\frac{12 \times 5}{1}$	16

$$16 \times \frac{12 \times 5}{1} \div 100 = \frac{16 \times 12 \times 5}{1 \times 100} = \frac{960}{100} = \frac{48}{5}$$

Portanto, a resposta final do problema é a seguinte: produzirá em 12 meses $\frac{48}{5}$ *niskas* ou 9 $e\frac{3}{5}$ *niskas*.

Embora esse procedimento seja eficaz para resolução apresentada, pode também ser realizado de outro modo, dispondo os dados do problema original no esquema gráfico em duas colunas para, em seguida, fazer o rearranjo dos dados como parte da resolução. Na primeira coluna, os dados que estabelecem as condições iniciais do problema – que corresponde ao termo técnico *argumento* – e, na segunda os dados incompletos – da *requisição* – deixando o lugar do valor requerido vazio.

Para esse procedimento, o matemático Brahmagupta dá generalidade completa em três passos, obtendo uma nova regra, segundo Sarma (2002). Mas, para melhor clareza do processo e atender a nossos objetivos, optamos em desmembrar o terceiro passo em dois, destacando as operações segundo a ergonomia da regra. Dessa forma, passa a ser descrito em quatro passos seguintes:

(i) arranjar os dados fornecidos em duas colunas, a primeira contém os dados relativos ao *argumento*, a segunda à *requisição*;

(ii) transpor os valores dos dois *frutos*;

(iii) transpor valores dos denominadores;

(iv) o produto dos termos da coluna com o maior número de termos é dividido pelo produto dos termos da coluna com o menor número de termos.

Essa praxeologia podia ser abreviada, observando-se que os termos de mesma denominação devem ser escritos em células de uma mesma linha horizontal. A célula correspondente ao termo procurado fica vazia ou com o símbolo “0”, que não se confunde com o número zero e nenhuma operação era feita com ele, mas sua utilidade é estratégica no processo por identificar o lado com menor número de termos dispostos no esquema gráfico de arranjos de dados (Datta e Singh, 1938). A figura 4 busca expressar a forma generalizada da regra abreviada.

Figura 4: Praxeologia abreviada

Argumento	Requisição
100	16
1	12
5	

Argumento	Requisição
100	16
1	12
	5

$$\frac{16 \times 12 \times 5}{1 \times 100} = \frac{960}{100} = \frac{48}{5}$$

Fonte: Elaboração dos autores (2019)

Assim, para as variantes da regra de três, como as regras de cinco, de sete termos e mais termos, o esquema gráfico de duas colunas apresentado anteriormente, tornou-se preferível. Em todo caso, é evidente a mecanicidade do processo que fazia, sem dúvida, as variantes, assim como a própria regra de três e a inversa, constituírem-se em regras *protoalgébricas,* ou seja, “procedimentos ou algoritmos específicos para resolver tipos específicos de problemas” (HEEFFER, 2007, p. 6, tradução nossa).

Com estas observações postas, por meio da praxeologia dos hindus da regra de três, destacamos o poder dos esquemas gráficos de arranjos de dados e seu papel instrumental no processo algorítmico de resolução do problema. Na Europa os esquemas gráficos também se faziam presente, o extrato de texto histórico seguinte deixa claro essa ocorrência e a sua funcionalidade: “As aritméticas europeias antigas dedicaram muito espaço à explicação da regra de três; muitas vezes usavam-se ... diagramas esquemáticos para tornar perceptível sua natureza mecânica" (EVES, 2001, p. 263).

Ainda assim, possivelmente essas evidências observadas nas práxis da regra de três ainda parece não ser suficiente para entendermos, de fato, a gênese da Regra de Três Inversa. No entanto, deixa claro a necessidade de compreender o uso da regra em situações de composição, que envolvem um número maior de dados, as quais deram origem às regras de três compostas, a partir das regras de cinco, sete, nove e mais termos, pois, entre essas composições destacadas, um gênero de problema com cinco termos ganhou notoriedade com um algoritmo específico, que veio a ser denominada de Regra de Três Inversa utilizado até os dias atuais.

Esse entendimento decorre da ideia de que a regra de três composta, que inclui a Regra de Três Inversa, de acordo com Sarma (2002), não aparece no manuscrito de Bakhshali[61], esse texto não parece estar ciente de qualquer regra além da regra de três, os problemas específicos de Regra de Três Inversa são resolvidos por meio de duas regras de três simples e sucessivas do mesmo modo apresentado anteriormente.

Por sua vez, Høyrup (2007a, 2007b; 2012) tem mostrado em seus trabalhos ao tratar da regra de três a seguinte assertiva: a regra não é dada pelo problema. É o método, e, nesse caso, transposto em forma de algoritmo. Portanto, os problemas com cinco, sete ou mais termos são resolvidos por regras próprias – algoritmos específicos – que denominamos de regras de três compostas. Com base nesse pressuposto, passaremos a discutir essa práxis na tentativa de melhor compreendê-la no gênero de problemas de composição.

8.2 Regra de três composta: algoritmo da regra de cinco termos ou regra de três inversa?

Inicialmente destacamos que em nossa compreensão a Regra de Três Inversa se configura como uma situação de composição – regra de três composta. Para ilustrar esse entendimento, vamos recorrer aos procedimentos da regra generalizada por Brahmagupta (628 d.C.) para resolver problemas de cinco termos, nesse caso, vamos retornar ao problema resolvido anteriormente por uma sequência de duas regras de três: Se o juro de cem *niskas* em um mês faz cinco *niskas*, qual será o juro de 16 *niskas* em 12 meses?

[61] Há muitas conjecturas sobre sua origem e época a que pertence, estimando-se que esta se situe entre o século III e século XII d.C. (EVES, 2004, p.271).

O emprego da nova regra – generalizada – inicia dispondo os dados, devidamente identificados, em duas colunas no esquema gráfico, uma do *argumento* e outra da *requisição*, usando uma linha para cada grandeza anunciada no texto do problema:

Argumento	Requisição
100	16
1	12
5	Θ

Em seguida, escreve-se o novo esquema gráfico de arranjo de dados, obtido pela permutação do que é determinado por *fruto* (5 *niskas*):

Argumento	Requisição
100	16
1	12
Θ	5

Como não há denominadores para permutar nesse caso, o terceiro passo é desnecessário. Segue-se então o quarto e último passo, que consiste em fazer o produto dos números de cada coluna e dividir o produto da coluna com mais termos – não confundir com fatores – pelo produto com menos termos, para encontrar a resposta final do problema, como segue:

$$\frac{16 \times 12 \times 5}{1 \times 100} = \frac{960}{100} = \frac{48}{5} = 9\ e\ \frac{3}{5}\ niskas$$

Nesse procedimento, parece clara a intenção do uso do esquema gráfico de arranjo de dados desenvolvido pelos matemáticos hindus: minimizar a dificuldade de identificar as grandezas com os termos técnicos, pela falta de habilidade dos alunos em lidar com a situação. Alguém apressadamente pode até concluir que o esquema gráfico eliminaria completamente a dificuldade oriunda da falta de habilidade do aluno em fazer a relação entre as grandezas e os termos técnicos. Mas, essa conclusão pode decorrer da apressada associação da resposta procurada com o *fruto*, um dos passos da dinâmica do processo de resolução do problema, a que exige permutar os *frutos* entre as colunas do esquema. Tal identificação pode levar ao insucesso. Uma vez que é imprescindível ter clareza de que o *fruto* é determinado pelo contexto do problema.

Por exemplo, vamos reformular o problema anterior considerando agora a resposta encontrada: Sabemos que100 *niskas* produz 5 *niskas* em 1 mês. Em quantos meses 16 *niskas* produzira $\frac{48}{5}$ *niskas*?

A resolução inicia pela seleção adequada dos dados do problema: 100 *niskas*, 1 mês, 5 *niskas* e 16 *niskas*, “ϴ” meses, $\frac{48}{5}$ *niskas*. Os dados são dispostos então em colunas no esquema gráfico seguinte onde a fração é escrita sem o traço que separa o numerador do denominador:

Argumento	Requisição
100	16
1	ϴ
5	48 5

O passo seguinte é permutar os *frutos,* neste caso são os valores 5 e $\frac{48}{5}$. O problema trata do mesmo tipo de situação em contexto que impõe que o interesse (juros) seja o *fruto*. Assim, os números da última linha são permutados, para obter o novo esquema gráfico de arranjo de dados:

Argumento	Requisição
100	16
1	ϴ
48 5	5

Em seguida, o passo final será a permutação dos denominadores, particularmente, o denominador da fração $\frac{48}{5}$ como mostrado no esquema gráfico final seguinte:

Argumento	requisição
100	16
1	ϴ
48	5 5

Isto posto, a regra estabelece que a coluna com menos dados é a que contém o símbolo “ϴ”, já que os denominadores não são contados, e, portanto, a coluna com mais termos nesse caso é a primeira, cujo produto dos valores $100 \times 1 \times 48$ resulta em 4800. O produto da coluna menor será $16 \times 5 \times 5 = 400$. Portanto, o valor procurado é obtido fazendo a seguinte divisão:

$$\frac{4800}{400} = 12\,meses.$$

Portanto, a regra generalizada permitiu a formulação de variações a partir de alterações pontuais sobre os passos do processo apresentado. Por sua vez, essas variações se constituíam em regras para tipos específicos de problemas. O matemático

Brahmagupta fornece regras exclusivas para diferentes tipos de problema, como para o problema da *troca de comodities* (produtos/mercadorias), cuja regra é anunciada da seguinte maneira: “Na troca de produtos, a transposição de preços são os primeiros termos a ocuparem lugar; e o resto do processo é o mesmo que foi acima descrito (SARMA, 2002, p.150, tradução nossa)”.

Essa regra inclui o passo que comanda a permutação dos preços entre as colunas do esquema gráfico de arranjo de dados, sem fazer referências aos termos técnicos – *argumento, fruto* e *requisição* – e orienta que ocupem as primeiras células do esquema gráfico. Feito esses ajustes, o processo deve seguir com o restante dos passos anteriormente prescritos. A resolução do problema seguinte, extraído de Sarma (2002, p.150, tradução nossa), pretende ilustrar esse processo.

> Se uma centena de mangas é comprada por dez *panas*, e de romãs por oito, quantas romãs (devem ser trocadas) por vinte mangas?
> Sentença: A disposição dos dados no esquema gráfico.

10	8
100	100
20	

> Após a transposição dos preços e do fruto, o novo arranjo ficará pronto para o cálculo que levará a resposta do problema.

8	10
100	100
	20

Resultado: $\frac{10\times100\times20}{8\times100} = 25\ romãs.$

Essa resolução nos conduz pensar que a estratégia didática de “algoritmizar” procedimentos para tarefas específicas é recorrente no ensino de Matemática e isso implica a um elevado número de fórmulas ou modelos que poderiam ser evitados, tendo em conta os gêneros de tarefas. Reduziria também o encontro prematuro com praxeologias pontuais. Dessa maneira, podemos supor que a multiplicidade de algoritmos para a variedade de tipos de problemas, um para cada tipo, proposto pela Matemática hindu poderia decorrer das carências de saberes matemáticos. Esses se encontrariam ainda em seus primeiros momentos de vida e não permitiriam outras e diversificadas Criações Didáticas.

Todavia, o processo de criação com base em esquemas gráficos de arranjo de dados, produziu objetos matemáticos de ensino que ainda intrigam pesquisadores, que em manifestações explícitas restringem frequentemente seus estudos reflexivos à regra de três adjetivada de "direta" com afirmações do tipo: "Fixaremos nossa atenção na proporcionalidade direta, que chamaremos apenas de "proporcionalidade" (LIMA, 2004, p. 94).

Essa compreensão procede da observação de que uma das regras variantes da regra de três, em princípio para problemas de cinco termos, que podem nem todos serem explícitos, ganhou importância e se estabeleceu como uma praxeologia que chegou a produzir uma taxonomia artificial para a regra; a regra de três padrão chamada de regra de três direta, e a variante da regra ganhou a denominação de Regra de Três Inversa, ou seja, isso nos permite concluir que a Regra de Três Inversa tem sua gênese em uma situação de composição, portanto, trata-se de uma regra de três composta. Ou seja, constitui-se numa Criação Didática, um algoritmo designado para facilitar o ensino. A seguir buscaremos então compreender melhor a Regra de Três Inversa sob esse aspecto no campo de práticas escolares.

8.3 O algoritmo da regra de três inversa: uma criação didática genuinamente escolar

Até agora, discutimos a Regra de Três Inversa emergindo como inovação para facilitar o seu ensino, apesar de ser fundamentada na estranha proporcionalidade inversa, visto que tal relação não é de proporcionalidade – ideia não evidente na escola – a proporcionalidade inversa parece ser ausente na literatura matemática, embora exista em textos elaborados para o ensino. Portanto, podemos dizer que a Regra de Três Inversa se configura seguramente como uma Criação Didática com firme propósito de ser um algoritmo eficaz para facilitar o ensino, como era característico do ensino dos hindus[62], desenvolvido por meio de algoritmos para tipos de problemas específicos, envolvendo três grandezas sendo uma delas constante denominada *fruto.*[63]

Em geral, o tipo de problema – de Regra de Três Inversa – pode ser identificado observando as variações das grandezas envolvidas, que sempre dependem do assunto que trata o problema, são vistas as variações como se ocorressem em sentidos opostos, isto é, quando uma grandeza varia de modo crescente a outra varia de modo oposto, decrescente. Para esse caso, desenvolveu-se um algoritmo específico, uma variante da regra de três chamada regra de três composta. Esse aspecto importante da regra composta ou de composição pode ser evidenciado a partir de dois problemas, um contido em Sarma

[62] Observamos essas características algorítmicas no ensino de Matemática dos hindus nos trabalhos, por exemplo, de Datta; Singh (1938); Sarma (2002) e Høyrup (2007a; 2007b; 2012).
[63] Expressão utilizada para identificar o termo técnico estratégico no algoritmo dos hindus para solução de problemas de Regra de três Inversa.

(2002) e o outro em Datta; Singh (1938), os quais segundo esses autores foram extraídos, respectivamente, do manuscrito Bakhshali e do livro indiano Trisatikâ (750 d.C.) como segue.

Consideremos o problema1: Se uma pessoa pode viver com oito *drammas* por quarenta e dois dias, então quanto tempo setenta pessoas podem viver com a mesma quantidade de dinheiro? De acordo com Sarma (2002) no texto do manuscrito a resolução é feita em duas etapas sucessivas as quais denotamos por (i) e (ii), usando regras de três simples e sucessivas como técnica de resolução:

(i): Se 1 pessoa vive com 8 *dramas*, 70 pessoas viverão com quanto?

Resolução parcial: Os três termos das quantidades envolvidas são 1, 8 e 70. Aplicando a regra de três para obter o resultado da questão teremos então:

$$[(70 \times 8) \div 1] = 560 \textit{ drammas}.$$

De posse desse valor seguiremos com nova formulação do problema para obtenção da resposta final:

(ii): Se (70 pessoas podem viver) com 560 *drammas* por 42 dias, quantos dias durarão 8 *drammas*?

Resposta final: Os termos das quantidades das grandezas são 560, 42 e 8. O resultado é obtido realizando os cálculos de acordo com a regra de três:

$$[(8\times42) \div 560] = \frac{3}{5} \text{ dia, resposta do problema.}$$

Cabe observar que, analisando a resolução apresentada, a terceira grandeza que representa o total de *drammas* necessários para 70 pessoas viverem um dia, não foi explicitado no enunciado. Por outro lado, essa resolução pode ser abreviada, usando um algoritmo específico – Regra de Três Inversa – descrito do seguinte modo: Escreve-se os valores das grandezas do problema na ordem dos termos técnicos *argumento, fruto* e *requisição*: 1, 42 e 70. A resposta será obtida operando com esses valores no sentido inverso do realizado na regra de três convencional, isto é:

$$[(1\times42) \div 70] = \frac{3}{5} \text{ dia.}$$

Observe que a resposta encontrada é a mesma!

Agora vamos considerar o problema 2: Em vinte colares, cada um contém oito pérolas. Quantos colares, contendo seis pérolas cada um, podem ser feitos?

Novamente, esse problema é resolvido por uma sequência de regras de três simples e sucessivas como apresentamos anteriormente na resolução do problema 1, dos *drammas*:

(i): Em um colar há 8 pérolas. Quantas pérolas há em 20 colares?

Resolução parcial: Ordena-se os valores das grandezas do problema no esquema gráfico de arranjo de dados para efetuar as operações preconizadas pela técnica da regra de três simples:

1	8	20

$[(20\times8) \div 1] = 160.$

O valor 160, representa o número total de pérolas solicitado na questão auxiliar. De posse dele, seguiremos a resolução com nova formulação:

(ii): Se 6 pérolas produzem um colar, quantos colares poderão ser produzidos com 160 pérolas?

Resposta final: Dispondo os números no esquema gráfico e arranjos de dados e aplicando a técnica da regra de três simples, teremos:

6	1	160

$[(160 \times 1) \div 6] = \frac{160}{6}$ ou $26\, e \frac{2}{3}$ colares.

Do mesmo modo que no problema 1, o problema 2 também possui uma grandeza implícita que é a quantidade total de pérolas disponíveis para confecção dos colares, mas não está explícito no seu enunciado que essa quantidade é mantida para questão posta. Portanto, esse tipo de problema se configura como um problema de cinco termos, no entanto é, em geral, tomado como um problema de três termos.

Para o matemático Bhaskara II esse tipo de problema pode ser identificado analisando a ocorrência do fato seguinte: se o aumento da *requisição* diminuir o *fruto*, ou se com sua diminuição aumentar o *fruto* (SARMA,2002). A solução pode ser obtida aplicando o algoritmo da Regra de Três Inversa, que se obtém alterando o último passo preconizado pela regra de três simples, ou seja, a direção das operações deve ser tomada em sentido inverso. Essa dinâmica das operações e das quantidades em cada tipo pode ser observado no quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Dinâmica algorítmico-operacional da regra de três simples

Direção	**Regra de Três Simples**	**Regra de Três Inversa**
Das quantidades	A→ B → C.	A→ B→ C.
Das operações	A← B ← C:	A→ B→ C:
	Algoritmos	
	(C × B) ÷ A.	(A × B) ÷ C.

Fonte: Elaboração autoral com base em Sarma (2002).

De acordo com Sarma (2002), embora Bhaskara I afirmasse que a Regra de Três Inversa era o reverso da regra de três, Brahmagupta foi o primeiro matemático indiano que enunciou a regra específica na integra do seguinte modo: "Na regra de três inversa, o produto do *argumento* pelo *fruto* dividido pela *requisição* é a resposta". Em ambos os problemas ora considerados para ilustrar o algoritmo Regra de Três Inversa, a solução é abreviada.

Usando a regra – algoritmo – para resolver o primeiro problema, escreve-se os termos *argumento*, *fruto* e *requisição* no esquema gráfico de arranjo de dados seguinte:

1	42	70

O resultado será obtido aplicando o algoritmo da Regra de Três Inversa, ou seja:

$$[(1 \times 42) \div 70] = \frac{3}{5} \text{ dia.}$$

De modo análogo, a resposta do segundo problema pode ser assim encaminhada: procede-se com a disposição adequada dos valores das grandezas no esquema gráfico de arranjo de dados seguinte:

8	20	6

Na sequência, efetua-se os cálculos com os valores das grandezas dados que levará à resposta do problema, aplicando o algoritmo da Regra de Três Inversa encontra-se a resposta procurada, isto é:

$$[(8 \times 20) \div 6] = 26\frac{2}{3} \text{ colares.}$$

Vejamos, pois, que as respostas são as mesmas obtidas com o uso do algoritmo de modo rápido e fácil. No entanto, como em todas as variantes da regra de três, há claras dificuldades de se fazer as relações corretas entre as quantidades das grandezas do problema e os termos técnicos designados por *argumento*, *fruto* e *requisição*. O dispositivo didático anunciado por Bhaskara II, descrito anteriormente, ainda não era suficiente para eliminar as dificuldades de falta de habilidades para lidar com as lógicas das práticas. Isso pode ser depreendido de Bhaskara II, que na sua obra Lilavati estabeleceu os seguintes tipos de problemas: "quando o valor dos seres vivos é regulado por sua idade; no caso do ouro, onde o peso e o toque são comparados; ou quando montes são subdivididos; a regra de três inversa é [utilizada] (COLEBROOKE, 1817, p.34, tradução nossa)".

Como podemos notar, esse extrato de texto deixa escapar a dificuldade mencionada quando explicitamente aponta tipos de práxis em contextos concretos em que se devia usar a regra inversa. As relações entre as grandezas envolvidas no problema e os termos técnicos usados na regra de três são fundamentais para "verificar" se o aumento de quantidades de uma leva à redução de quantidades de outra conforme preconiza a regra.

Para ficar claro o que queremos dizer, consideremos o problema proposto pelo matemático Al-Biruni (973 d.C.) relativos à prática de venda de mulheres, que se tornou notório a época: "Se uma moça de dezesseis anos, com sua voz doce como a de um *grou*[64], dançando e gorjeando como um *pavão*, recebe 600 moedas, quanto receberia uma moça de 25 anos? (SARMA,2002, p. 150, tradução nossa)".

O problema apresenta objetivamente, como podemos observar, três termos para duas grandezas, o que pode levar ao uso da regra de três convencional. Mas, há a evidente dificuldade de identificar o tipo de problema com o tipo de variante da regra de três que dará a solução; nesse caso, trata-se da Regra de Três Inversa ou direta? A dificuldade – de análise para identificação do tipo da variante – para esse problema pode ser eliminada quando Bhaskara II afirma que preço dos seres vivos, sejam eles escravos ou animais de tração, devem ser tomados como inversamente proporcionais às suas idades. Basta então considerar a prostituição como escravidão, que o tipo do problema fica determinado.

Também é importante destacar que há carência de uma informação decisiva que somente quem está dotado da lógica dessa prática conhece. Isso fica ainda mais claro quando Bhaskara II ressalta que essa relação tem alcance limitado. Mas, segundo Sarma (2002, p. 151, tradução nossa)

> (...) o preço não aumentava indefinidamente com a diminuição da idade. Existe uma idade fixada que recebe o preço máximo. Para o caso das escravas a serem empregadas para o trabalho manual ou para a apreciação sexual era adotada a idade de dezesseis anos. Ganesa Daivajfia observa, "Uma mulher de dezesseis anos alcança o ideal com respeito a seu corpo e qualidades. Portanto, ela recebe o preço máximo nessa idade".

Daí, segue então pelo menos dois questionamentos inevitáveis em relação ao ensino da regra: Como um aluno, não dotado da habilidade lógica dessa prática, poderia perceber precisamente tal relação? Como saberia a idade de preço máximo? A resposta é que os alunos, ou qualquer pessoa, não dotados da habilidade da lógica da prática em questão, necessária para o enfrentamento, certamente teriam insucesso na resolução desse tipo de problema.

Portanto, isso é uma constatação evidente de que a Regra de Três Inversa goza da dificuldade de estabelecer as relações entre as quantidades das grandezas e os termos

---

[64] Espécie de ave elegante e migratória encontrada na Europa.

técnicos envolvidos no problema, bem como da dificuldade de perceber a relação inversa entre os termos técnicos *argumento* e *fruto*.

Outros critérios de identificação para esse tipo de problema são úteis para o ensino. Especificamente, se o problema deixar escapar uma terceira grandeza adicional que pode ser atribuída pelo produto de outros termos para o *argumento* e para a *requisição*, esses produtos podem ser tomados como *argumento* e *requisição* para a Regra de Três Inversa. O seguinte problema de cinco termos, constante em Sridhara (750 d.C.), ilustra essa situação: "Alguma quantidade de fio foi usada em cobertores de tecelagem de largura 3 e de comprimento 9, os cobertores, assim, tecidos são 200. Com o mesmo fio quantos cobertores podem ser tecidos de largura 2 e 6 unidades de comprimento?" (SARMA, 2002, p. 151, tradução nossa).

Nesse problema, o *argumento* e a *requisição* são as quantidades de fio, mas não estão claramente postos, então para isso são consideradas as áreas de cada tipo de tapete – lógica da prática para assegurar que a área do tapete é uma medida da quantidade de fio que contém o tapete – e colocam essas áreas como *argumento* e *requisição*. Desse modo, é possível inferir – novamente por uma lógica prática – que quanto menor a quantidade de fio, maior será a quantidade de tapete produzida. Para Sarma (2002, p. 151, tradução e grifos nossos):

> Aqui pela multiplicação da largura e comprimento, a área é conhecida. Assim, o **produto** de 3 e 9 é 27. O **produto** de 2 e 6 é 12. A área 27 é a medida da quantidade dada (jhãtameyasamkhyã). Por isso, é o **argumento**. A quantidade 12 é a **requisição** por inversão. O número conhecido é o termo médio. Sentença: 27/200/12. Ao proceder de acordo com a regra dada, o resultado obtido é 450

O exemplo seguinte apresenta um problema de sete termos e reafirma a ideia que queremos destacar: "De um rubi gigantesco, medindo 4, 9, 8 côvados de comprimento, respectivamente, largura e altura, quantos ícones podem ser esculpidos de *Tirthahkaras*[65], cada um medindo 2, 6, 1 côvados de comprimento, largura e altura, respectivamente? (SARMA, 2002, p.152)". Provavelmente, para resolver esse problema o matemático Mahavira (850 d.C.) primeiramente escreveria os números do enunciado no esquema gráfico de arranjo de dados do seguinte modo (SARMA, 2002):

4, 9, 8	1	2, 6, 1

Em seguida, calcularia o produto de cada grupo e procedendo como preconiza o algoritmo da Regra de Três Inversa determinando a solução do problema como segue:

[65] Entidades da religião indiana Jainismo.

$$(4 \times 9 \times 8) \times 1 \div (2 \times 6 \times 1) = 288 \div 12 = 24$$

Portanto, a resposta final de acordo com o enunciado do problema é a seguinte: Podem ser esculpidos 24 ícones.

Em alguns casos, por meio de regras ou informações auxiliares, é possível obter sucesso na resolução do problema mesmo que não se conheça a lógica da prática. Mas, de modo geral, o algoritmo das Regras de Três Inversas, são empregadas em situações em contextos específicos que devem ser de algum modo, familiares aos alunos para que as habilidades da lógica da prática estejam a eles disponíveis para encaminhar a variante da regra de três adequada para se determinar a solução do problema considerado.

Seguindo a compreensão de Sarma (2002), todo esquema gráfico de arranjo de dados que pode ser utilizado para a regra de três, bem como os adotados para as regras com mais de três termos, foi desenvolvido no século VII, por exemplo, Brahmagupta em 628 d.C. prescreveu, de modo geral, a dupla coluna vertical para todas as regras com número ímpar de termos, em particular para a regra de três.

Entretanto, é importante, por sua generalidade, apresentar o processo algorítmico de resolução de tipos de problemas descrito em um manuscrito Telugu de acordo com Sarma (2002, p. 149, tradução nossa):

> (...) o que está claro é um método simples de resolver os problemas da regra de cinco, etc. Definir todos os termos horizontalmente em uma sequência. Se existem n termos, tomar o produto do último $\frac{(n+1)}{2}$ e dividir esta pelo produto do primeiro $\frac{(n-1)}{2}$ termos. Assim, no caso da regra de cinco, o produto dos últimos três termos é dividido pelo produto dos dois primeiros termos; ou, no caso da regra de sete, o produto do quarto, quinto, sexto e sétimo termos é dividido pelo produto do primeiro, segundo e terceiro termos.

No entanto, Sarma (2002) chama a atenção que esse processo Telugu que acabamos de descrever é o último estágio do processo proposto por Brahmagupta com dados sem frações e também é o mesmo que Bhaskara I havia sugerido antes de Brahmagupta propor o esquema gráfico de duas colunas verticais. Infelizmente, nem data, nem autor desse fragmento de texto é conhecido (SARMA, 2002, p.149, tradução nossa), que permita dar crédito histórico como fundador dessa praxeologia.

Como podemos notar, por interpretação de indícios históricos (DATTA; SINGH, 1938; SARMA, 2002), a obstinada intenção de facilitar a aprendizagem dos alunos levou os matemáticos hindus a considerarem os tipos de problemas que podiam ter suas soluções abreviadas com o emprego de Criações Didáticas, o que implica na construção de novas regras derivadas para esses tipos específicos de problemas que se traduzem em algoritmos.

A técnica da regra de três, quando empregada em problemas com três grandezas, em que uma está implícita, foi denominada pelos matemáticos hindus de inversa da regra. Nesse caso, o método aplicado consiste em empregar a regra de três – direta – duas vezes seguidas e levar a um resultado que pode ser expresso como aplicação direta da regra com a inversão dos dados conhecidos de uma grandeza.

De acordo com Zapata (2015) na obra Lilavati há carência de explicação para a Regra de Três Inversa, ela é mencionada como "regra de três invertida" referindo à ordem das quantidades das grandezas para execução das operações de multiplicar e dividir sendo invertida para esse tipo de problema, necessariamente após a ordenação adequada dos valores das quantidades.

O termo "inversa" utilizado para a regra não tem a ver com o reconhecimento de que as quatro quantidades envolvidas entejam em proporção inversa. A execução das operações de multiplicar e dividir deverá ser o inverso da regra original: multiplica-se o primeiro pelo segundo termos e divide pelo terceiro. Mais precisamente, "no método inverso, a operação é revertida". Ou seja, o fruto deve ser multiplicado pelo argumento e dividido pela requisição" (COLEBROOKE, 1817, p. 34).

Essa é, talvez, a mais embaraçosa Criação Didática da Matemática hindu a Regra de Três Inversa. Ela levou, mais tarde, a adotar a taxionomia para regra de três em direta e inversa. É importante destacar que a Matemática hindu não menciona esses termos quando tratavam problemas de regra de três. O embaraço que referimos está no fato de que essa técnica influenciou um novo modo de pensar a proporcionalidade matemática. Os hindus teriam influenciado a criação da "proporcionalidade inversa" para o ensino, embora este tipo de proporcionalidade não tenha existido no mundo matemático sábio.

Essa nova forma de pensar a proporcionalidade, que introduziu a taxionomia da proporção em direta e inversa, passou a integrar, mais tarde, o discurso tecnológico matemático da regra de três, daí sua importância neste trabalho. No entanto, no universo matemático sábio, não há a noção de "proporcionalidade inversa". Na França, por exemplo, "faz muito tempo que a proporcionalidade inversa não é mais um objeto de estudo oficial na escolaridade obrigatória" (CHEVALLARD, 2013, p. 87, tradução nossa).

Talvez a ação do fenômeno da transposição didática dos acontecimentos relativos às práxis da regra de três tenha imposta sua formalização na escola, no sentido de justificá-la tecnicamente recorrendo a objetos e procedimentos próprios da atividade matemática para garantir legitimidade. A obra "Lecciones de Aritmética" de Ambrosio Moya (1867) apresenta uma praxeologia geral para resolver todos os casos de regra de três cujo enunciado se insere no gênero de problema seguinte: *Achar o valor de várias unidades, conhecendo o de outras várias das mesmas*, sempre que existir proporcionalidade entre essas unidades e seus valores correspondentes[66]. Mais adiante, generaliza com toques algébricos para os casos direta e inversamente proporcionais: "Achar o valor de v de uma quantidade c, conhecendo o valor de v' de outra quantidade homogênea c', e sendo esses valores direta ou inversamente proporcionais a essas quantidades" [67](MOYA, 1867, pp. 357-358, tradução nossa).

Para obtenção do modelo resolvente – determina a solução do problema – Moya (1867, p.358, tradução nossa) postula condições para as quantidades envolvidas nos problemas de regra de três: devem ser homogêneas duas a duas e estejam ligadas entre si por uma proporcionalidade. A resolução consiste em uma multiplicação e uma divisão consecutivas; uma dessas duas operações dará o valor de uma unidade conhecida o valor de várias, e a outra dará o valor das outras várias unidades, conhecido o valor de uma. Atendidas tais condições seguem as técnicas algebrizadas a serem aplicadas:

> **1ª resolução**. Pelo método chamado comumente de *redução à unidade*:
> Quando os valores v e v' sejam diretamente proporcionais às quantidades correspondentes c e c', terá que, se c' unidades valem v', 1 unidade valerá ....$\frac{v'}{c'}$; e se 1 unidade vale $\frac{v'}{c'}$, c unidades valerão $\frac{v'}{c'} \times c = \frac{v' \times c}{c'}$: logo, resulta que $v = v' \times \frac{c}{c'}$.
> Quando os valores v e v' sejam **inversamente proporcionais** às quantidades correspondentes c e c', terá que, se c' unidades valem v', 1 unidade valerá: $v' \times c'$; e se 1 unidade vale $v' \times c'$, c unidades valerão .... $\frac{v' \times c'}{c}$: logo, resulta que $v = v' \times \frac{c'}{c}$.
> **2ª resolução**. Pelo emprego direto das igualdades fracionarias ou proporções:
> No primeiro caso, tem-se evidentemente $\frac{v}{v'} = \frac{c}{c'}$, de onde resulta que $v = v' \times \frac{c}{c'}$.
> No segundo caso, tem-se evidentemente $\frac{v}{v'} = \frac{c'}{c}$, de onde resulta que $v = v' \times \frac{c'}{c}$. Ambas as resoluções conduzem a resultados idênticos.
> Do exposto, infere-se a seguinte regra: Para achar o valor de uma quantidade, conhecendo a que corresponde à outra homogênea, multiplica-se este valor pela razão direta ou pela inversa destas quantidades, dependendo que estas sejam diretas ou inversamente proporcionais a seus valores correspondentes.

---

[66] *Hallar el valor de varias unidades, conociendo el de otras varias de las mismas*, siempre que exista proporcionalidad entre dichas unidades y sus valores correspondientes

[67] Hallar el valor v de una cantidad c, conociendo el valor v' de otra cantidad homogénea c', y siendo dichos valores directa ó inversamente proporcionales a dichas cantidades (MOYA, 1867, pp. 357-358).

Do mesmo modo, a preocupação de Moya com o ensino pode ter inspirado a praxeologia apresentada por Lima (2001, pp. 09-10) que define a noção de proporcionalidade inversa entre grandezas também por meio do cumprimento de condições:

> Diz-se que duas grandezas são inversamente proporcionais quando existe uma correspondência $x \mapsto y$ que associa a cada valor de x de uma delas um valor bem definido y da outra, de tal modo que sejam cumpridas as seguintes condições:
> 1) Quanto maior for x, menor será y. Em termos matemáticos: se $x \mapsto y$ e $x' \mapsto y'$ então $x < x' \Rightarrow y' < y$.
> 2) Se dobrarmos, triplicarmos etc. o valor de x então o valor correspondente de y será dividido por dois, por três etc. Em linguagem matemática: se $x \mapsto y$ então $nx \mapsto \frac{y}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Nesse caso, tais condições acabam por determinar a praxeologia para tipos de problemas de Regra de Três Inversa. O fazer algorítmico fica caracterizado em termos do fazer matemático. No entanto, para Lima (2001) dizer que y é inversamente proporcional a x equivale afirmar que y é proporcional a $\frac{1}{x}$. A diferença entre os dois tipos de sistemas clássicos só se marca em uma pequena "inversão" em um ponto determinado do processo de modelização (BOSCH, 1994). De certo modo, isso talvez seja uma evidência da ação do fazer protomatemático para se estabelecer um vínculo legítimo com a noção de proporcionalidade constituída no universo clássico da Matemática.

No entanto, todos esses processos de modelização de problemas de regra de três – ou de resolução algorítmicas – não eliminam definitivamente a dificuldade de tomada de decisão em relação ao tipo de relação se direta ou inversa, especificamente a inversa por se configurar como uma Criação Didática, determinada por uma lógica de natureza prática que depende da situação em contexto concreto, embora alguns métodos mágicos, se assim podemos dizer, buscaram desaparecer a necessária análise para distinguir o tipo de proporcionalidade, o método de causas e efeitos é um exemplo. Esse método parte do pressuposto que todo problema de Regra de Três Inversa é uma regra de três composta podendo, portanto, ser resolvida como direta (BOSCH, 1994).

Para ilustrar essa ideia, vamos tomar emprestado o exemplo discutido em Bosch (1994, p. 270, tradução nossa): Um capital de $5000 produz certa renda em 7 anos; que capital seria necessário para produzir a mesma renda em 4 anos, imposta a mesma taxa?

> Do ponto de vista do tratamento clássico, este problema faz aparecer uma relação de proporcionalidade *inversa*: para se obter uma renda dada, em um tempo de depósito menor supõe um capital maior. Se aplicarmos o método de causas e efeitos, resulta que a causa se decompõe em duas concausas, o capital

> e o tempo; o efeito disso constitui a renda produzida. Mas, esta renda não é dada. A dificuldade se resolve fazendo um pouco mais complexa a estrutura dos dados, introduzindo um parâmetro R, por exemplo, para designar o valor da renda. Isso nos conduz a seguinte tabela:
>
> | Concausas | Efeito |
> | --- | --- |
> | $5000 $\times$ 7 anos | R$ |
> | x $ $\times$ 4 anos | R$ |
>
> Passamos assim de ter dois pares (5000,7 e (x,4) para dois ternos: (5000,7,R) e (x,4,R). Ainda que na realidade o valor de R é indiferente porque se elimina no modelo resolvente $x = \frac{5000 \times 7 \times R}{4 \times R}$. A solução prática consiste então em tomar 1 por medida do efeito:
>
> | Concausas | Efeito |
> | --- | --- |
> | $5000 $\times$ 7 anos | 1 quantidade |
> | x $ $\times$ 4 anos | 1 quantidade |
>
> Mediante este artificio o método de causas e efeito apresenta uma grande vantagem: faz desaparecer a questão da proporcionalidade inversa.

Daí podemos destacar a composição ou regra de três composta que engendra a Regra de Três Inversa:

Valor $	Tempo	Quantidade
5000	7 anos	1
x	4 anos	1

Portanto, essa configuração, para além da discussão sobre o discurso tecnológico que justifica esse processo que apresentamos, permite-nos afirmar que todo problema de Regra de Três Inversa é um problema de composição, uma regra de cinco termos. Justifica-se então que essa complexidade entorno da Regra de Três Inversa motivou a busca por um algoritmo eficiente, rápido, seguro exclusivamente para facilitar o ensino.

8.4 Fundamentos teóricos do estudo: a pertinência da TAD para compreender a regra de três inversa como algoritmo

Nesta seção, exploramos a relevância da Teoria Antropológica do Didático (TAD) para compreender a Regra de Três Inversa, destacando sua aplicação além da Matemática pura e seu papel em contextos educacionais diversos.

Como podemos constatar, os aspectos das praxeologias da regra de três abordados como modelo simbólico de uma situação específica em dado contexto, cada um em seu papel, mostrou-se fundamental para o funcionamento das práxis, levando-se em consideração a produção cultural forjada na diversidade de saberes presentes na sociedade. Nessa linha podemos entender que o conhecimento se constrói em um processo evolutivo e histórico.

A pertinência da Teoria Antropológica do Didático (TAD) neste estudo se destaca em dois aspectos fundamentais: primeiro, a compreensão de que as práticas educacionais em matemática envolvem tanto conhecimentos matemáticos quanto extra matemáticos; em segundo lugar, a análise de como a Regra de Três Inversa, uma criação didática, se integra e enriquece o ensino matemático. Primero, o percurso traçado mostra que as práxis escolares da Regra de Três Inversa não foram produzidas sob a regência exclusiva da Matemática erudita, mas sim por componentes matemáticos e extra matemáticos que determinam o funcionamento de práxis com Matemática. Nesse sentido, o modelo geral proposto pela TAD concebida no seio das atividades humanas, nos permite compreender a integração de diferentes representações culturais que levam em conta aspectos matemáticos e não matemáticos, de certo modo, comuns na construção do conhecimento escolar.

O discurso que aqui levamos a cabo pretende ser, na medida do possível, objetivo ao tratar das Criações Didáticas evidenciado no aspecto de algoritmização, mas sem exaurir o tema, priorizando a (re) construção da semântica do objeto de saber – a Regra de Três Inversa – no mundo social, preferencialmente na cultura escolar. Para além disso, consideramos que as discussões aqui proferidas se sustentam em definitivo nas proposições teóricas disponibilizadas pela TAD, um marco teórico relativamente completo que entrega noções genuínas para analisar, interpretar e integrar diferentes instancias de fenômenos didáticos.

Não menos importante, ressaltamos o papel da Didática da Matemática entendida neste contexto como ciência cujo objeto de estudo é a difusão – e não difusão – social do conhecimento, no sentido de descrever e caracterizar os processos didáticos, no âmbito escolar, para propor explicações e respostas consistentes para o enfrentamento das dificuldades que emanam dos envolvidos no estudo ou na ajuda ao estudo da Matemática (CHEVALLARD, BOSCH e GASCÓN, 2001).

A TAD, em seu modelo praxeológico alberga as atividades desenvolvidas pelas pessoas em diferentes áreas do conhecimento, aspecto plenamente satisfeito pelas práxis da regra de três. Advoga um tipo de enfoque social dos fenômenos didáticos (CHEVALLARD,1992). Todas as atividades que envolvem um indivíduo são determinadas por uma rede de relações composta por condições e restrições de natureza social. A noção de organização praxeológica ou praxeologia, consiste em um modelo geral para descrever atividades humanas regularmente como recursos culturais produzidos (ROMO VÁZQUEZ e CASTELA, 2013).

Essa noção, permitiu analisar e interpretar de modo razoável as práxis da regra de três, em particular da Regra de Três Inversa como um algoritmo construído para facilitar o ensino, pois assume como componente primário o saber, o qual orienta o desenvolvimento e funcionamento do conhecimento, ao apresentar a estrutura composta por duas dimensões: a *práxis* ligada ao saber-fazer, o técnico-prático, que engloba os tipos de tarefas, os problemas e as técnicas construídas; enquanto que a outra dimensão, o *logos* ou saber, o tecnológico-teórico, que corresponde ao caráter explicativo e organizador das atividades relacionadas a essa dimensão.

De outro modo, as praxeologias são engendradas por um jeito de pensar e fazer em sentido amplo, o que inclui saberes procedimentais, a partir de estruturas praxeológicas menos complexas, como as praxeologias pontuais, constituídas de um tipo de *práxis,* ou seja, de um tipo de tarefas **T** e uma técnica **τ** que diz como se faz tal tarefa **t**, acompanhada de um *logos*, ou tecnologia, que explica, justifica ou produz essa técnica. A praxeologia pontual é uma unidade indivisível, *práxis* mais *logos*, embora, em geral, seja tomada em metonímia e assim possa ser reduzida apenas à práxis (CHEVALLARD, 1991).

Como fundamento a noção de praxeologia permitiu entender que as práxis da Regra de Três Inversa discutidas e analisadas engendraram a noção de praxeologia com matemática (GUERRA; SILVA, 2018), ao encaminhar um olhar para uma organização praxeológica com uma técnica composta por diferentes técnicas, matemáticas e não matemáticas, sustentadas por saberes infra estruturais, matemáticos e não matemáticos, inclusive por saberes práticos, que são coordenados segundo uma lógica prática superestrutural (CHEVALLARD, 2009) da atividade institucional em que se insere a praxeologia.

Assim, acreditamos que a aproximação das praxeologias com matemática com as práticas sociais com matemática, de Chevallard (1991), potencializa o modelo praxeológico (CHEVALLARD, 1999) para análises de praxeologias complexas que envolvem saberes matemáticos, mas não se restringem à instituição Matemática e vivem em diferentes instituições, na engenharia por exemplo, em particular as praxeologias com matemática escolares, como as da regra de três inclusive da Inversa que se configura como algoritmo para problemas específicos cujo propósito é facilitar o ensino.

Isto posto, de certo modo, contorna possíveis confusões interpretativas sobre as noções que evocamos para interpretar os fenômenos didáticos relacionados às práxis algorítmicas da Regra de Três Inversa e vincula a legitimidade do referencial teórico aqui adotado. Mais ainda, a pertinência da aproximação teórica TAD se fortalece ao permitir considerar os aspectos práticos presentes nas práxis da Regra de Três Inversa caracterizando-a potencialmente como uma Criação Didática, um algoritmo criado genuinamente para escola, ao admitir que as tarefas e as técnicas de uma determinada praxeologia possam ser engendradas por um *logos* não restrito à instituição Matemática.

Portanto, o conjunto articulado de noções teóricas que invocamos ao largo deste texto nos autoriza encaminhar definitivamente este trabalho metodologicamente distinto de outros realizados (BOSCH, 1994; GARCIA, 2005) que envolveram de algum modo nosso objeto de estudo, a Regra de Três Inversa sob a compreensão da TAD, em nosso caso por não adotar a *priori* um modelo epistemológico de referência, com base em argumentos exclusivamente matemáticos para conduzir nossas análises investigativas desenvolvidas em torno das práxis da Regra de Três Inversa como uma Criação Didática, um algoritmo eficiente para o ensino.

8.5 Considerações finais

Este estudo revelou a complexa diversidade taxonômica das práxis envolvendo a regra de três, destacando certas nuances imbricadas nas situações em contextos específicos reais. Tais descobertas sublinham a riqueza e a profundidade das práticas educacionais que circundam a Regra de Três Inversa, demonstrando sua relevância além do campo estritamente matemático.

A discussão sobre a noção de proporcionalidade, sobretudo a proporcionalidade inversa, como fundamento matemático constitui sem dúvidas um ponto crucial, inclusive para matemáticos profissionais, nas práxis da Regra de Três Inversa. Entendida como uma Criação Didática, um algoritmo genuinamente escolar, torna-se possível considerar outros aspectos extra matemáticos para compor o objeto de ensino. É notório que as carências infraestruturais de natureza matemática evidenciam certos inconvenientes (CHEVALLARD, 2009), o sentido atribuído à noção de proporcionalidade envolve elementos de natureza prática, por exemplo, de como um aluno poderá identificar precisamente o caráter inverso em dada situação caracterizada como de regra de três.

Destacamos que as formulações e reformulações da regra que ocorreram no decorrer do tempo e em diferentes lugares, não foram por acaso, mas sim parecem seguir sempre uma intenção didática designada como princípio: facilitar o emprego da técnica na resolução de problemas; talvez essa seja a razão principal das organizações praxeológicas para o ensino da regra de três direta e inversa. Os hindus, como vimos manifestaram objetivamente tal preocupação por meio das Criações Didáticas, para eles a técnica de resolução de problemas deveria estar ao alcance de todos, mesmo para os menos dotados de conhecimento matemático (DATTA e SINGH, 1938).

Os diferentes problemas de regra de três podiam ser ensinados e aprendidos com as novas regras ou algoritmos criados, segundo seus respectivos esquemas gráficos de arranjo de dados. Parece-nos, portanto, que as Criações Didáticas atendiam sobretudo a interesses do ensino das praxeologias, inclusive da Regra de Três Inversa, cujo domínio da práxis era desejado para o exercício em diferentes práticas sociais.

Mas, é importante deixar claro que havia variações da regra com os esquemas gráficos de arranjo de dados como os apresentados aqui. A regra de três, podia ser desenvolvida a partir do dispositivo que seguia a ordem dada pela sequência dos termos técnicos – *argumento, fruto* e *requisição* – em uma única linha horizontal ou uma única coluna vertical, ou ainda por meio do dispositivo de duas colunas, tendo a célula do valor procurado vazia ou com o símbolo "0".

Se não há dúvidas entre historiadores da Matemática de que o propósito de Aryabhata, matemático e astrônomo indiano ao enunciar a regra de três, foi empregá-la em cálculos da Astronomia, parece claro que esse fazer não foi somente para atender às suas próprias necessidades, mas para tornar possível que uma pessoa comum pudesse também dominar a práxis de fazê-la sem necessariamente ter domínio do conhecimento tecnológico-matemático avançado. Nesse sentido, Bhaskara I (522 d.C.), de acordo com Sarma (2002), apresentou pela primeira vez sete exemplos de problemas com regras próprias – algoritmos – conhecidas como variantes da regra de três, para seus enfrentamentos, inclusive com respeito ao uso ou não de frações, que se tornaram posteriormente tópicos de interesse, em particular, em textos sobre a aritmética prática e comercial, como por exemplo, o problema do preço e quantidade de sândalo.

Os exemplos-modelos de Bhaskara I tinha a intenção primordial de cobrir todo tipo de problema no qual a regra de três podia ser aplicada. De acordo com Sarma (2002), matemáticos posteriores a Bhaskara I, como Sridhara (750 d.C.) e Mahavira (850 d.C.), criaram temas independentes com essas variações, como *gati-nivrtti* "movimento para frente e para trás", *praksepa-karana* "sociedade" e vários tipos de *misraka* "quantidades mistas", com formulações de regras específicas para suas resoluções. Os enfrentamentos desses tipos de problemas envolviam o uso sequencial de regras de três que não eram facilmente encontradas por aqueles que não estavam dotados das habilidades lógicas das práticas que tratavam os problemas, no entanto, era de poder prático inquestionável.

Por fim, entendemos que esta abordagem encaminha, mesmo que parcialmente, possíveis respostas à questão inicial proposta: Como a práxis da Regra de Três Inversa poderá se constituir em uma Criação Didática, ou seja, um algoritmo específico para atender o campo de práticas escolares? Nesse sentido, parece razoável pensar a Regra de Três Inversa como uma práxis que mobiliza procedimentos, objetos e instrumentos de natureza matemática e não matemática integrados e sistematizados, de tal forma que se constitui genuinamente em um potente algoritmo para tipos de problemas, dotado de racionalidade eminentemente prática com intuito claro de facilitar o ensino.

Referências

ÁVILA, G. Razões, proporções e regra de três. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 8, p 1-8, 1986.

BOLEA, P. El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.**Monografía del Seminario Matemático García de Galdeano**,n. 29. Zaragoza, Spain: Departamento de Matemáticas, Universidad de Zaragoza, 2003.

BOSCH, M. La dimensión ostensiva en la actividad matemática.El caso de la proporcionalidad, **Tesis doctoral**, UAB, Barcelona, 1994.

CHEVALLARD, Y**. La transposición didáctica**. Del saber sabio al saber enseñado. 3. ed. 2. reimp. Buenos Aires: Aique Grupo Editor,1991.

CHEVALLARD, Y. Fundamental concepts in didactics: Perspectives provided by an anthropological approach. **Research in Didactique of Mathematics, Selected Papers. La Pensée Sauvage**, Grenoble, p. 131-167, 1992.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Y. À propos des PER. In: **Journal du Seminaire TAD/IDD** – 1; pp. 7-23, 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/journal-tad-idd-2009-20010-1.pdf Acessado em 15 de novembro, 2023.

CHEVALLARD, Y. **La matemática en la escuela: Por una revolución epistemológica y didáctica**, Buenos Aires. Libros del Zorzal, 2013.

CHEVALLARD, Y. BOSCH, M. GASCÓN, J. **Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem**. Trad. Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

COLEBROOKE, H. T. **Algebra with Arithmetic and Mensuration from the Sanskrit Texts of Brahmagupta and Bhaskara**, 1817.

COMIN, Eugène. Proportionnalité et fonction linéaire Caractères, causes et effets didactiques des évolutions et des réformes dans la scolarité obligatoire. **Tese de Doutorado**, Université Sciences et Technologies - Bordeaux I, 2000.

DATTA, B. SINGH, A. N. **History of Hindu mathematics**. Asia Publishing House; Bombay, 1938

DEL POTRO, B. C.; CÓRDOBA de la Llave, R. C. Oficios urbanos y desarrollo de la ciência y de la técnica en la baja edad media: la corona de castilla. **Revista de Historia, Norba**, v. 17, 41-48, 2004.

EVES, H. Introdução à história da matemática, tradução: Hygino H. Domingues, Campinas-SP: **Editora da UNICAMP**, 2001.

GARCÍA, F. J. La modelización como herramienta de articulación de la matemática escolar: de la proporcionalidad a las relaciones funcionales. **Doctoral dissertation**. Universidad de Jaén. 2005.

GUERRA, R. B.; SILVA, D. P. da. REGRA DE TRÊS: uma praxeologia com matemática. In: Saddo Ag Almouloud; Luiz Marcio Santos Farias; Afonso Henriques. (Org.). **A teoria antropológica do didático**: princípios e fundamentos. 1ª ed., Curitiba: CRV, 2018, v. 1, p. 377-392

GUERRA, R. B.; SILVA, F. H. S. Reflexões sobre modelagem matemática crítica e o fazer matemático da escola. **Perspectivas da educação matemática**, Campo Grande, MS, v. 2, n. 3, pp. 95 – 119, 2008.

HEEFFER, A. The tacit appropriation of Hindu algebra in renaissance practical arithmetic. **Gaṇita Bhārāti**, v. 29, n. 1-2, p. 1-60, 2007.

HEEFFER, A. Epistemic Justification and Operational Symbolism. **Foundations of Science**, v. 19, n. 1, p. 89-113, 2014.

HØYRUP, J. **Sanskrit-Prakrit interaction in elementary mathematics as reflected in Arabic and Italian formulations of the rule of three–and something more on the rule elsewhere**. 2012.

HØYRUP, J. (1994). **In Measure, Number, and Weight, Studies in the Mathematics and Culture**, State University of New York Press, Albany.

HØYRUP, J. (2007a). **Jacopo da Firenze's Tractatus algorismi and early Italian abbacus culture.** Springer Science & Business Media.

HØYRUP, J. (2007b). Further questions to the historiography of Arabic (but not only Arabic) mathematics from the perspective of Romance abbacus mathematics.In 9ª **Colloque Maghrébins l' Histoire des Mathématiques Arabes**.Tipaza, 12–13–14.

LIMA, E. L. Que são grandezas proporcionais. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.9, pp. 21-29, 1986.

LIMA, Elon Lages et al. **Meu Professor de Matemática e outras histórias**. Sociedade Brasileira de Matemática, 1991.

LIMA. E. L. **Temas e Problemas,** 7ª Edição, ISBN 85-8581810-7, Publicação SBM 2001.

LIMA, E. L. *et al.* **A matemática do ensino médio**. Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, v. 1, 2004.

MAZZANTI, D. L. et al. **Educação de jovens e adultos: uma aplicação da regra de três e porcentagem em cálculos trabalhistas**. 2008.

MOYA, A. **Lecciones de aritmética**. Segundo Martínez, 1867.

NETO, O. S. A Regra de Três nos currículos ao longo da história. **SIMPEMAD-Simpósio Educação Matemática em Debate**, v. 1, p. 105-119, 2014.

PONTES, M. G. O. **Medidas e proporcionalidade na escola e no mundo do trabalho**. Tese (Doutorado em Educação). Campinas: UNICAMP, 1996.

ROZENFELD, B. A. Muhammad ibn Musa al-Xorezmi, **Kratkaja kniga ob isčislenii algebry i almukabaly**, pp. 20–81, notes 118–142 *in* S. X. Siraždinov (ed.), Muxammad ibn Musa al-Xorezmi *Matematičeskie traktaty*. Taškent: Izdatel'stvo »FAN« Uzbekskoj CCP., 1983.

SARMA, S. R. Rule of three and its variations in India. **From China to Paris: 2000 years transmission of mathematical ideas**, p. 133-56, 2002.

SILVA, D. P. da. Regra de três: prática escolar de modelagem matemática. 2011. **Dissertação** (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA.

SILVA, D. P. da**.** A Invariável Prática da Regra de Três na Escola. 2017. **Tese**. (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas), Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém-PA.

ZAPATA, G. O. **Sistema de prácticas matemáticas en relación con las Razones, las Proporciones y la Proporcionalidad en los grados 3º y 4º de una institución educativa de la Educación Básica**. (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Colômbia, 2015. Retrieved from http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf

9- Medida de comprimento: uma sequência didática na perspectiva da grandeza e medida

Nazaré do Socorro Moraes da Silva
José Messildo Viana Nunes

Introdução

Este trabalho consiste em um recorte de uma pesquisa de mestrado acerca do ensino de grandezas e medidas, em especial medida de comprimento, em que buscamos legitimar uma sequência didática que favorecesse o ensino de medida de comprimento a partir da noção de grandeza e medida (SILVA, 2017). Tal temática surgiu de nossas inquietações, com base nas experiências de sala de aula, ao observarmos as dificuldades dos alunos a resolverem problemas envolvendo conceitos inerentes à medida, principalmente no que tange à conversão de unidades de medida. Além da relevância do tema para o meio social devido seu caráter prático e utilitário e de possibilidade de conexão com outras áreas do conhecimento (BRASIL, 1998).

Problemática apontada e enfrentada em diversos estudos como, Moura (1995), Rodrigues (2007), Backendorf (2010), Silva, C. (2011), Abbondati (2013), dentre outros, ao abordarem o comprimento com enfoque na medida por meio da comparação com ação de medir, explorando as diferentes unidades de medida expressas por números reais positivos, com auxílio de contexto histórico e de práticas não convencionais para medir. Essa problemática tomou maior dimensão no campo da Educação Matemática com os trabalhos de Brito (2003), de Teixeira (2004), de Barbosa (2007) e de José da Silva (2011) ao abordarem o comprimento na perspectiva da grandeza por meio da comparação sem ação de medir (sem uso de número), estabelecendo a relação de maior, menor ou igual. Nessa revisão de estudos percebemos duas discussões acerca do objeto de estudo. A primeira, enfatizando o comprimento enquanto grandeza e a segunda, evidenciando o comprimento como medida.

Com base nos estudos da literatura percebemos que essa problemática alcança vários níveis de ensino desde os anos iniciais do ensino fundamental, principalmente em relação a medida, unidade e medida de comprimento e as transformações de unidades. As pesquisas supracitadas apontam as dificuldades que tem origem em práticas de ensino que priorizam a noção de medir ao uso de instrumento de medida, e ao tamanho do objeto, tal abordagem acarreta, por exemplo, que o aluno assuma a transformação de unidade como algo mecânico e memorialístico, sem sentido, ou seja, sem conhecer a razão de ser de se estudar medida e grandeza.

Outro ponto importante, refere-se ao comprimento enquanto grandeza, fato pouco explorado em sala de aula, pois ao iniciarmos com o tema grandezas e medidas, falamos geralmente das diferentes grandezas, mas não tratamos a noção de grandeza, passamos diretamente para medida da grandeza. Essa situação é apontada nos estudos de Silva, J. (2011), ao analisar livros didáticos, o autor verificou que as tarefas preponderantes no livro se remetem a medir comprimento, a converter uma unidade de comprimento em outra unidade de comprimento.

Diante dessa problemática, na pesquisa de mestrado para tratarmos as noções inerentes ao tema em questão e sua abordagem em sala de aula, tomamos como base a Teoria das Situações Didática (TSD) de Guy Brousseau (1986, 2008) e os aspectos da Engenharia Didática de Michele Artigue (1996), que nos permitiu o percurso de investigação, delineado em quatro fases[68]:

- A primeira, as análises prévias, permitiu-nos um estudo aprofundada acerca do tema em questão, considerando: a revisão de estudo sobre o tema, que nos refletir sobre as dificuldades apontadas e a atividades realizadas; um apanhado histórico sobre pesos e medidas, em particular medida de comprimento e um estudo teórico sobre grandeza e medida e, sobretudo o comprimento. Esta fase é relevante à fase seguinte, em razão de apontar certo número de variáveis didáticas e definir suas escolhas.
- A segunda, concepções e análise a priori, nesta fase construímos a sequência didática com base no estudo realizado na fase anterior;
- A terceira, experimentação, refere-se à parte prática da pesquisa, em que foi possível a aplicação da sequência didática com a turma do 6º ano do ensino fundamental; e quarta, a análise a posteriori e validação, corresponde à última fase em

[68] Ver detalhes em SILVA (2017)

que trata a análise do que ocorreu durante o desenvolvimento da sequência, bem como o confronto das análises a priori e a posteriori, a validar ou não a sequência.

No entanto, para o presente trabalho, objetivamos apresentar aspectos da construção sequência didática para o ensino de medida de comprimento nos domínios da grandeza e da medida. Para tanto, iniciamos com um breve referencial teórico basilar para concepção da sequência didática – a noção de medida de comprimento a partir da articulação dos quadros: geométrico, das grandezas e medida e alguns elementos teórico da TSD; posteriormente trazemos uma descrição da sequência didática, em seguida apresentamos aspectos do desenvolvimento e análise das atividades da sequência e, por fim tecemos algumas considerações em torno desse estudo.

9.1 Referencial teórico

Para construir a sequência didática apoiamo-nos em alguns referenciais para tratar a noção medida de comprimento a partir de sua grandeza, como o modelo didático de Douady e Perrin-Glorian (1989), Brito (2003), Caraça (1951) entre outros. Quanto à relação didática, nos ancoramos na Teoria das Situações Didáticas defendida por Brousseau (1986, 2008) para definirmos o desenvolvimento da sequência didática.

9.1.1 Uma breve abordagem sobre grandezas e medida, em especial medida comprimento

A partir da revisão de estudo sobre grandeza e medida, com o foco em comprimento apontamos a importância de se desenvolver em sala de aula atividades que evidenciasse as noções de comprimento enquanto grandeza, tratando esta noção como um atributo ou propriedade do objeto a ser medido, e após a construção desta ideia tratar a medida como a quantificação de uma grandeza expressa por um valor numérico por meio do ato de medir. Uma das fontes de dificuldade de aprendizagem para os alunos, consiste quando não se toma os devidos cuidados na diferenciação entre grandeza e medida.

Apontamos nos trabalhos que enfatizaram a medida de comprimento a relevância do uso do contexto histórico sobre esse tema como uma fonte de justificativa para dar razão de ser a noções, como medir, o porquê medir, a necessidade de unidade de medida padrão entre outros. Essas discussões nos levaram a realizar estudos envolvendo comprimento tanto nos domínios da grandeza como da medida. Estudos que resultaram na construção de uma sequência didática abarcando esses domínios.

Nesses termos, a sequência didática aborda a noção de comprimento permeando os domínios da grandeza e da medida, conforme as características atribuídas ao comprimento, organizados em três quadros[69]: o geométrico, o da grandeza e o numérico (Quadro 1).

Quadro 1- Síntese dos aspectos de comprimento atribuído aos três quadros

Geométrico	Grandeza	Numérico
Objetos geométricos que se remetem ao comprimento – linhas abertas poligonais, não poligonais e segmento de reta.	Comprimento como propriedade do objeto - Classe de equivalência, relação de ordem e grandezas particulares ao comprimento, como distância, perímetro e largura.	Medidas de comprimento usando diferentes unidades: Quantificação da grandeza comprimento - atribuir um número real positivo a esta grandeza

Fonte: Silva, 2017, p. 56

Para delinear esse modelo conforme o quadro 1 acima, nos inspiramos no modelo didático sobre área proposto por Douady e Perrin-Glorian (1989)[70] e adaptamos o modelo de Brito (2003) referente a construção do conceito de comprimento como grandeza. Vale ressaltar que Brito, por sua vez, também se inspirou nessas pesquisadoras, adaptando o modelo das autoras ao comprimento, explorando apenas o quadro geométrico e o da grandeza.

Brito (2003) atribuiu ao quadro geométrico as linhas abertas ou fechadas, enquanto em nossa pesquisa caracterizamos esse quadro com os seguintes objetos geométricos: linhas abertas poligonais, não poligonais e segmento de reta. Em relação ao quadro da grandeza caracterizamos o comprimento como propriedade do objeto, em que se realiza a comparação de comprimentos de objetos sem ação de medir (sem usar número), estabelecendo a relação de maior, menor ou igual (relação de ordem); bem como, comparação entre comprimentos de objetos que possuem linhas diferentes, evidenciando que pode possuir a mesma quantidade de comprimento (classes de equivalência).

Em relação a esse quadro caracterizamos conforme referências atribuídas por Brito (2003) e, consideramos, assim como a autora, o perímetro como uma particularidade

[69] Douady (1993) apud Almouloud (2007, p.64) - Caracteriza o quadro como sendo constituído de ferramentas de uma parte matemática, de relação entre os objetos, de formulações eventualmente diferentes e de imagens mentais associadas a essas ferramentas e relações. Dois quadros podem ter os mesmos objetos e ser diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida.

[70] Douady e Perrin-Glorian (1989) propuseram um modelo didático para a construção do conceito de área por meio da distinção e articulação entre os quadros: geométrico, constituído pelas superfícies planas; das grandezas constituído pela noção de área, está caracterizada pelas classes equivalentes de superfícies de mesma área, e por fim o quadro numérico, este refere-se às medidas da área de superfície, correspondente ao conjunto dos números reais positivos

da grandeza comprimento. Atribuímos também a este quadro a distância como caso particular da grandeza de comprimento, pois segundo Barbosa (1997) a distância é o comprimento do segmento determinado por dois pontos.

O quadro numérico refere-se à quantificação da grandeza comprimento, caracterizamos sua constituição pelas medidas de comprimento, elegendo diferentes unidade seja não padronizada ou padronizada, expressas por números reais positivos para representar a medida da grandeza, assim como apontado por Brito. Para abordar a passagem do quadro da grandeza para o numérico tomamos como referência o estudo de Caraça (1951), ao discorrer que comparar estabelecendo a relação de maior que, ou menor que é relevante, mas não é o suficiente, pois tem situações que envolvem o contexto social em que é necessário saber quanto é maior ou quanto é menor.

Para isto, precisa medir, elegendo um termo de comparação único de grandeza de mesma espécie para quantificar a grandeza a ser medida, e assim, obter um resultado. Tratamos neste quadro, a noção de comprimento defendida por Lebesgue (1935), citado por Palaro (2006), por meio da comparação de segmentos que nos leva a inferir a ideia de subdivisão das unidades de medida.

Com base nas características atribuídas ao comprimento, evidenciamos na sequência didática a noção de comprimento como grandeza por meio da passagem do quadro geométrico ao quadro da grandeza, explorando a comparação de caminhos com linhas retas e curvas, estabelecendo a relação de ordem e de equivalência. Quanto à noção de medida de comprimento, exploramos a passagem dos quadros da grandeza para o numérico por meio da escolha de uma unidade de medida mencionada no parágrafo anterior.

Para auxiliar na abordagem desses quadros, as atividades da sequência didática foram planejadas para serem desenvolvidas nos moldes da Teoria das Situações didática de Guy Brousseau, em particular em termos das situações de ação, formulação, validação e institucionalização.

9.1.2 Teoria das Situações Didáticas

A TSD foi desenvolvida Guy Brousseau para modelar o ensino e o processo de aprendizagem dos conceitos matemáticos, criando um modelo de interação entre o aluno, o saber e o milieu[71] (meio), em que a aprendizagem possa se desenvolver. Pois para ele, "o aluno aprende se adaptando com o *milieu* que é um fator de contradição, de dificuldade, de desequilíbrio, um pouco como fez a sociedade humana" (ALMOULOUD, 2007, p. 32).

Para Brousseau (1986) as atividades matemáticas podem ser modeladas em termos de situações. Situações de ensino, que valorizasse tanto o conhecimento prévio do aluno e seu envolvimento na construção do conhecimento matemático, em que o aluno possa ter um papel de ator principal no processo de sua aprendizagem, sendo responsável por uma parte desta. E o professor responsável em criar condições que possibilitem tal processo.

Tal situação é denominada de situação didática. Conforme Almouloud (2007, p. 33) com base em Brousseau (1978), esta situação é o objeto central das teorias das situações, como define:

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo milieu (contendo eventualmente instrumentos ou objetos) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em constituição.

Esse processo ocorre perante um "jogo hipotético" que expressa um sistema de condições necessárias mínimas para o conhecimento definido, em que pode ocorrer pelas decisões para efeitos observáveis de uma atuação em um meio regido de regras estabelecidas explícita ou implicitamente entre professor, aluno e o conteúdo em jogo, chamado de contrato didático[72]

Segundo o autor, para modelar uma situação didática que possa permitir a aquisição do conhecimento por parte do aluno é necessário que o milieu esteja munido de intenções didáticas, mas para que isso ocorra, o professor precisa criar condições que provoquem a aprendizagem. Neste caso a situação adidática é uma grande aliada.
Segundo Almouloud (2007) a situação didática tem como parte essencial a situação adidática, em que a intenção de ensinar não é revelada ao aluno, mas foi pensada e

[71]Para Brousseau (1990, p. 320, tradução nossa) "O sistema antagônico do jogador em uma situação é tanto para o jogador quanto para o observador, um modelo da parte do universo ao qual o conhecimento está em jogo e as interações que ele determina. É esse sistema antagônico que propusemos chamar de *milieu*".

[72] Segundo Brousseau o contrato didático é uma relação que determina explicitamente, em certa medida, mas principalmente implicitamente, o que cada parceiro, professor e aluno, terá a responsabilidade de gerir e, de uma forma ou de outra, ser responsável perante o outro. Esse sistema de obrigações reciprocas assemelha-se a um contrato. O que interessa nesse contexto é o contrato didático, ou seja, a parte deste contrato que é específica ao "conteúdo", o conhecimento matemático alvo (BROUSSEAU, 1986, pp. 31- 32).

construída pelo professor com intuito de proporcionar ao aluno condições que o leve a aquisição do novo saber que se deseja ensinar.

A situação didática iniciasse a partir do momento que o professor propõe o problema ao aluno para que ele resolva, tomando para si parte da responsabilidade pela aprendizagem, denominado de devolução[73], que por sua vez, deve ter a intenção de provocar uma interação suficientemente rica e que permita ao aluno o desenvolvimento autônomo. Conclui-se com a institucionalização, em que o professor dá estatuto ao conhecimento produzido pelo aluno. Agora, se o aluno aceitar tal desafio e obtiver sucesso, inicia-se o processo de aprendizagem.

Brousseau (2008) analisa esse processo em quatro tipos de situações: ação, formulação, validação e institucionalização.

Situação de ação: exige que o conhecimento do aluno se manifeste por decisões e ações adequadas e eficazes sobre o meio. O aluno não precisa expressar essas ações por meio de algum discurso e nem explicar o conhecimento. Apenas apresentar resposta a um problema, de modo mais experimental e intuitivo do que teórico.

Situação de formulação: nesta situação é necessário comunicar uma informação matemática, ou seja, expressar o seu conhecimento de forma mais elaborada, apoiado em alguma teoria, para explicitar ao parceiro ou a outro e convencê-los, e ambos chegarem a uma decisão satisfatória sobre o meio. Neste caso, o aluno precisará mobilizar conhecimentos anteriores. Em suma, o aluno deverá apresentar justificativas com base em aspectos teóricos, que os levaram chegar à determinada solução.

Situação de validação: esta é a situação em que o aluno precisa provar o seu conhecimento formulado, por meio de debates, discussões confrontando opiniões, e procurar entrar em acordo utilizando argumentos, teoremas, leis que possam validar o seu conhecimento.

Por fim a *situação de institucionalização*: esta situação refere-se ao professor, que dará estatuto aos conhecimentos validados pelos alunos, com o intuito de situar um caráter universal, articulando com outros conhecimentos. Tornando assim, o conhecimento novo produzido pelos alunos socialmente aceito.

A situação de institucionalização tem a finalidade de buscar o caráter objetivo e universal do conhecimento estudado pelo aluno. Sob o controle do professor, é o

[73] Segundo Brousseau (2008, p. 91) a devolução é o ato pelo qual o professor faz com que o aluno aceite a responsabilidade de uma situação de aprendizagem (adidática) ou de um problema e assume ele mesmo as consequências dessa transferência.

momento em que se tenta proceder à passagem do conhecimento, do plano individual e particular, à dimensão histórica e cultural do saber científico (PAIS, 2008).
Essas situações de ação, formulação e validação caracterizam-se como adidáticas, por fazerem parte de momentos que possibilitam a construção do conhecimento por parte do aluno, ou seja, o "controle" sobre produção do conhecimento está nas mãos do aluno e, por sua vez, o professor tem administra somente do andamento da situação. A institucionalização é uma situação de natureza didática, em que o professor esclarece e legitima o conhecimento produzido na situação adidática, reforçando e generalizando, dando-lhe um estatuto, em uma passagem desse conhecimento em jogo para uma dimensão histórica e cultural do saber científico.

Outro ponto importante a destacar é que essas situações se entrelaçam, podendo ocorrer ao mesmo tempo ação e formulação por parte do aluno durante o processo de aprendizagem. A forma que apresentamos foi somente para evidenciarmos os aspectos fundamentais de cada uma.

Para que esse processo possa ocorrer é fundamental um milieu planejado e organizado pelo professor a partir das escolhas das variáveis didáticas, que são variáveis cognitivas, que o professor pode determinar e controlar. Variáveis pelas quais a mudança de valores provoca modificações nas estratégias ótimas, o que a atribui um papel relevante no estudo de modelos de aprendizagem conforme a TSD (ALMOULOUD, 2007). Além de um contrato didático para gerir esse processo sob a administração do professor.

Neste contexto, as atividades da sequência foram planejadas para serem desenvolvidas a partir das situações que possibilitasse o aluno a ter o papel de ator principal na construção do seu conhecimento.

9.2 Descrição da sequência e expectativas

Com base nesses referenciais, delineamos uma sequência didática com oito atividades a partir situações-problema considerando três abordagens: aspectos históricos sobre pesos e medidas e, sobretudo medida comprimento; a noção de comprimento como grandeza e noção de comprimento como medida.

Em relação aos aspectos históricos procuramos abordar a origem, evolução e os porquês noções inerentes a grandezas e medidas, considerando as primeiras ações em relação ao ato de medir a necessidade medir, os instrumentos de medida utilizados pelos povos antigos, em especial as medidas antropométricas, a importância de determinar uma medida padrão. Esta abordagem compreendeu a primeira atividade da sequência e, foi proposta como ponto de partida em torno desse tema e para auxiliar os alunos nas atividades subsequentes.

A abordagem de comprimento como grandeza – buscamos explorar a noção de comprimento por meio da comparação sem ação de medir (sem uso de números), estabelecendo a relação de maior, menor, mais curto, menos curto ou igual com atividade envolvendo comparação de linhas retas e curvas. Assim, evidenciar a passagem do quadro geométrico para o quadro da grandeza. Esta abordagem compreendeu a segunda atividade da sequência, constituída de três questões envolvendo a comparação de caminhos com linhas retas e curvas. Para esta atividade, os alunos puderam utilizar como estratégias a visualização ou/ e a sobreposição de objetos medianeiros[74], retirados da caixa de ferramenta[75] para auxiliar na comparação entre os caminhos.

Quanto a noção de comprimento como medida – buscamos evidenciar a passagem do quadro da grandeza para o numérico, com a quantificação da grandeza comprimento (atribuir um número), ao explorarmos situação-problema que se exigiu a necessidade de medir, elegendo unidades de medidas não padronizadas, padronizadas e a constituição de uma medida padrão, o metro e conversão de unidades de medida. Esta abordagem abarcou seis atividades da sequência (3ª até 8ª), e os alunos puderam também utilizar os objetos da caixa de ferramenta. Apresentamos no quadro 1 a seguir uma síntese da sequência didática.

[74] Medianeiros: caracterizados por Brito (2003) como instrumentos da caixa de ferramenta que servem para mediar comparações que não podem ser feitas diretamente.
[75] Silva (2017) caixa com borracha branca, canetas hidrográficas de cores diferentes, lápis grafite e tesoura escolar e outros materiais que utilizamos como medianeiros, no caso, barbante, linha de crochê, canudo de plástico, palitos de picolé, fita crepe e barra de madeira com aproximadamente 3 centímetros sem graduação.

Quadro 1 - Síntese da sequência

Abordagem	Atividades	Objetivos
Contexto histórico	1- Os primeiros passos para medir	Ler, interpretar e discutir sobre o texto; destacar palavras e excerto do texto.
Comprimento como grandeza	2 - Comparação de caminhos	Realizar comparação de comprimentos sem ação de medir.
Quantificação da grandeza (medida de comprimento)	3 – A medida da altura dos alunos	Construir da noção de medida, empregando unidades não padronizadas e padronizadas não oficiais.
	4 - Objetos de sala de aula e partes do corpo como meio para medir	Medir objetos de sala de aula, utilizando como unidade objetos da caixa de ferramenta; associar a grandeza comprimento com partes do corpo.
	5 - A medida padrão – o metro e seus submúltiplos.	Construção de um instrumento de medida padrão da turma; reconhecer o instrumento de medida padrão oficial; construção do metro e seus submúltiplos.
	6 –A distância entre os espaços da escola	Compreender a necessidade de unidades medida maiores que o metro; conceber os múltiplos do metro.
	7 - Unidades de medidas convenientes a cada situação	Associar uma unidade de medida em cada situação.
	8 - Conversão de unidades de medida	Realizar conversão entre as unidades de medida de comprimento; compreender a relação de equivalência entre as unidades de medida.

Fonte: adaptado de Silva e Nunes, 2018, p.361

Com essa sequência objetivamos favorecer ao aluno a noção de comprimento permeando o domínio da grandeza e da medida, de modo que possa perceber a grandeza comprimento, e a relevância de sua quantificação, ou seja, medida de comprimento. Bem como compreender que independente da unidade de medida a ser adotada para medir o comprimento de qualquer coisa ou objeto, esse será o mesmo, o que mudará será o valor atribuído a ele. A partir dessa noção, as transformações entre suas unidades poderão fazer sentido para os discentes. Nessa direção, traçamos algumas expectativas em relação ao aluno, tanto em relação a noção do objeto matemático em questão quanto ao posicionamento dos alunos diante de uma sequência didática nos moldes da TSD:

Em relação a noção da grandeza comprimento e sua medida:

- (Re)conhecer os primeiros movimentos dos povos antigos relacionados à medida, partindo da comparação sem ação de medir (maior que, menor que) para as primeiras ações de medir;
- Perceber a necessidade de medir e a importância das medidas antropométricas;

- Perceber que se pode realizar comparação sem o uso de número;
- Compreender que independente da forma das linhas, seus comprimentos podem ser os mesmos;
- Perceber a ideia da grandeza comprimento como uma propriedade do objeto;
- Perceber que comparar os comprimentos dos objetos é importante, mas que se faz necessário quantificar esses comprimentos, elegendo uma unidade para medi-los, para expressar um valor numérico seguido de sua unidade adotada, ou seja, apresentar uma medida;
- Compreender a necessidade de se ter uma medida padrão;
- Perceber que para cada situação há unidade de medida conveniente;
- Compreender a necessidade de se ter uma medida padrão oficial;
- Compreender as diferentes unidades de medidas de comprimento por meio da subdivisão de segmentos;
- Compreender que o valor da medida de comprimento se altera de acordo com a escolha da unidade, mas o comprimento permanece o mesmo.

Quanto ao comportamento do aluno em ação:

- Ter interesse em realizar as atividades;
- Aceitar resolver os problemas propostos;
- Tomar decisões e criar estratégias para resolução dos problemas propostos;
- Desenvolver diálogos entre os componentes do grupo para a resolução dos problemas propostos;
- Agir, falar e evoluir por ele mesmo ou por meio do diálogo com os pares;
- Socializar e discutir as soluções encontradas entre os grupos;
- Procurar resolver os problemas sem intervenção do professor pesquisador.

9.3 Aspectos do desenvolvimento e análise das atividades da sequência

A sequência didática foi desenvolvida em uma Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio, localizada na região metropolitana de Belém do Pará, em uma turma do 6º ano do ensino fundamental composta de 25 alunos de faixa etária de 10 a 12 anos. Sua realização se deu em oito encontros de duas aulas conjugada, de 45 minutos cada.

As atividades foram realizadas em grupos de no máximo 5 integrantes, em que cada grupo elegeu um representante para auxiliar no direcionamento e apresentação das soluções. Foram formados seis grupos, denominados com nomes fictícios M (Daniel, Caio, Carlos, Yana e Rick); D (Arthur e Nilson); F (Ana, Eva, Manu, Renata e Rosa); L (André, Andrey e Leo); M (Bianca, Elyna, Isis, Ivana e Ray) e P (Joice, Lola, Mila, Nanda e Suzi).

Conforme anunciado na seção anterior, a sequência tem como basilar as situações de ensino proposta por Guy Brousseau numa organização que situe o aluno como protagonista no processo de aprendizagem. Nesta perspectiva, o desenvolvimento de cada atividade foi organizado em quatro etapas:

- Apresentação da atividade e devidas orientações pela professora pesquisadora aos alunos. Esta etapa corresponde ao início do processo de devolução, em que o professor propõe o problema para a turma, para que cada grupo tenha interesse em resolver e assumir para si a responsabilidade da solução;
- A busca da solução do problema, ao agir, tomar decisões e discussão acerca das estratégias discussão acerca da solução e estratégia adotada por cada grupo;
- Socialização e análise do registro escrito na lousa pelos alunos de seus argumentos orais a respeito das estratégias adotada e de sua solução; e por último,
- A formalização dos conceitos referentes ao tema em questão pela professora pesquisadora a partir das compreensões adquiridas pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades (institucionalização). Vale ressaltar que nem todas as atividades apresentaram a institucionalização, pois dependiam do objetivo de cada atividade, como foi o caso da primeira, em que se buscou promover discussões importantes para desdobramentos das demais atividades. Outro caso, se remete as duas últimas atividades, que para sua resolução requeria os conhecimentos institucionalizados nas atividades anteriores[76].

No presente trabalho, a título ilustrativo da análise das atividades da sequência, apresentamos a análise do desenvolvimento da segunda atividade para evidenciar fases do processo de aprendizagem. Nesse sentido destacamos alguns extratos retirado da Pesquisa (SILVA, 2017).

Nesta atividade, para oportunizarmos a noção de comprimento como grandeza aos alunos, evidenciamos a distinção e relação entre os quadros geométrico e da grandeza, apoiado no modelo didático de Brito (2003) e inspirado no modelo de Douady e Perrin-Glorian (1989), por meio de uma situação-problema envolvendo linhas retas e curvas.

[76] Silva (2017)

Para tanto, disponibilizamos uma caixa de ferramentas para auxiliar os discentes no desenvolvimento da atividade.

Com auxílio da caixa de ferramentas esperávamos que os alunos comparassem os comprimentos dos caminhos previstos na atividade, estabelecendo a relação de maior, menor ou igual, mais curto, mais longo e, com isso percebessem que diferentes linhas podem ter o mesmo comprimento. Relação que nos remete à classe de equivalência mencionada por Teixeira (2010) e Brito (2003) e relação de ordem. Além de perceberem que linhas curvas podem ser medidas, ou seja, têm comprimento. Confrontando com uma das dificuldades conceituais apontadas nos estudos de Brito (2003), quando afirma que "alunos acham que somente segmentos de reta têm comprimento" (PERROT *et al.*, 1998, apud BRITO, 2003, p. 18).

A atividade foi composta de três questões envolvendo formas com linhas distintas, elaboradas com base em um mapa[77], que representavam e situavam as ruas, travessas e pontos comerciais em torno da escola, lócus de investigação. Cada questão era constituída de um enunciado, seguido de três alternativas e, mais um espaço para que cada grupo escrevesse suas estratégias para chegar à solução. E para ser resolvida requeria a consulta a esse mapa e se necessário objetos da caixa de ferramenta.

O desenvolvimento da atividade se deu a partir do momento que a professora pesquisadora explicitou a tarefa a ser realizada pela turma, apresentando a folha com a atividade envolvendo mapa do entorna da escola e a caixa de ferramenta como um recurso que eles poderiam utilizar, se necessário, para auxiliá-los na solução das questões. O mapa e a caixa de ferramenta provocaram curiosidade e interesse pela turma em se envolver nessa empreitada de realizar a atividade.

Com base em Brousseau (2008), identificamos nessa parte inicial, o início do processo de devolução, caracterizado por Brousseau, o momento que o aluno entra no "jogo", ao aceitar o desafio de resolver o problema proposto, sem apelo as razões didáticas, e sim pelo pleno interesse buscar tal solução.

Também observamos, nesse momento da atividade, as primeiras ações dos grupos sem ao menos se deterem atenciosamente nas questões, alguns integrantes direcionaram-se à caixa e perceberam que alguns dos objetos escolhidos não seriam interessantes para auxiliá-los na resolução. Mas essa percepção se deu dialogando com os demais integrantes que já haviam lido a questão. De acordo com Brousseau (2008), esse

[77] Silva (2017)

comportamento dos alunos alude a uma das fases importantes do processo de aprendizagem, que corresponde à situação de ação. Nessa direção, Almouloud (2007, p. 37) discorre

> Uma boa situação de ação não é somente uma situação de manipulação livre ou que exija uma lista de instruções para seu desenvolvimento. Ela deve permitir ao aluno julgar o resultado de sua ação e ajustá-lo, se necessário, sem a intervenção do mestre, graças à retroação do *milieu*.

Conforme mencionado anteriormente por Almouloud (2007), percebemos que os integrantes agiram quando foram em busca dos objetos, mas também refletiram dialogando com os demais integrantes do grupo e ao lerem atenciosamente a questão (retroação do *milieu*). Isso ocorreu sem que interviéssemos.

Ao se concentrarem (alunos) nas questões propostas, o andamento da atividade se deu em leitura das questões, análise do mapa, escolhas dos objetos da caixa e a busca pela alternativa correta, e apresentação da resposta de cada grupo.

Para análise desse processo, apresentamos no quadro 2 uma síntese constituída pelas três questões da atividade, as estratégias adotadas e, por fim, o quantitativo de grupos que chegaram à solução correta em cada questão.

Quadro 2– Síntese dos registros da atividade 2

<table>
<tr><th>Atividade 2</th><th>Estratégia mais adotada</th><th>Quantitativo de grupos que acertaram as questões</th></tr>
<tr><td>1. Comparar os comprimentos de dois caminhos com linhas retas</td><td>Sobreposição de palito de picolé e canudo de plástico</td><td>4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2. Comparar os comprimentos de dois caminhos, um com linha reta e curva e outro somente com linha reta</td><td>Sobreposição de canudo de plástico e palito de picolé</td><td>-</td></tr>
<tr><td>Sobreposição com uso de barbante</td><td>1</td></tr>
<tr><td>3. Comparar os comprimentos de dois caminhos com linhas distintas (reta e curva)</td><td>Sobreposição de barbante</td><td>3</td></tr>
</table>

Fonte: adaptado de Silva, 2017, p. 137

Na primeira questão, conforme o quadro 2, podemos observar que os alunos não se apoiaram na visualização para resolver o problema proposto, como era esperado. Atitude justificada, por se tratar de caminhos com medidas de comprimento próximas, 6,0 e 6,5 cm. Os grupos procuraram fazer a sobreposição com uso de objetos da caixa de ferramentas. Entre os objetos, os mais utilizados para mediar a comparação entre os caminhos foi o palito de picolé. Objetos que prevíamos que seriam utilizados pelos alunos, uma vez que o percurso a ser sobreposto era constituído de linhas retas

Quanto ao resultado, dos seis grupos, quatro chegaram à resposta correta. No entanto, esta questão poderia levar os alunos ao erro, caso a sobreposição não fosse realizada com cautela, devido à diferença entre os comprimentos dos dois caminhos ser de 0,5 cm. Uma diferença bem pequena, que poderia fazer com os alunos respondessem que ambos os caminhos têm o mesmo comprimento. Fato que justifica a resposta do grupo L.

O grupo D também não chegou à resposta correta. Utilizou a caneta hidrocor para refazer os caminhos e o palito de picolé para a sobreposição. Observamos que ao refazerem os caminhos não partiram exatamente do local que representava a escola, levando assim ao erro. Nesse sentido, notamos que embora adoção da mesma estratégia por todos os grupos, no caso sobreposição e, utilizaram objetos retilíneo como medianeiro, no entanto algumas manipulações não foram adequadas. Essas ações dos grupos, nos leva a inferir que as interações que cada um dos grupos estabelece com o *milieu,* ou até mesmo entre cada integrante do grupo, podem obter reações diferentes. Numa situação de ação as interações entre os alunos e destes com o *milieu* estão centralizadas na tomada de decisões, ainda que os alunos dialoguem entre si, os conhecimentos dos componentes desse grupo fazem parte do *milieu* de cada um, assegurando, assim, retroações do aluno sobre o *milieu* (ALMOULOUD 2007).

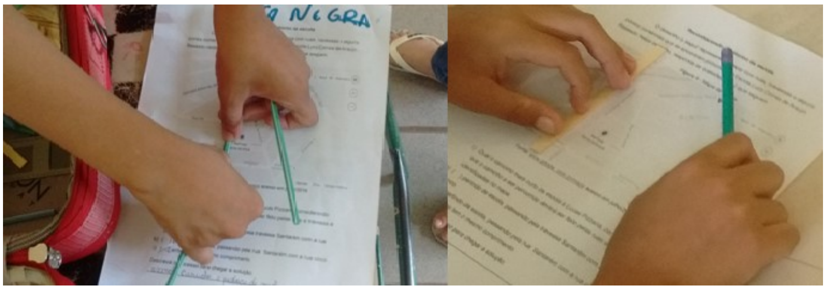
Na segunda questão, buscamos explorar a comparação entre dois caminhos que representavam linhas retas e curvas, com intenção de que os alunos percebessem que não apenas o segmento de reta possui comprimento. Confrontando com umas das dificuldades conceituais apontadas por Brito, em que "alunos acham que somente segmentos de reta têm comprimento" (PERROT *et al.*, 1998, apud BRITO, 2003, p. 18).

Nessa questão, esperávamos que os grupos adotassem o barbante ou linha de crochê como medianeiro para realizarem a comparação entre os caminhos evidenciados, pois de acordo com Brito (2003), Barbosa (2007) e Teixeira (2010) esses objetos são mais adequados para sobrepor caminhos com linhas curvas.

Entretanto, de acordo com o quadro 2 acima, dos seis grupos apenas um fez uso do barbante, o grupo D. Isso de fato corrobora com Brito (2003), pois utilizar objetos que se remetem a seguimento de reta, como canudo, palitos de picolé, é algo comum nas atividades escolares dos alunos. Geralmente os alunos usam régua ou instrumento associado a mesma para verificar o comprimento de um dado objeto (TEXEIRA, 2004).

Ao apresentar sua resposta, o grupo D foi desafiado a justificar a sua estratégia com detalhes, em razão de ter sido o único grupo a usar o barbante. Ao relatar do relatar o processo para chegar à estratégia adequada, observamos que o grupo teve alguns conflitos para chegar à solução correta, pois os integrantes não chegavam a uma única alternativa. A primeira estratégia não foi a sobreposição de barbante, e sim a visualização seguida da sobreposição de objetos de forma retilínea, como mostra a Figura 1. Algo previsto, em razão dos comprimentos dos caminhos serem de tamanhos bem próximos, sendo o caminho com linha curva medindo 11,5 centímetros (cm) e linha reta com medida de 12 cm.

Figura 1- sobreposição dos objetos da caixa de ferramentas



Fonte: Silva, 2017, p. 105

Após várias discussões, os integrantes desse grupo perceberem que o ponto crítico da sobreposição com objetos retilíneos se encontrava na parte do caminho com uma pequena curva e outro fato se remetia a cautela com a fixação da extremidade do objeto medianeiro sobre as localizações no mapa. Foi então, que lançaram mão do barbante e sobrepuseram em ambos os caminhos, de modo que um dos integrantes fixou os pontos críticos, no caso da curva e os cantos retilíneos, enquanto outro prosseguia com esticando o barbante. Em seguida, recortaram pedaços de barbantes referentes a cada caminho e realizaram a comparação entre eles. Confirmando assim, que o caminho que continha linha curva era mais curto (alternativa correta). Eles explicaram e conseguiram convencer os demais grupos que a estratégia por eles adotada era a melhor. Esse momento nos remete ao que Brousseau (2008) caracteriza como situação de validação, ao analisar o processo de aprendizagem. Nesta situação, o grupo D explicitou as decisões tomadas, as reflexões e discussões ocorridas no grupo e apresentou a sua estratégia e provou o porquê a mesma foi considerada a mais adequada para chegar à solução correta. Percebemos também nessas reflexões e discussões a fase de ação e formulação.

Elencamos algumas falas a seguir, que entendemos que os demais grupos foram convencidos da estratégia adotada pelo grupo D

Daniel (grupo B): afirma - Nossa professora! Nem pensamos em usar o barbante, porque já estamos acostumados medir com régua, usar caneta, lápis para saber o tamanho das coisas.
Manu (Grupo F): afirma - é o Arthur (grupo D) tem razão, na parte das curvas usar palito de picolé, canudo ou barra de madeira, ficava difícil de calcular certinho o tamanho do caminho. Agora já sabemos que em caminhos que contém curvas podemos usar o barbante para facilitar e depois é só esticar bem ele para ver qual o caminho mais curto.
Andrey (grupo L): afirma - então, professora podemos usar o barbante ou qualquer objeto parecido, como um cordão, até essa linha de crochê para facilitar a nossa vida quando temos desenhos com curvas.

Na terceira questão, a tarefa também envolveu a comparação entre dois caminhos de linhas distintas, assim como na questão anterior, por isso não tiveram dificuldade em eleger a melhor estratégia para chegar à solução, a sobreposição com uso de barbante. Entretanto o problema foi em relação ao resultado desta solução, devido a questão obter como resposta correta que os caminhos possuíam o mesmo comprimento. Isso fez com que alguns grupos refizessem essa questão mais de uma vez, utilizando além do barbante e outros objetos, como palito de picolé e canudo de plástico. A solução desta questão direciona-se à alternativa em que os caminhos têm o mesmo comprimento.

A partir dos diálogos entre os alunos, apontamos indícios da dialética[78] de formulação e validação, justamente quando os grupos trocam informação sobre o que fizeram para chegar à solução, e a mudança de postura e pensamento que o grupo D provocou aos demais grupos ao justificar o motivo de sua escolha, que o levou à solução correta. Esse movimento, de acordo com Brousseau (2008) ocorre porque o conhecimento apresenta-se em diferentes níveis de funcionalidade, quando se tem em jogo a interação do sujeito com *milieu, num processo de ação e retroação.* Em que esse conhecimento elaborado pelo aluno ou grupo de alunos será diferente em cada momento durante o processo de aprendizagem. Momentos que o autor postula em situações de ação (ações e decisões), formulação, validação e institucionalização, já mencionada neste estudo. Cada situação pode fazer com que o sujeito progrida em seu processo de aprendizagem do conhecimento em jogo.

Quanto à institucionalização, realizamos primeiramente junto à turma uma revisão geral sobre as estratégias adotadas e soluções encontradas abarcando as três questões trabalhadas. Em seguida, com base nos discursos que eclodiram da turma sobre a

---

[78] Almouloud (2007) -refere-se a dialética como sendo as interações do aluno com o *milieu* nas diferentes situações.

comparação entre comprimento dos caminhos e a noção do conceito de comprimento enquanto grandeza, procuramos aproximar as concepções que partiram de alguns grupos para prosseguirmos com institucionalização de tal conceito. Elencamos algumas falas, mostradas a seguir:

> *Isis (grupo M): afirma - Professora, nós achávamos (Ela e o restante do grupo) que os comprimentos desses caminhos não poderiam ser iguais (mesmo tamanho), porque são diferentes (estava se referindo a forma das linhas). Por isso tivemos que fazer a comparação umas três vezes, usamos o barbante para ver o comprimento e depois marcamos no palito de picolé para podermos comparar e ter certeza de que eram do mesmo tamanho.*
> *Andrey (grupo L):afirma - Professora, então, quer dizer que posso ter desenhos de várias formas e ainda podem ter o mesmo comprimento. Foi por isso que erramos, porque como outro caminho tinha uma curva na esquina da passagem jardim e nós usamos o canudo, não conseguimos ver o comprimento direito.*
> *Daniel (grupo B):afirma - é professora, só conseguimos acertar a questão (referindo a 3ª) porque usamos o barbante. Se fosse usar régua ia ficar complicado.*
> *Mila (grupo P):afirma - Pior foi agente, que nem usamos o material da caixa ferramenta para medir o tamanho dos caminhos. Pensamos que por ser um caminho reto que ainda tava um pouco torta (quis dizer inclinado) e outro uma linha curva que aparentava ser menor, acabamos marcando a resposta errada.*
> *Isis (grupo M):afirma - Então, podemos chamar de comprimento ou calcular o comprimento de todas as coisas em que posso medir usando palito de picolé, régua até o barbante para ver seu tamanho.*
> *Andrey (grupo L): afirma - no caso, o comprimento do meu pé. Posso dizer professora que altura da porta é comprimento, pois posso pegar a régua, ou barbante para ver sua medida.*

De acordo com exposto, tanto nos discursos acima, como nos anteriores e ações desenvolvidas durante esta atividade, inferimos que conseguimos atingir o objetivo desta atividade, principalmente ao refletir como foi o caso, dos grupos M e L, ao referirem que linhas diferentes, ou formas diferentes relativas à grandeza comprimento, podem possuir o mesmo comprimento. Outro ponto, destacado revisão de estudo, se refere às situações exploradas comumente em sala de aula, ao se tratar de comprimento, com uso de objetos como régua ou outros de mesmo direcionamento.

Com esta atividade possibilitamos aos alunos a ampliação de usos de outros objetos, principalmente para realizarem comparação envolvendo linhas curvas. Algo apontado por Silva, J. (2011), pouco explorado nos livros didáticos.

No entanto, percebemos que no discurso de Isis e de Andrey, ainda persistia um conflito em relação à grandeza e medida de grandeza, ao preferirem medir usando régua, palito de picolé, ou barbante. Conflito que foi explorado nas atividades subsequentes, ao trabalharmos a articulação do domínio da grandeza comprimento para domínio de medida.

9.4 Considerações

Este trabalho se propôs apresentar aspectos da concepção de uma sequência didática para o ensino de medida de comprimento a partir da sua grandeza. Tal sequência, em ralação ao objeto matemático, aborda duas discussões relevantes: o comprimento tanto na perspectiva da grandeza como na perspectiva da medida.

Essas discussões nos levaram a estudar a distinção e articulação entre os quadros geométrico, da grandeza e numérico, modelo didático para trabalhar o conceito de área e comprimento como grandeza autônoma, nos oportunizando a tratar a medida de comprimento a partir de sua grandeza.

Em relação a sua organização didática essa sequência é marcada pelos moldes da TSD, com situações de ensino que introduz os conhecimentos matemáticos a partir de situações adidáticas planejadas e organizadas pela professora pesquisadora. Situações com problemas cautelosamente escolhidos para que os alunos pudessem agir, tomar decisões, refletir, apontar estratégia, para a solução dos problemas propostos, comunicá-las e justificá-las perante a turma, sem a necessariamente a intervenção da professora. Está com o papel de mediar esse processo, para que os alunos adquiram um novo conhecimento. Além de tomar para si a responsabilidade de esclarecer e legitimar o conhecimento produzido na situação, ao institucionalizá-lo, como saber.

Nesse sentido, conforme os registros e discussões ocorrida no desenvolvimento da segunda atividade desta sequência, em que e buscou evidencia a passagem do quadro geométrico para o da grandeza, com intuito de favorecer aos alunos a noção de comprimento como grandeza, constatamos que os alunos realmente estão acostumados a relacionar instrumentos que fazem referência à régua ou outro objeto associado a formas retilínea para comparar comprimentos, pois dos seis grupos, apenas um utilizou o barbante como medianeiro, ao realizarem a comparação entre os caminhos de linhas distintas.

No entanto, identificamos uma luz no pensamento desses alunos, da noção de grandeza, em particular comprimento, quando um dos grupos adotou o uso do barbante como medianeiro e socializou com os demais a estratégia adotada para chegar à solução correta. Fato que resultou na mudança de comportamento dos outros grupos, ao compreenderem que linhas distintas podem ter o mesmo comprimento, e que este não se remete apenas ao segmento de reta, mas também a curvas. Isto mostra uma dificuldade conceitual apontada por Brito (2003), em que os alunos acham que apenas segmento de reta possui comprimento.

Constatamos também que realizar atividades que explorem a comparação de formas distintas estabelecendo a relação de maior, menor, igual, mais curto, mais longo, ou seja, comparação sem ação de medir (sem o uso de número), oportuniza a noção de comprimento como grandeza.

Isso nos leva refletir sobre a importância de se propor situações que oportunize os alunos a experienciar ações que para eles não seja rotineira, como o caso da segunda e terceira questão ao explorarmos a comparação de linhas distintas, representando os caminhos localizados no mapa. E o uso dos objetos como medianeiros na realização das atividades foram de grande relevância para auxiliar os alunos no processo de validação e suas estratégias. Contudo, destacamos que a manipulação desses objetos tem que ser cautelosa, e a função atribuída a esses objetos também, pois no discurso de um dos integrantes observamos uma confusão em relação ao barbante, em considerá-lo como uma espécie tanto de medianeiro como um possível instrumento de medida.

Ademais, proporcionar atividades que provoque o aluno a agir, refletir, conjecturar, evoluir e discutir e provar que sua estratégia era a mais adequada para solução da questão proposta, favorece a construção do conhecimento pelo aluno, e o coloca como protagonista (adidática) e, corresponsável junto ao professor (parte didática) pelo processo da aprendizagem.

Referências

ABBONDATI, M. *Um ambiente virtual de aprendizagem para o ensino de tópicos de Matematica do Ensino Fundamental*. Dissertação de mestrado profissional em Ensino de Ciencias Exatas, São Carlos, Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de São Carlos, 2013.

ALMOULOUD, S. A. *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR, 2007.

ARTIGUE, M. Engenharia Didáctica. In: BRUN, Jean (org.); FIGUEIREDO, Maria José (tradução). *Didáctica das matemáticas*. Lisboa: instituto Piaget, 1996, p.193 – 217.

BACKENDORF, V. R. *Uma sequência didática de medidas de comprimento e superfície no 5º ano do Ensino Fundamental: um estudo de caso*. Dissertação de mestrado profissionalizante em Ensino da Matemática, Porto Alegre, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2010.

BARBOSA, J. L. M. *Geometria Euclidiana Plana*. Fortaleza: SBM, 1997.

BARBOSA, R. P. *Efeitos de visualização em atividades de comparação de comprimento de linhas abertas*. Tese de doutorado em Educação, Recife. Universidade Federal de Pernambuco, 2007.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRITO, A. F. Um estudo sobre a influência do uso de materiais manipulativos na construção do conceito de comprimento como grandeza no 2º ciclo do Ensino Fundamental. Dissertação de mestrado em Educação, Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2003.

BROUSSEAU, G. Fondements et méthodes em didactique des mathématiques. *Recherches em didactique des mathématiques*, Grenoble, v. 7, n. 2 , p. 33 - 115, 1986.

BROUSSEAU, G. *Introdução ao estudo da teoria das situações*: *conteúdos e métodos de ensino*. São Paulo: Ática, 2008.

BROUSSEAU, G. L'observation des activités didactiques. *Revue française de pédagogie*. v. 45, p. 130 – 139, 1978.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais de Matemática*. Lisboa: Gradiva, 1951.

DOUADY, R.; PERRIN-GLORIAN, M. J. Un Processus D'Apprentissage du Concept D'Aire de Surface Plane. *Educational Studies in Mathematics*, v. 20, n. 4, p. 387-424, 1989.

LEBESGUE. *Sur la mesure de Grandeurs*. Genève: Kundig, 1935.

MOURA, A. R. L. *A medida e a criança pré-escolar*. Tese de doutorado em Educação, Faculdade de Educação, Campinas, Universidade Estadual de Campinas, 1995.

PAIS, L. C. *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

PALARO, L. A. *A concepção de Educação Matemática de Henri Lebesgue*. Tese de doutorado em Educação Matemática, São Paulo, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2006.

RODRIGUES, M. S. *O ensino de medidas e grandezas através de uma abordagem investigatória*. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática), Natal, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, 2007.

SILVA, C. C. R. *Construção de conceitos de grandezas e medidas nos anos iniciais: Comprimento, massa e capacidade*. Dissertação de mestrado em Educação, Brasilia, Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, 2011.

SILVA, J. V. G. *Análise da abordagem de comprimento, perímetro e área em livros didáticos de matemática do 6º ano do Ensino Fundamental sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático*. Dissertação de mestrado em Educação Matemática e Tecnologia, Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2011.

SILVA, N. S. M. *Medida de Comprimento: uma sequência didática na perspectiva da grandeza e medida*. Dissertação de mestrado profissional em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, Universidade Federal do Pará, 2017.

SILVA, N. S. M.; NUNES, J. M. V. Uma sequência educacional para o ensino de medida de comprimento didática como produto. *Revista BOEM*, v. 6, n. 10, p. 349-369, 2018.

TEIXEIRA, S. G. *Concepções de alunos de Pedagogia sobre os conceitos de comprimento e perímetro*. Dissertação de mestrado em Educação, Recife, Universidade Federal de Pernambuco, 2004.

10- Práticas sociais com Matemática e o método de redução à unidade: uma epistemologia do saber prático

Carlos Alberto Gaia Assunção
Renato Borges Guerra

Considerações iniciais

Existe uma epistemologia do saber prático fundada nas atividades humanas e que se relaciona com as práticas sociais dos sujeitos. Que são reproduzidas cultural e rotineiramente nas instituições em que vivem sob processos de normatizações, aceitas e seguidas pelos sujeitos nas relações pessoais estabelecidas, mediadas por qualquer entidade material ou imaterial.

O tema das práticas sociais é discutido por Vygotsky (1994) e Leont'ev (1978) quando tratam sobre desenvolvimento humano em relação as limitações de outros animais. Nesta esteira, Radford (2011) embasado em Leont'ev (1978), apresenta o que chama de as quatro dimensões de uma prática social enquanto componentes, que surgem, se desenvolvem e se sustentam nas: formas de produções humanas; relações sociais entre os sujeitos; conhecimentos disponíveis em um contexto sociocultural; e nos sistemas semióticos de significações culturais.

Chevallard (2018), na Teoria Antropológica do Didático (TAD), apresenta quatro noções fundamentais para se compreender praxeologias que se caracterizam pelas relações entre sujeito, pessoas, objetos e instituição. A primeira noção é a de *objeto*; objeto seria qualquer entidade ostensiva ou não ostensiva, que existe individualmente a algum sujeito, logo, tudo seria objeto, inclusive as pessoas. A segunda noção fundamental da TAD, é o de *relação pessoal* de um *indivíduo* a um *objeto* e todas as interações entre estes. A terceira noção é a de *pessoa*; Chevallard (2018) define que todo indivíduo é uma pessoa; assim, a noção de pessoa consiste na dupla indivíduo e o conjunto de relações pessoais que evolui historicamente, alguns começam a existir e outros deixam de existir.

Nesta evolução a pessoa muda, mas o indivíduo, não; assegura Chevallard (2018). No caso do objeto, este, existe para uma pessoa quando esta pessoa o (re)conhece pela mediação de uma instituição. Logo, a quarta noção fundamental é a *instituição*, ente material ou imaterial, é considerada um dispositivo social que impõe a seus sujeitos, isto é, as pessoas as maneiras de fazer e pensar, denominado por Chevallard de *praxeologia.*

A praxeologia, constitui-se uma parte importante da TAD, na qual Chevallard (2018), pressupõe comportar uma parte prático-técnica, relativa ao saber-fazer *(práxis),* e outra parte tecnológico-teórica (*logos), isto é,* um saber que designa um discurso sobre a técnica. No entanto, o Chevallard (2018) admite que não há *práxis* que não seja acompanhada de um *logos,* ainda que a posição institucional ocupada pelo observador (professor face a praxeologia de estudantes, pesquisadores faces as professorais, burgueses ante praxeologia proletária etc.) a parte tecnológico-teórica parece ausente, porque na verdade *não é visível* (ou é mal visível).

Segundo a TAD, um modelo praxeológico é formado por: Tarefa, Técnica, Tecnologia e Teoria. Onde, a *tarefa* caracteriza-se por qualquer atividade humana que requer uma ação. A *técnica*, os procedimentos mobilizados para se realizar a tarefa, isto é, o *fazer*. A *tecnologia*, é entendida como a explicação ou justificação racional da técnica, ou seja, o porquê de se fazer a tarefa de uma determinada maneira. A *teoria*, constitui-se no conjunto abstrato de conceitos e argumentos de um discurso que justifica a tecnologia acionada para resolver a tarefa.

A esta altura, observando as componentes do modelo praxeológico de Chevallard, cabe a pergunta, o que caracterizaria *a prática* na ótica da didática da matemática? Considerando-se a *técnica* como o elemento do *fazer*, que produz a ação, conduz os procedimentos mobilizados para se realizar a tarefa. A técnica é o que evoca a prática, sem a qual, uma tarefa não poderia ser realizada, mesmo que houvesse uma tecnologia exequível ou uma teoria disponível; sem uma técnica compreensível não haveria a prática normativamente aceitável. Pois, a prática, segundo Chevallard (2009), é sempre acompanhada de um discurso ou uma racionalidade mínima sobre o que é feito, como se faz e o porquê do que se faz em uma instituição. Portanto, podemos encontrar uma resposta chave à questão lançada na TAD, isto é, nos elementos da modelização de uma praxeologia, no qual a *prática* se caracteriza como *técnica.*

Daí, segue-se que, se temos *a prática* enquanto o exercício da *técnica* em uma praxeologia, que produz e reproduz o discurso sobre o que se faz com as atividades humanas em uma instituição, essa prática sendo institucionalizada pressupõe um grupo social organizado normativamente na sustentação da infraestrutura discursiva dessa instituição.

Estamos querendo dizer que, se este grupo vive em sociedade, mobiliza e compartilha das ações e procedimentos de tarefas comuns, então, temos uma *prática social* mediada por algum saber-fazer*,* no caso pressupomos, ser o *saber prático,* a ação da capacidade humana de agir frente a cada tarefa a ser mobilizada e realizada por uma certa técnica rotineira.

No âmbito da praxeologia, poderia o saber prático, caracterizar-se enquanto praxeologia incompleta; isto é, aquela que contém, explicitamente, apenas a parte prático-técnica, devido as condições e restrições normativas criadas pela instituição na relação sujeito, objeto e instituição, fruto de sujeições passadas e ou presentes. Uma vez que ações humanas possuem uma praxeologia, e esta, evidente por um jeito de pensar e fazer, o saber-fazer necessitaria de uma razão intuitiva sobre uma determinada prática.

Portanto, a *prática* seria aqui o ente praxeológico que só sobreviveria no meio de outras que a fazem viver. Também, seria o elemento mobilizador linguísticos, ideológico, sociológico, antropológico, político, tecnológico, semiótico e epistemológico de uma prática social. Ora, se a prática social, é entendida por Radford (2011) como o nicho da palavra. Então, a *prática social* seria, do ponto de vista ecológico, o ente no qual podemos encontrar o modo de vida de objetos ostensivos ou não ostensivos; influindo nos modos de pensar, sentir e agir dos sujeitos que tendem a reproduzir as estruturas sociais, nem sempre consciente, um movimento de interiorização por meio de assimilação dessas estruturas que geram práticas e da exteriorização que se tornam o *habitus,* e este, um saber prático.

É neste cenário que nos propomos discutir elementos teóricos conceituais entre a *noção de práticas sociais com matemática* e o *saber prático*, refletindo como se percebe essa relação no âmbito da ecologia institucional, enquanto nicho epistemológico do saber prático, tendo como fonte de dados as práticas com o método de redução à unidade na Casa Escola da Pesca.

A questão postulada e discutida neste trabalho parte do seguinte pressuposto: existe uma epistemologia do saber prático, fundamentada na teoria histórico-cultural da atividade humana, formada pelas relações sociais e interacionais entre pessoas, que assumem determinada prática social institucionalizada, podendo sustentar a noção de práticas sociais com matemática em contexto escolares ou extraescolares.

O artigo tem como fonte de dados bibliográficos a pesquisa da tese de Carlos Alberto Gaia Assunção, orientada pelo prof. Dr. Renato Borges Guerra, intitulada: "Práticas com Matemáticas na Educação do Campo: O caso da redução à unidade na Casa Escola da Pesca". Tese de Doutoramento pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas – PPGECM, da Universidade Federal do Pará (UFPA), defendida em 2016.

A tese apresentou elementos que dão vida a um objeto de saber matemático escolar em uma instituição de ensino. Descortinou a questão das práticas sociais com objetos de saber matemático. Propôs diálogo conceituais entre a Teoria Antropológica do Didático (TAD) e a Etnomatemática. Trouxe para a arena da Educação, algumas percepções de correlações teórico-práticas entre a Educação Matemática e Educação do Campo. Sugeriu a necessidade de análise de cartografias de práticas e discursos socioculturais como à compreensão de condições e restrições institucionalistas em relação àquilo que nos produz e assujeita-nos. Por fim, apresentou evidências de alguns aspectos históricos, epistemológicos, políticos e pedagógicos da perspectiva da Educação do Campo, analisando os níveis de codeterminação didática da ecologia de um objeto de saber matemático, no sistema didático da CEPE, à luz da TAD.

Portanto, este artigo objetiva discutir as práticas com matemáticas enquanto saber prático, identificando-se, nessa tarefa reflexiva, problemas que obstem ou favorecem considerar uma prática com matemática como uma noção de possível conceituação importante para analisar práticas socioculturais e institucionais em diferentes contextos, onde o saber matemático escolar ou extraescolar é movimentado como práticas humanas.

10.1 Teoria-histórico-cultural da educação: dimensões das práticas sociais

Postulados a respeito de concepções da teoria-histórico-cultural parecem apontar para reflexões importantes a respeito das práticas educacionais modernas e contemporâneas, enquanto práticas sociais; uma forma de reconhecimento de que alguns caminhos teóricos e práticos relacionais são trilhados na constituição de entendimento de princípios que norteiam as práticas educativas.

Rego (1995), argumenta que a história da cultura ocidental educacional sempre esteve intimamente ligada à teoria, produzida tanto no âmbito da filosofia como no âmbito das ciências humanas em geral. A pensadora enfatiza, que neste sentido, a educação seria fundamentalmente como *práxis sociais*, que nunca se afastou dos fundamentos teóricos, mesmo quando fazia deles uma utilização puramente ideológica.

Assim, vale dizer que no campo da formação docente, é importante considerar que a formação do professor contemple as dimensões filosófica, epistemológica, política e pedagógica da construção do conhecimento, pois são elementos imprescindíveis para se compreender as práticas educativas intrínsecas nas construções e proposições curriculares efetivadas.

Vygotsky, dentre os diferentes ramos do conhecimento, teve especial interesse no estudo da gênese dos processos psicológicos tipicamente humanos em seu contexto histórico-cultural, contribuindo fortemente para a elaboração de concepções a respeito do desenvolvimento humano, é claro, sem separar os indivíduos da situação cultural em que se relacionam, produzem e reproduzem suas condições de existência social. Pois, o homem com base na dialética social sempre procurou identificar mudanças qualitativas do comportamento que ocorrem ao longo do desenvolvimento humano e sua relação com o social (Rego, 1995).

Neste sentido a autora argumenta que a complexidade da estrutura sociocultural humana deriva do processo de desenvolvimento enraizado nas relações entre história individual e social. E ao mesmo tempo em que, Vygotsky, trabalhou profundamente na estruturação teórica da psicologia social, contava com a participação de talentosos pesquisadores, dentre eles, Alexei Nikolaievich Leont'ev (1904-1979), que embasados em princípios do materialismo dialético estabeleceria concepções importantes para a compreensão do aspecto intelectual humano enquanto fenômeno histórico e socialmente determinado, na perspectiva de que o pensamento adulto é culturalmente mediado, sendo a linguagem o principal meio dessa mediação.

Aqui é importante considerar a questão cultural relacionada às práticas sociais no pensamento de Leont'ev (1978), especialmente, as quatro dimensões de práticas sociais. Ao nosso ver são caracterizações teóricas que nos ajudarão, de alguma maneira, na discussão e construção de argumentos para apontar as *práticas com matemáticas* como noção conceitual importante em abordagem de pesquisa em educação matemática e possivelmente à identificação e análise ecológica de práticas com objetos matemáticos em contexto socioculturais.

Vygotsky (1994) e Leont'ev (1978) falam das práticas sociais humanas a partir da discussão sobre o desenvolvimento humano em relação as limitações de outros animais, como resultante de suas práticas existenciais. Propõe a distinção das fontes de comportamento do homem e do animal, assim como a diferença em relação as experiências humanas – como práticas sociais - e as experiências ecológicas de outros animais.

Por exemplo, o comportamento e a experiência da espécie animal ocorrem por imitação, dizem os autores. Diferentemente, do animal, o homem transmite e compartilha as suas experiências no seio social, destacando-se exclusivamente dentre os demais seres vivos por sua capacidade cognitiva individual e social de geração em geração.

Rego (1995) argumenta que o desenvolvimento do homem se dá pelas práticas sócio-histórica, enquanto a dos animais se dá pelas leis biológicas. Desse modo, a autora enfatiza a diferença características que distingue o homem dos animais, afirmando que

> é justamente o fato de que, além das definições hereditárias e da experiência individual, a atividade consciente do homem tem uma terceira fonte: a assimilação da experiência de toda a humanidade, acumulada no processo da história social e transmitida no processo de aprendizagem (1995, p. 25).

Todavia, essas experiências humanas nem sempre são adquiridas passivamente devido as ações e influências institucionais que posicionam a pedagogia do saber aos sujeitos na realização de práticas sociais, esta seria a segunda premissa, na medida em que as experiências individuais e coletivas construídas, produzem discursos em relação ao saber-fazer; as disposições incorporadas produzem práticas rotineiras; as práticas reproduzidas são assimiladas ao longo da vida do indivíduo como hábitos, através do processo de interação do homem e seu meio físico e social.

A respeito da capacidade interrelacional humana mediadas pelas práticas sociais, Leont'ev (1978), propõe que o desenvolvimento histórico-social seria mediado pelas atividades humanas nas práticas sociais em relação a aquilo que a natureza seria capaz de propiciar à sua existência. Rego (1995) destaca que para compreender a questão da mediação que caracteriza a relação do homem com o mundo e com os outros homens seria fundamental a participação de dois elementos básicos responsáveis no pensar de Vygotsky (1994), por essa mediação: o *instrumento*, que tem a função de regular as ações sobre os objetos e o *signo* que regula as ações sobre o psiquismo das pessoas.

Os *instrumentos* e os *signos* carregam os significados das palavras, retendo de forma cristalizada as atividades dos indivíduos (LEONT'EV, 1978). Radford (2011) acrescenta que por traz da palavra e dos signos da linguagem estão escondidas as atividades das práticas sociais. A palavra que proferimos e o objeto ao qual se refere, afirma o autor, estão inevitavelmente ligados a uma prática social historicamente construída (RADFORD, 2011).

Radford (2011), escrevendo a respeito da história, antropologia e epistemologia, destaca quatro dimensões das práticas sociais, embasada no pensamento de Leont'ev (1978), a saber: (1) aquela formada pelas relações sociais, que permitem as interações entre indivíduos, que assumem determinados papéis em uma determinada prática social; (2) aquela definida pelos artefatos que permitem a mediação entre as interações entre os indivíduos, são os objetos tecnológicos culturais e materiais; (3) refere-se a dimensão epistemológica do conhecimento na medida em que os indivíduos realizam determinadas práticas, recorrem ao conhecimento produzido e disponibilizado culturalmente e (4) tem a ver com estruturas supra simbólicas definidas como sistema semiótico de significações culturais, tais como as crenças, as visões e concepções sobre o que é certo, bom, belo e real.

A Educação Matemática nos últimos tempos vem assumindo uma perspectiva sociocultural do saber matemático, a exemplo da Etnomatemática, da Educação Matemática Crítica, da História da Educação Matemática e outras tendências que abordam o conhecimento e a própria cultura matemática do ponto de vista antropológico e suas praxeologias tais como a Didática da Matemática nas teorizações da TAD. Portanto, convém complementar a visão a respeito das práticas sociais de Leont'ev com a perspectiva teórica elaborada por Chevallard (1999), na TAD, sobre o estudo do homem perante o saber matemático e suas práticas sociais.

Esta teoria busca compreensões sobre o saber matemático do ponto de vista das práticas sociais e não necessariamente das práticas matemáticas; uma concepção teórica que define a ação do sujeito em situações e mais especificamente em situações matemáticas socioculturais ou não. Permitindo, assim, produzir análises de modelos epistemológicos socioculturais e de práticas sociais institucionais condicionantes ou restritivas.

A partir dessas colocações iniciais, podemos destacar das premissas e argumentações acima discutidas: a conjuntura de elementos teóricos semióticos, sociológico, filosóficos, culturais e antropológicos como derivações estruturantes das práticas sociais humanas. Então, seguiremos essa discussão, no tópico a seguir, com o auxílio da TAD de Chevallard enquanto concepções que darão sustentabilidade teórica às caracterizações das práticas sociais, enquanto práticas humanas.

10.2 Teoria Antropológica do Didático e práticas sociais humanas

Segundo Chevallard (1999) não existe apenas a matemática escolar, e sim inúmeras matemáticas contidas em nossa sociedade. Depreende-se do pensar do autor que a nossa sociedade é formada por práticas sociais humanas envolvendo diferentes formas, conteúdo, natureza e objetivos. As práticas com matemática, por exemplo, realizadas pela da escola, pela academia, pelo engenheiro, pelo agricultor, pelo ribeirinho, pelo pescador, pelo economista, pelo médico, pelo comerciante, pelo feirante, enfim grupos socioetnoculturais de diferentes contextos e profissões, constituem-se em diferentes modos de fazer e pensar suas atividades institucionais que envolvem práticas sociais matematizadas por esta instituição.

Essas práticas sociais com matemáticas são matematizadas institucionalmente e tem a sua razão de existir pelas interações ecológicas entre os indivíduos; que mediadas por objetos e artefatos tecnológicos ostensivos e não ostensivos permite a realização de determinadas práticas que requerem a mobilização de conhecimentos produzidos, utilizados e compartilhados; sustentando as significações socioculturais que balizam as crenças, convicções e supostas certezas e incertezas. Essas dimensões, certamente, são resultantes da relação do sujeito que reconhece, segue e se relaciona com a sua instituição por meio das tarefas com matemáticas disponibilizados nesta instituição.

A noção de instituição para a TAD é tomada como um dispositivo social, que pode ser apenas uma parte muito pequena do espaço social, mas que permite, e impõe, para seus sujeitos, isto é, para pessoas que vivem e ocupam diferentes posições nela, colocar em jogo as maneiras de fazer e de pensar próprios que constituem as praxeologias. Assim, por exemplo, a classe é uma instituição, cujas posições essenciais são as do professor e do aluno. Sendo o papel das instituições essencial já que podem levar a exclusão social como a privação da pessoa de afiliações institucionais; todavia, sem elas (pessoas), esta (instituição) logo deixa de existir; mas a desintegração da pessoa é o prelúdio para a morte social, e talvez até biológica, do indivíduo (Chevallard, 2009).

Assim, a TAD consiste em fundamentações teóricas que permite analisar e problematizar as praxeologias institucionais e humanas perante situações matemáticas. Essas análises se referem principalmente ao objeto de saber matemático que transitam nas instituições enquanto práticas sociais. Segundo Chevallard, (1999) a TAD estuda o homem perante o saber matemático, e mais precisamente, perante situações matemática, possibilitando percepções e compreensões sobre as dimensões do problema didático da modelização matemática.

Estudos realizados por Barquero, Bosch e Gascón (2013), apresentam, a partir da TAD, reflexões sobre o problema didático da modelização matemática; segundo esses autores, o problema didático se dá em três dimensões a Epistemológica, a Econômica e a Ecológica. Destacamos duas dessas dimensões: a *epistemológica* e a *ecológica.* A primeira, refere-se ao questionamento da validade, certezas, concepções e crenças sobre os conhecimentos que transitam nesta instituição; a segunda dimensão, apresenta elementos teóricos suficientes para a análise do modo de vida de um objeto de saber matemático em uma determinada instituição.

O problema da "natureza" dos objetos matemáticos e o de seu funcionamento na atividade matemática, levou Chevallard (1999), a distinguir dois tipos de objetos: os objetos ostensivos, e os objetos não-ostensivos. Segundo Almouloud (2007), objetos ostensivos referem-se aos elementos ou aspectos presentes na situação de ensino que são explicitamente visíveis, de natureza sensível, perceptíveis ou apresentados de maneira clara e direta.

O autor conceitua os objetos não ostensivos sendo os "objetos" impalpáveis, imateriais, como as ideias, as instituições ou os conceitos, mas que, todavia, existem institucionalmente sem que, no entanto, eles sejam vistos, ditos, escutados, percebidos ou mostrados por conta própria; que apreendemos a identificá-los e a mobilizá-los por meio de certas expressões, escritas, e gráficos colocados em jogo nas práticas e situações específicas.

Chevallard (1992) desenvolveu os construtos teóricos da TAD tratando principalmente de instrumentos fundamentais de análises das noções das praxeologias humanas, inclusive de práticas docentes. Focaliza para o estudo das organizações praxeológicas didáticas, pensadas para o ensino e a aprendizagem de organizações matemáticas. Estuda ainda as condições de possibilidades e funcionamento de sistemas didáticos, entendidos como relações que se estabelecem entre o sujeito, a instituição e o saber.

Outra problemática importante é a ecologia das organizações praxeológicas. É um construto teórico concebido por Chevallard (1991) e Artaud (1998). Segundo Chevallard (1999), permite abordar os problemas que se criam entre os diferentes objetos do saber a ensinar. Uma vez que os objetos têm inter-relações hierárquicas que permitem identificar e analisar as estruturas ecológicas onde vivem determinado objeto. Chevallard (1999), apoia-se nos conceitos de nicho, habitat e ecossistema par explicitar as relações entre os objetos e as práticas sociais humanas em torno de si mesmas.

A ecologia de saberes abrange a ecologia matemática e a ecologia didática. Cujo aspecto permite efetuar o questionamento das condições e restrições existenciais/ecológica de um determinado objeto em uma determinada instituição. Esse questionamento foi assim elaborado por Michele Artaud:

> A problemática ecológica se apresenta, primeiramente, como um meio de questionar o real. O que existe, e por quê? Mas também, o que não existe e por quê? Poderia existir? Sobre quais condições? Inversamente, tendo dado um conjunto de condições, quais objetos são forçados a viver, ou pelo contrário, quais são impedidos de viver nessas condições? Estas questões podem parecer de uma simplicidade infantil. (...) elas permitem englobar o domínio da realidade do didata de maneira pertinente, munindo o pesquisador de um meio de se desprender de certa ilusão de transparência e de ser atento às dependências dos objetos que ele estuda (ARTAUD, 1998, p. 101).

Diante da argumentação de Artaud (1998), sobre o questionamento da problemática ecológica, podemos afirmar que uma Transposição Didática é exibível pela ecologia didática do saber de um determinado objeto matemático, por exemplo, aceito e assumido institucionalmente; sendo, portanto, possível perceber e analisar as condições de existência determinante deste objeto para as atividades dos sujeitos. Para Chevallard (1991), um saber matemático que se utiliza e se ensina em uma definida instituição organiza, ecologicamente, uma forma particular de conhecimento que ao ser transposto de uma instituição para outra, cada uma determina funções distintas ao objeto que vive em seu nicho.

Por sua vez, Almouloud (2007), definindo elementos integrante de uma ecologia refere-se ao habitat como sendo o lugar onde vive um determinado objeto reconhecido e validado por uma instituição, que por sua vez determinará o seu nicho, isto é a sua função, o papel que o organismo desempenha no ecossistema; "o conhecimento de nicho ecológico permite responder: como, onde e à custa de quem a espécie se alimenta, por quem é comida, onde descansa e se reproduz" (ALMOULOUD, 2007, p. 114).

Chevallard (1999) aponta três noções fundamentais da TAD: tarefa; técnica; Tecnologia e teoria. Essas noções, são as que permitem modelar as práticas sociais gerais e particulares, como por exemplo, a atividade matemática. Assim, as práticas sociais institucionais podem ser analisadas sob diferentes pontos de vistas e diferentes maneiras, em um sistema de tarefas relativamente delineadas, reproduzidas, reconhecidas e compartilhadas histórica e socialmente.

Portanto, pelos pressupostos até aqui elencados, temos que reconhecer que a TAD, conforme assegura Chevallard (1991) se dedica a explicar as praxeologias com matemáticas e isto se confirma no momento da intencionalidade de aprender ou ensinar um objeto de saber matemático (Chevallard, 1991). Neste sentido o território da TAD possui um campo vasto e se encontra teoricamente em todos os espaços sociais.

Esse terreno, "excede os ensinos das matemáticas escolares; adentra o conjunto do uso das matemáticas; influi uma infinidade dos espaços em que o saber matemático é pertinente, observado e manipulado" (op. cit., p.174). Na próxima seção dizemos que a escola CEPE possui essa caracterização que se identifica uma instituição escolar propícia para o campo das práticas com matemática, cuja manipulação de objetos matemáticos supõe em maior ou menor intensidade a manipulação de atividades com matemáticas com alguma razão de ser e de existir.

10.3 A casa escola da pesca (CEPE): práticas sociais políticas e práticas pedagógicas

A CEPE é caracterizada como uma instituição educativa localizada em uma comunidade escolar das águas, isto é, a Ilha de Caratateua, pertencente ao Distrito de Outeiro, Município de Belém-PA. Surge de necessidades voltadas ao atendimento de preocupações educacionais de demandas relativas à formação/qualificação de jovens, filhos de pescadores da região das ilhas.

Ao buscar a formação integral desses jovens, a CEPE, promove ações pedagógicas curriculares baseadas no saber das comunidades e da realidade de vida dos pescadores. Relacionando conhecimento da pesca com o conhecimento escolar e científico como elementos teóricos e práticos na construção de sua aprendizagem escolar dos alunos. Caracterizando-se, portanto, como uma etnocomunidade do campo devido a sua praxeologia institucional apresentar razões de ser e existir aos sujeitos que se relacionam no tempo e espaço escola.

O contexto vivenciado durante o trabalho de pesquisa de campo na CEPE, mostrou-nos as possibilidades de realização de entrevistas sobre as práticas escolares apresentando a importância de um grande conhecimento sobre o que denominamos de saber matemático, relacionados as práticas socioculturais, em torno das práticas de criação, reprodução, captura e comercialização na área da pesca.

Nesse espaço tempo vivenciado na CEPE, pudemos presenciar um conjunto de práticas socioculturais associadas às práticas com matemática. Assim, foi extremamente oportuno para a percepção dessas práticas, a identificação do Método de Redução à Unidade, existentes nas praxeologias com matemática escolar na CEPE.

Essa caracterização levou-nos a perceber a existência de um sistema educativo socialmente instituído capaz de gerar práticas e discursos políticos, pedagógicos e ideológicos ao incluir em suas práticas educativas expedientes específicos do saber de uma determinada praxeologia, reconhecida socialmente e validada institucionalmente para que os alunos consigam formas mais eficientes dos rendimentos com a atividade de pesca e aquicultura.

Segundo Chevallard (1999) podemos até imaginar um mundo institucional em que as atividades humanas seriam governadas por praxeologias bem adaptadas que permitiriam todas as tarefas desejadas a se tornarem eficazes, seguras e inteligíveis; porém, tal mundo, afirma o autor, não existe, porque as praxeologias envelhecem; e seus componentes teóricos e tecnológicos podem perder o crédito e tornar-se opaco, enquanto novas tecnologias emergentes. Podemos, assim, inferir que os princípios e concepções enquanto objetos tecnológicos e normativos, em uma instituição escolar, podem permanecer ou perder o sentido, ao cair em desuso, ou perder a sua razão de ser e existir, tonando-se extinto.

A CEPE segue princípios políticos e pedagógicos da perspectiva da educação do campo, a exemplo do previsto na Resolução CNE/CEB nº 1/2002, presentes nas pautas de lutas dos movimentos sociais organizados: a organização e gestão coletiva dos processos educativos; a proposta pedagógica, em respeito às diferenças e o direito à igualdade da diversidade do campo em todos os seus aspectos (sociais, culturais, políticos, econômicos, de gênero, geração e etnia); o protagonismo dos sujeitos, enquanto produtores de conhecimentos na construção de conhecimentos; os conhecimentos socioculturais das comunidades como fonte para se estudar o saber escolar; e o reconhecimento da alternância pedagógica relativa ao saber em tempos e espaços distintos.

Outro princípio importante, relativo a reflexão das práticas educacionais do conhecimento matemático, é apresentado por Rocha & Martins (2009), referindo-se: "o conhecimento matemático, deve ser a partir de uma outra lógica diferenciada da lógica urbanocêntrica, quer seja a lógica da terra, a lógica do campo e, sobretudo, a dos sujeitos que ali vivem, constroem e defendem seu modus vivendi" (Rocha & Martins, 2009, p. 1).

Importante também ressaltar do cenário tempo e espaço da pesquisa na CEPE a responsabilidade acadêmica-científica dos pesquisadores em identificar e apresentar as práticas com matemática do ponto de vista da ecologia, um desafio para pensar e elaborar construções teóricas para dar visibilidade a essa forma de compreensão das praxeologias com matemática como outra forma de se fazer matemática escolar considerando-se, por exemplo, algumas das dimensões das práticas sociais.

As entrevistas e observações apontaram para a existência de elementos que compõe as *quatro dimensões de uma prática social*[79], proposta por Leont'ev (1978), a saber: formas de produção; relações sociais; conhecimento disponível; e sistema semiótico de significações culturais. "Sobre essas quatro componentes que apenas surgem e se desenvolvem sobre o ser, repousam as práticas sociais", reitera Radford (2011, p. 227).

As reflexões dialéticas e interações que resultam desses elementos dimensionais das práticas sociais nos levam a identificação, caracterização e compreensões dos modos de pensar e fazer dos sujeitos que comungam das práticas culturais compartilhadas em uma instituição escolar ou não escolar. Por exemplo, na CEPE, há um jogo institucional que valida formas de produção de conhecimento, mobiliza artefatos, utiliza de objetos de conhecimentos disponíveis na sociedade, produz discursos e práticas com significações culturais próprias que justificam a razão de ser dessa escola; assim, condicionam a vida de objetos de saberes em atendimento às necessidades dos sujeitos nas práticas escolares.

Portanto, para a efetivação desse jogo institucional na CEPE, os sujeitos (alunos e professores) lançam mão de conhecimentos disponíveis na área da pesca (seja do cotidiano dos pescadores ou acadêmico), tais como o saber prático dos filhos de pescadores e o conhecimento acadêmico-científico dos professores engenheiros de pesca que lecionam na escola. E que acionam os professores de matemática para a mobilização de objetos matemáticos, como por exemplo o MRU, como saber a ensinar, observadas nas tarefas escolares da CEPE. Na seção a seguir, apresentamos o MRU como objeto de saber matemático utilizado tanto nas atividades de ensino na escola CEPE quanto nas atividades de comercialização da pesca.

10.4 O método de redução à unidade (MRU)

Dentre os objetos matemáticos que vivem na CEPE, o MRU, é um deles, conforme já mencionamos. O MRU, possui historicamente uma gênese marcada pelas práticas dos homens comuns como os de comércio. No caso da CEPE, as práticas sociais com

[79] Confira mais em Radford (2011, p.227 e 228), que apresenta em uma figura a representação gráfica dos quatro componentes principais das práticas sociais.

matemáticas vivem em suas diferentes formas, com diferentes nomes; uma ferramenta primordial para situações similares e em que há necessidade de se conhecer a taxa unitária. A ecologia do MRU na CEPE não acontece por acaso, mas, pelo compartilhamento de interesses de práticas sociais na perspectiva educacional comuns e pelo engajamento de praxeologias nas tarefas que interligam a vida social e educacional dos sujeitos que sustentam esse ecossistema.

Partimos do pressuposto de que de esse jogo institucional na CEPE mobiliza elementos das quatro dimensões das práticas sociais e que condicionam a vida de objetos de saberes em atendimento às necessidades dos sujeitos em suas práticas sociais do campo. Chegando ao postulado de que o MRU acontece, emerge e vive da mobilização dos elementos dessas quatro dimensões. Chegando, entretanto, à tese de que há Práticas com Matemáticas na CEPE envolvendo o MRU para a solução de situações sobre produção e comercialização de pesca e aquicultura; este objeto tem sua vida sustentada pela funcionalidade e uso que dele se faz em atividades como a realidade de vida dos discentes da escola; assim, ativa necessariamente o uso de tarefas praxeológicas instituídas pelas dimensões políticas e pedagógicas.

Antes de tudo o MRU possui uma história. "A palavra que proferimos e o objeto ao qual ela se refere estão inevitavelmente ligados a uma prática social historicamente construída" (RADFORD, 2011, p. 158). Segundo Radford esta prática social é o nicho da palavra, que objetifica a realidade conceitual dos indivíduos, delineando o funcionamento dessas práticas.

Historicamente, a Redução à Unidade aparece como um método de resolução de tarefas que se transpõe da regra de três. Constituía-se parte indispensável da aritmética (prática) e por isso não poderia faltar em nenhum livro, de nenhum modo, uma seção correspondente a regra de três, pois como ressalta Brooks (1880, p. 330), é a principal, é a mais excelente regra de toda a aritmética,

> a produção da aritmética no ocidente durante os séculos XIII, XIV e XV esteve intimamente ligada à revolução comercial como ferramenta de apoio imprescindível de atividades contábeis e fiscais (Brooks, 1880 p. 330) [Tradução nossa].

Nessa perspectiva de ferramenta imprescindível, Del Potro & LLave (2004) apontam que os ofícios de mercadores e artesões demandavam, além de ler e escrever, conhecer o manejo de operações matemáticas básicas, não no sentido teórico ou filosófico, mas de cunho utilitário, prático e profissional, como a forma de realizar as práticas inerentes as suas atividades.

Tais necessidades obrigariam os homens de negócio a criarem sua educação profissional, entre elas as escolas de ábacos italianas, por exemplo; de onde surgiram livros como os Tratados de *Mercaduria e de Práticas de Aritméticas*. Enquanto os Tratados primeiros, segundo Del Potro & LLave (2004), eram elaborados para facilitar a transmissão e conservação de conhecimentos restritos imprescindíveis para o êxito dos negócios a partir de experiências vividas pelos mercadores.

Os tratados de *práticas* eram de caráter mais geral, concebidos como textos escolares, elaborados por mestres italianos para utilização em suas escolas, mas com orientação eminentemente utilitária por meio de problemas que refletiam situações concretas nas quais os mercadores poderiam ver-se envolvidos. Assim, por exemplo, as práticas da regra de três não eram privativas das atividades dos estudiosos, mas integrantes de atividades humanas com matemática, cujas convenções de usos foram sendo construídas e consolidadas nas experiências vivenciadas em diferentes atividades humanas.

De acordo com Hoyrup (2007), no contexto do uso doss ábacos italianos, fizeram-se presentes, inclusive em escritos árabes como os de Ibn Thabāt, al-Karaji e Ibn al-Banna quando tratavam das transações comerciais, mas mantendo o caráter cultural prático e utilitário, sem preocupações teóricas, certos tipos de problemas como os de mercadores e artesões. Certamente os traços de problemas envolvendo multiplicação e divisão, chegariam à escola, no final do século XVIII; cuja regra de resolução consiste principalmente no método aritmético intuitivo como o que segue:

> Suponhamos em primeiro lugar que havendo conhecimento com inteira certeza que 13 varas de um certo lienzo52 custam 130 reais se nos perguntarem, quantos reais custarão no mesmo preço, 18 varas do mesmo lienzo? (Lacroix, 1839, p. 280).

Do enunciado, a resolução apresentada era por meio da prática da aritmética comercial. Bastando para isso determinar o verdadeiro preço de cada vara de lienzo, achando o quociente 10 reais que resulta da divisão do valor total, 130 reais pelas 13 varas que se supõem compradas inicialmente, e já que sabemos este preço, se o multiplicarmos agora por 18, que é o número de varas da segunda compra, nos resultará por produto 180 reais, verdadeiro valor que nos perguntavam (LACROIX,1839).

Livros didáticos não muito antigos possuem problemas com essas mesmas caracterizações matemáticas; estão presentes nas escolas do ensino fundamental principalmente nos anos iniciais, onde a regra de resolução é a mesma do século XVIII, se tomada como método intuitivo aritmético. Esse método aritmético intuitivo, como remete à escola atual, em outros momentos da história, teve sua complexidade revelada para os iniciantes ou não iniciados, em uma atividade, pois, para resolver problemas desse tipo, se necessita possuir um conhecimento que nem todos possuem. Segundo Vallejo "essa regra, que não exige mais que o conhecimento das quantidades de uma mesma espécie para introduzir imediatamente a proporção, estaria mais ao alcance dos principiantes" (VALLEJO, 1841, p. 351).

Assim, a velha prática de comerciantes e artesões ainda se faz presente e começa a ganhar novas transposições como depreendemos de Gómez (2006, p. 15) quando refere que "nessa conjuntura começou a impor-se um método em um estilo de pensamento que não depende das proporções e nem das equações, são da análise para encontrar a solução sem ter que depender de recordar de regras mais ou menos artificiais". Uma das formas desse método analítico seria conhecida pelo nome de método de redução à unidade como aparece em Bourdon (1848).

No Brasil, início da década de 1930 o ensino primário era ministrado em colégios privados de igrejas ou colégios particulares de colônias de imigrantes. Ser estudante era uma prerrogativa de poucos. Segundo Botelho (2012) o acesso ao ensino básico era uma realidade difícil para a classe baixa; no nível superior o funil de seleção era mais ainda; em Campinas (SP), havia o Colégio Culto à Ciência, de marcante inspiração positivista. Colégio particular significava custo e com isso impedia o ensino das classes mais pobres e dificultava o acesso até da classe média. Esse quadro começa a mudar timidamente com a criação da Universidade de São Paulo, nos anos 1930.

Nos anos 1930 e 1940 tinha um sistema de comércio embrionário; contava com poucas indústrias e a agricultura de subsistência era o forte no momento. Na impossibilidade de importações o Brasil começa a incentivar a indústria e o comércio, a chegada de imigrantes com novas tecnologias acelera esse processo.

Segundo Botelho (2012), havia poucas escolas de comércio e de contabilidade e a figura dos vendedores ambulantes de tudo, de remédios, de óculos, de roupas etc., foi o apogeu do comércio, sendo um dos objetivos principais a preparação para a vida comercial; mas, se o curso primário só ensinava o português e uma aritmética muito limitada; o curso primário na Matemática limitava-se a calcular (exemplo clássico) o preço de um tecido pela Aritmética, como por exemplo:

> se 12 metros de tropical inglês custam $ 35 quanto custarão 46 metros? Solução pela Aritmética: se 12 custam $ 35, o metro 145 custam 35/12 = $ 2,92. Então, 46 x $ 2,92 = $ 134,32. Para o cálculo de frações usavam-se então os misteriosos MDC e MMC, que eram o pavor dos jovens (Botelho, 2012, p. 2).

Livros didáticos utilizados nas escolas no século XX no Brasil apresentava uma praxeologia para o MRU, baseada no método intuitivo de ensinar a contar trazido pelos americanos (estadunidenses) para o Brasil entre final do séc. XIX e início do século XX. A respeito desse método de ensinar, Oliveira destaca que era

> um modo de ensinar trazido por missionários presbiterianos norte-americanos, os quais no Brasil fundaram escolas, igrejas e hospitais de cunho protestante. Foi vulgarizado no Brasil, a partir do momento em que Rui Barbosa traduziu o manual pedagógico do norte-americano Norman Allinson Calkins, em 1886. Era, pois, esse manual, Primeiras Lições de Coisas, de Calkins, que direcionava pais e professores em como fazer uso dos princípios do método intuitivo para a instrução dos seus filhos e alunos, respectivamente (OLIVEIRA, 2013, p. 76).

Portanto, esse Método de Redução à Unidade depende da análise da questão e a dedução das consequências que resultam desta análise, consistindo em buscar o valor da grandeza de mesma espécie da incógnita que corresponda a um valor da outra grandeza igual a um. Em síntese, resolver um problema intuitivo exige uma das indagações fundamentais que dá sentido ao MRU: quanto de um corresponde a uma unidade do outro? A respectiva resposta remeta a existência do MRU.

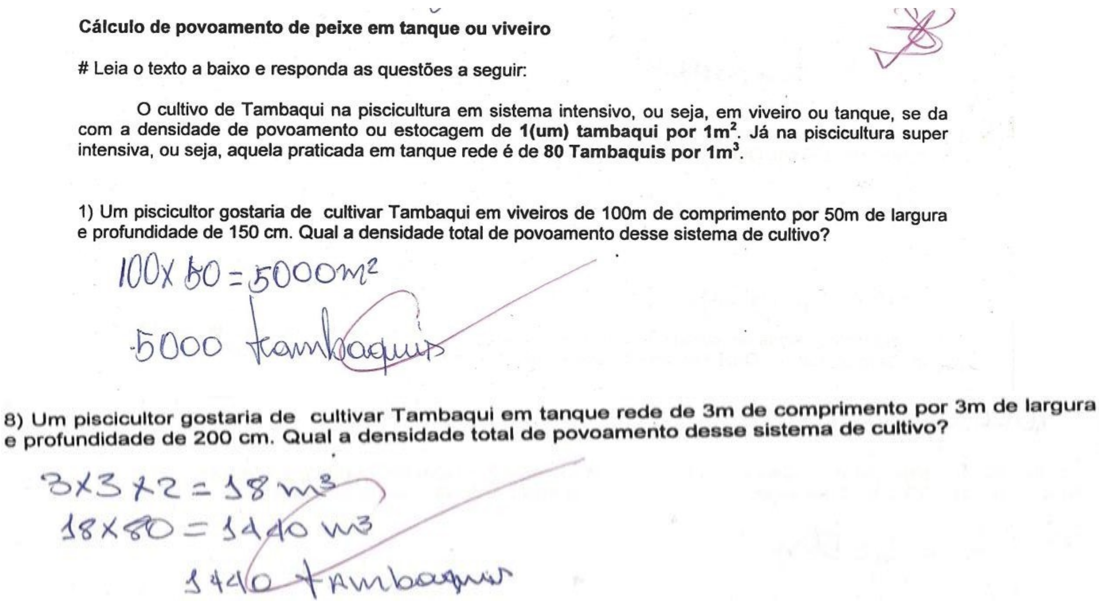
10.5 Praxeologias com O MRU na CEPE

As praxeologias que envolvem o MRU não necessariamente estão na escola, com exclusividade. Mas, o MRU, ainda que transparente, poderia estar presente em várias atividades, inclusive fora da escola. No cotidiano das pessoas que compram, vendem, fazem algum tipo de mensuração; está nas ciências aplicadas, como por exemplo, na Física nos cálculos de velocidade média, na Geografia com o cálculo de densidade populacional e outras aplicações. Na CEPE está sob a forma de taxas de juros, cálculos de biometria, densidade de peixe em tanques enfim na prática do campo e manejo de peixes.

Embora o MRU não seja claramente aceito pelos matemáticos, é um objeto matemático que está nas praxeologias da CEPE, isto é, nos sistemas de tarefas de ensino de matemática. Tem sua vida garantida pelas situações de ensino de matemática na CEPE, que oferece condições para sua existência em seu contexto de práticas com cálculos no desenvolvimento de pesca. Por questões de economia de espaço, aqui neste texto iremos apresentar alguns exemplos da presença do MRU envolvendo atividades (práticas) com matemática na CEPE.

Figura 1 - cálculo da densidade de povoamento, feita pelo aluno da CEPE

MRU sem uso de Fórmulas: Cálculo da densidade de povoamento



Cálculo de povoamento de peixe em tanque ou viveiro

Leia o texto a baixo e responda as questões a seguir:

O cultivo de Tambaqui na piscicultura em sistema intensivo, ou seja, em viveiro ou tanque, se da com a densidade de povoamento ou estocagem de **1(um) tambaqui por 1m²**. Já na piscicultura super intensiva, ou seja, aquela praticada em tanque rede é de **80 Tambaquis por 1m³**.

1) Um piscicultor gostaria de cultivar Tambaqui em viveiros de 100m de comprimento por 50m de largura e profundidade de 150 cm. Qual a densidade total de povoamento desse sistema de cultivo?

100x 50 = 5000m²

5000 tambaquis

8) Um piscicultor gostaria de cultivar Tambaqui em tanque rede de 3m de comprimento por 3m de largura e profundidade de 200 cm. Qual a densidade total de povoamento desse sistema de cultivo?

3x3x2 = 18 m³

18x80 = 1440 m³

1440 Tambaquis

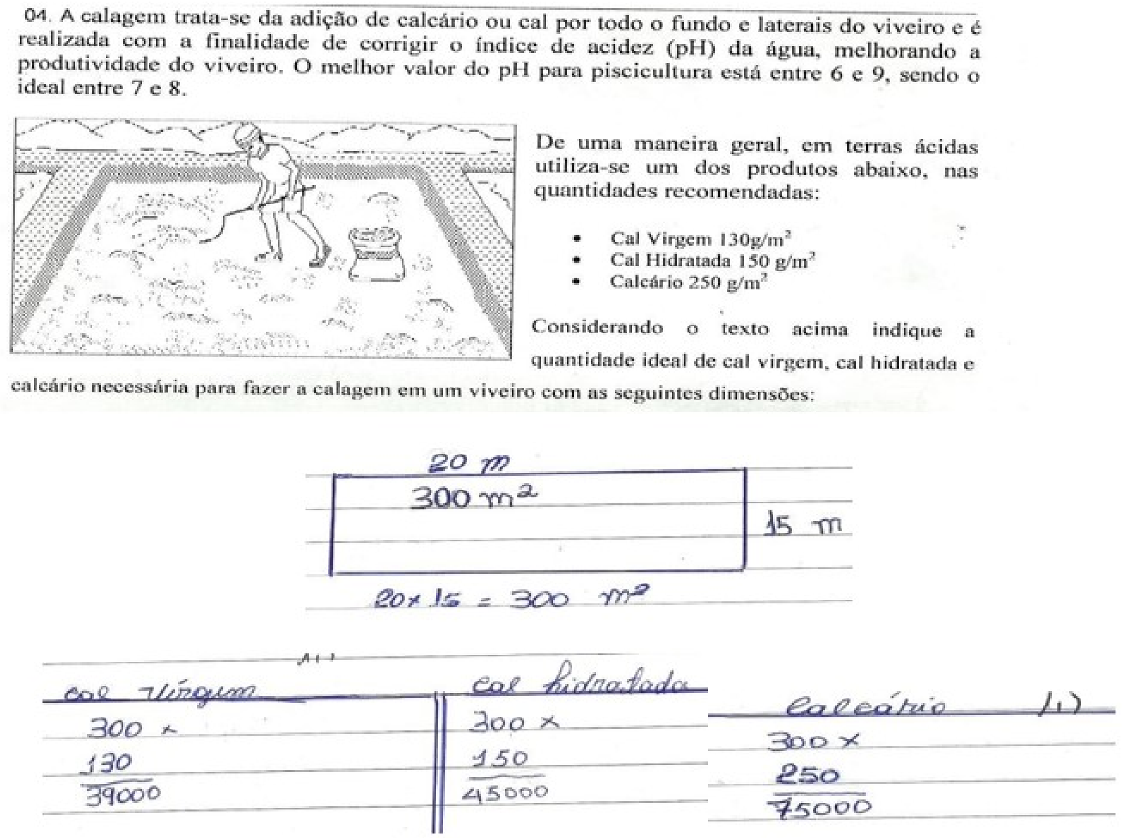
Fonte: Professor de matemática da CEPE, pesquisa de campo, 2011.

Em relação ao MRU procuramos destacar que na instituição matemática nãoé admitido uma razão entre grandezas distintas e por isso, não teria sentido, por exemplo, as razões velocidade e densidade. Todavia, em outras atividades humanascom matemática não é aventado tal restrição e é assumido o lado intuitivo, próprioda aritmética prática, que permite a construção de ferramentas para suas práticas.

O MRU, não sendo percebido pelo professor da CEPE dá lugar a outros métodos de resolução de problemas envolvendo regra de três, taxas de juros, cálculo de ração, produção e comércio de peixe, cálculo de calagem, figura 25, podendo dificultar indiretamente no processo de aprendizagem.

O MRU como rendimento no cálculo de calagem

Figura 2 – Tarefa envolvendo o cálculo de calagem pelos alunos da CEPE



04. A calagem trata-se da adição de calcário ou cal por todo o fundo e laterais do viveiro e é realizada com a finalidade de corrigir o índice de acidez (pH) da água, melhorando a produtividade do viveiro. O melhor valor do pH para piscicultura está entre 6 e 9, sendo o ideal entre 7 e 8.

De uma maneira geral, em terras ácidas utiliza-se um dos produtos abaixo, nas quantidades recomendadas:

- Cal Virgem 130g/m²
- Cal Hidratada 150 g/m²
- Calcário 250 g/m²

Considerando o texto acima indique a quantidade ideal de cal virgem, cal hidratada e calcário necessária para fazer a calagem em um viveiro com as seguintes dimensões:

Fonte: Professor de matemática da CEPE, pesquisa de campo, 2011.

Os cálculos de densidade de povoamento e de calagens para melhorar a produtividade de peixes, colocam os discentes em contato com tarefas que serão utilizados nas suas práticas cotidianas de criação de peixes em tanques ou cativeiros. Como também, deixa claro o papel do professor de matemática em buscar de afeiçoar suas Práticas com Matemáticas escolares às práticas dos professores de qualificação profissional (engenheiros de pesca).

Estes, antes são sujeitos da técnica de pensar utilitário sobre a mobilização de objetos matemáticos; para, então, fazerem os alunos afeiçoarem essas práticasàs suas experiências cotidianas de captura, comercialização e criação de peixe em viveiros e rendimentos no cálculo de calagem.

De um lado, qualquer prática é sempre acompanhada de um discurso ouuma racionalidade mínima sobre o que é feito, como se faz e o porquê do que se faz em uma instituição (Chevallard, 2009). E uma Prática com Matemática mobiliza objetos, valores, saberes, intenções e um modo de agir e pensar nas Etnocomunidades (Gaia & Guerra, 2014); por outro lado, podemos presumir que uma Etnocomunidade usa Práticas com Matemáticas, visando atender interesses comuns dos sujeitos, o *habitus* escolar, tal como acontece na CEPE.

Mas, existe outro olhar sobre a presença do MRU nessas práticas de ensino na CEPE. As tarefas envolvendo atividades de pesca permite descortinar que o MRU tem seu habitat na CEPE. Ao serem propostas pelo professor de matemática, seguindo as práticas rotineiras de seus alunos; deixam aflorar um conflito entre as práticas escolares e extraescolares, entre as práticas do mestre matemático e a de seus discípulos pescadores.

Embora, esse embate seja explícito entre as práticas do professor de matemática e o da qualificação, podendo ser conciliáveis, não acontece com respeito aos alunos e seus professores quando a tarefa se insere em suas rotinas extraescolares. Longe de se abrigar em uma prática matemática, o MRU é uma técnica útil para resolver tipos de tarefas sobre o ensino de matemática. Descobrir a técnica utilizada pelos sujeitos é também evidenciar a sua relação com o saber matemático e obter uma oportunidade de elaborar cartografias dos processos e técnicas utilizados.

Desse modo as Práticas com Matemáticas de CEPE se mostram úteis parao estudo dos modos de vida do MRU. São práticas sem uma teoria que a justifique. Mas, nos apresentam conveniências ao tratar as praxeologias com objetos matemáticos como utilitárias, não subordinadas a um modelo epistemológico da instituição produtora da Matemática. As práticas com matemáticas têm sua ecologia, ativam processos de raciocínio intuitivos e tecnológicos. Suas manifestações, nas etnocomunidades, podem ser evidenciadas nos discursos verbais, narrativos orais, escritos (as), ou gestuais, nas ações elementarizadas; na resolução de tarefas/situações problemas, com alguma característica sociocomunicativa.

10.6 Práticas sociais com matemáticas, habitus e saber prático

Em um primeiro ponto de vista a noção de práticas com matemática pretende trabalhar a matemática enquanto atividade humana utilizada no enfretamento das mais diversas situações existentes no interior de instituições e, não raro, nas práticas sociais: econômicas, políticas, educacionais, profissionais etc., cuja razão de ser emerge das necessidades humanas, da racionalidade institucional e do *habitus* cultural que lhes dão sentido.

Tentar conceituá-la, pressupõe assumirmos, as dimensões de uma prática proposta por Leont'ev; os elementos integrantes de uma organização praxeológica enquanto práticas sociais, em Chevallard; a conceituação de *habitus* em Bourdieu (1989). E assim, refletir sobre o a ideia de práticas com matemáticas enquanto saber prático. A fim de compreender elementos do processo de constituição das práticas sociais, criadas pelas atividades humanas. Portanto, uma noção que poderia nos auxiliar a pensar e questionar dentre as características de práticas socioculturais de grupos organizados socialmente e que utilizam de objetos de saber matemático em suas formas de agir por finalidades institucionais.

Sem adentrar no debate da discussão do significado ou etimologia do termo, destaca-se a opção por chamar a noção de *Práticas com Matemáticas* na perspectiva de um conjunto das práticas sociais institucionais, que realizam praxeologias com matemática, e possuem uma razão de ser e de existir enquanto saber prático. Mas, devido ao objeto matemático e o contexto da pesquisa, tem-se a intenção de fazer-se a distinção entre *práticas matemáticas* e *práticas com matemática*.

A primeira condição favorável para as práticas com matemática, em nosso entender, se dá na complexidade em dizer que uma prática escolar ou extraescolar que utiliza e manipula objetos de conhecimentos matemáticos em determinadas tarefas se caracteriza enquanto prática matemática. Ora, pois, assim pensamos: uma prática é matemática quando ela consegue viver somente no ambiente matemático; caracterizando-se por sua destinação matemática, ou seja, os objetos matemáticos seriam utilizados para fins de desenvolvimento da matemática pela própria matemática aos seus rigor e sofisticação; e ou quando é elaborada, criada e praticada por matemáticos geralmente sem a finalidade de atender uma demanda ou uma prática sociocultural. A prática matemática tem um discurso tecnológico-teórico que está no campo da própria Matemática. Já uma prática com matemática é autotecnológica. Logo, a matemática escolar ou prática no cotidiano das pessoas poderemos chamar de uma prática com matemática.

Neste sentido, as *práticas com matemática*, utilizada para fins sociocultural, político, pedagógico escolar, remete à ideia conceitual no entendimento de que a matemática utilizada por qualquer grupo que dela compartilha, a utiliza enquanto ferramenta para resolução de tarefas; no sentido e na finalidade de estudar e solucionar tarefas oriundas das práticas sociais. Podendo ser assumida como uma praxeologia incompleta quando existe uma prática que não possui uma teoria que a justifique, por exemplo.

Portanto, talvez, essa diferenciação seja necessária, pois destoa em alguns aspectos do entendimento proposto por alguns teóricos sobre o uso do termo *Práticas*

Matemáticas[80]. Porém, consideramos muito próximo em outros aspectos das diferentes formas de uso e teorizações da matemática por Miguel & Vilela (2008); onde, consideram ser a matemática ser objeto de construções sociais de grupos que possuem suas práticas específicas de linguagem e atividade e usam-nas para organizar suas experiências no mundo.

No eixo da concepção de *habitus* em Bourdieu (1989), pressupomos as práticas com matemática, uma abordagem sociocultural da matemática, considerando-se nesse contexto, o agente, a ação e a finalidade da realização de determinadas práticas sociais legitimadas institucionalmente, inclusive, dispensando questionamentos sobre eles; mesmo apresentando-se com características social, histórica, educacional, passam despercebidas porque são perfeitamente naturais, como por exemplo, é o caso na movimentação de um conjunto de objetos matemáticos para a execução de tarefa escolares.

Essas caracterizações identificadas pelas práticas cotidianas do agente por uma finalidade produzem comportamentos habituais reproduzidos pelos sujeitos por força de normativas institucionais sejam ostensivas ou não ostensivas. As práticas cotidianas, por sua vez, não emergem unicamente de uma escolha individual ou coletiva, mas, parece estar ligada as infraestruturas institucionais disponíveis, as manifestações culturais discursivas, as significações culturais associadas às práticas sociais e aos hábitus incorporados.

Bourdieu (2008) teoriza a questão dos comportamentos habituais como sendo a expressão dos sujeitos adquiridos de um sistema que age sobre princípios de visão, de gosto e de estruturas cognitivas. "Uma espécie de senso prático do que se deve fazer em dada situação - o que chamamos, no esporte, o senso do jogo, arte de antecipar o futuro do jogo inscrito, em esboço, no estado atual do jogo" (Bourdieu, 2008, p. 42).

Neste pensar a definição de *habitus* proposta por Bourdieu (2008) refere-se aos estilos de vida, maneiras e gostos incorporados e campo como um espaço social que possui estrutura própria e, relativamente, autônoma em relação a outros espaços sociais, que tem uma lógica própria de funcionamento, estratificação e princípios que regulam as relações humanas.

---

[80] C.f. Silva, N.M.J.M. Um estudo sobre as práticas matemáticas do povo Krenák. Tese de doutorado. Universidade de Brasília – UnB, 2012. Scatolin Costa, Daniela Netto. Significado em Práticas Matemáticas não Escolares: estudo com alunos do ensino fundamental. 2014. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, São Carlos, 2014.

O *habitus*, segundo Waquant (2005), revela-se nos discursos ou práticas com certas estruturas em um sistema de disposições, ou seja, de virtualidades, potencialidades e eventualidades. Nestas teorizações, situamos a noção de saber prático na estratificação conceitual de *habitus* de Bourdieu para se pensar as interações humanas e suas mediações.

Ao relacionarmos as noções de saber prático e de *habitus*, este dispensa o questionamento sobre o que se faz e o porquê, aquele se consolida na manifestação do *habitus*, isto é, pela situação que leva o sujeito a agir de tal e tal maneira, na qual a própria situação faz parte do *habitus*.

O saber prático é para Bourdieu (2008) um conhecimento sobre aquilo que existe apenas como derivação da ação humana. E o *habitus* como agentes que atuam e que se assujeitam às regulações dos espaços sociais sem estranhamentos. Chevallard (1996, p. 130) exemplifica a relação *habitus* e instituição, dizendo: "o ensino teoricista-tecnicista pode se constituir em condição favorável de levar a práxis institucionalizada a se tornar hábitus que passa a se constituir parte do meio institucional".

Podemos inferir daí que os conhecimentos disponíveis na cultura reproduzidos como crença, valores, opiniões são comportamentos habituais ou *habitus* carregados de simbolismo socioculturais, realizados e internalizados pelos sujeitos como uma prática em conformidade com o fazer e o pensar instituído pela instituição; ou seja, as práticas sociais humanas, no sentido do *habitus*, são agentes que regulam as ações dos sujeitos.

Em nosso entender, a partir das argumentações dos autores, as práticas sociais existem como um saber discursivo ou saber prático reproduzidos como forma de comportamentos habituais dos sujeitos em atendimento às demandas institucionais, socioculturais e coletivas convencionais. Tanto o saber prático quanto as algumas práticas sociais são de dois tipos: práxis ou técnicas. Cujo modos de vidas resultam da consolidação de estruturas culturais sustentadas e reproduzidas por discursos e práticas legitimadas naquele contexto específico. Na práxis, o sujeito e o agente, a ação e a finalidade são inseparáveis. Na técnica, o jeito de se fazer corretamente uma tarefa resulta da fabricação das finalidades.

Podemos pensar naturalmente, em exemplos de práticas socioculturais instituídas, frutos de comportamentos e situações habituais no uso de sistemas de atividades humanas ou tipos de tarefas humanas, como por exemplo, o ensino de matemática escolar, que pode nós auxiliar a analisar essa relação entre uma prática social com matemática e o saber prático de um determinado grupo sociocultural, *etnocomunidade*.

Um grupo sociocultural organizado por *habitus* culturais e instituído por seus sujeitos circunscrito sob determinadas práticas e fins sociais, chamamos de etnocomunidade. Nas palavras de Bourdieu (1983), o *habitus* é um "sistema de disposições socialmente constituídas que, estruturas estruturadas e estruturantes, constituem o princípio gerador e unificador do conjunto das práticas e das ideologias características de um grupo de agentes" (Ibid. p. 191). A esse grupo de agentes aqui estamos denominando de etnocomunidade, a própria CEPE é um exemplo de etnocomunidade, pois entendemos que a mesma possui práticas sociais, histórias, valores, afetos, crenças, saberes, objetos que fazem e produzem sentidos socioculturais para os sujeitos, sentido de pertencimento étnico.

Então, práticas sociais e saber prático, ambos, são por assim dizer resultantes da natureza das ações socioculturais humanas; requerendo apenas a arte da prática humana integrada pelos elementos o agente, a ação e a finalidade. Os dois últimos, podendo ser obtidos pela naturalização de si mesmos, alcançando a condição de *habitus* reproduzidos discursivamente ou ensinado intencionalmente por meio de atividades que possuem alguma razão de ser no contexto de uma etnocomunidade.

Não é o foco descrever aqui neste trabalho adentrar na conceituação destes três elementos ou discorrer sobre quem seria o sujeito ou o agente do saber prático ou como as práticas sociais podem se tornar um saber prático, ficando essa discussão para outra oportunidade. Todavia, consideramos que, seja o saber prático como *técnica* ou como *práxis*, esses três elementos se integram e se convergem; podendo estar juntos ou separados; se relacionam e se sustentam nas formas humanas de agir em torno de uma necessidade ou na execução de uma tarefa. Portanto, as práticas sociais se atualizam e se auto justificam enquanto saber prático oferecendo mais condições para que o sujeito do saber prático apenas o torne em saber-fazer.

Poderíamos postular que as práticas matemáticas que se dão no âmbito escolar, ou de uma etnocomunidade, poderiam ser inevitavelmente práticas com matemática, pois, admitindo, que possam contar com o discurso tecnológico-teórico do campo do saber matemático, são transpostas em acordo com as condições impostas pelas situações do campo de práticas escolar e funcionam segundo regras das situações geradas por estes; os sujeitos desse campo de práticas (alunos e professores), uma vez que o ensino de um objeto matemático na escola deveria ser realizado baseando-se em práticas inteligíveis que permitiriam compreender o que se faz e para quê, todavia, apenas vive na escola, de certo modo revestida pelo discurso pedagógico sobre o saber e de uma forma de epistemologia artificial do saber escolar.

Com relação à utilização de saberes matemáticos que vivem nas instituições, Chevallard (1989), propõe-nos um entendimento que relaciona o saber matemático como elemento que constitui e se institui nas práticas sociais, e chega a admitir e afirmar que não há matemática como saber se ela não engloba as práticas sociais. Não há "matemática" como saber se não estamos abrangendo de alguma maneira às práticas sociais com as matemáticas. Ou melhor, aquilo que vamos chamar por meio de um neologismo, práticas sociais com a disciplina de matemáticas, que se realizam nessas instituições, que chamamos instituições com matemática.

Percebe-se que Chevallard ao tratar dessa relação entre saber matemático e práticas sociais, assume claramente o uso da expressão práticas sociais com matemáticas, dando competência a antropologia da didática das matemáticas para o entendimento desse neologismo, partindo da expansão do território das matemáticas como práticas presente em vários segmentos sociais.

> A antropologia da didática da matemática também se ocupa em explicar, então, práticas sociais com matemáticas; são ventos fortes que a didática aprofunda incessantemente, isto é, em momentos em que corrobora com uma intenção de aprender ou ensinar um determinado objeto de saber matemático (CHEVALLARD, 2005, p. 174)

Parece claro, pois, que essa expansão do campo da matemática se caracteriza pela utilização de saberes com matemáticas, isto é, por meio de Práticas com Matemáticas nas diferentes instituições. Cuja manipulação requer os objetos matemáticos ali existentes. No caso da existência de objetos que requer apenas a técnica sem uso de um discurso que a justifique por certo esse objeto terá existência nessa instituição e será manipulado de modo a atender à necessidade dos sujeitos. Esse entendimento é uma vertente que se deve inserir nos fundamentos da didática das matemáticas, na busca de compreender e estabelecer que os saberes com matemáticas pressuponham um tratamento pelas matemáticas existentes e não somente pelas práticas matemáticas normativas do matemático.

Admitimos que o ensino de matemática adquiria a sua plena relevância no enfrentamento das condições normativas; em manipulação, de modo mais geral, de saberes que talvez não sejam matemáticos, no entanto, funcionam trabalham com as matemáticas. Naturalmente, a formação de professores de matemáticas, adquiriria outros níveis de reflexões do pedagógico para o didático, no sentido desmistificar a ideia da formação de matemáticos para a realidade de usuários de matemática, tais como na formação de engenheiros. Incluindo mais ampliadamente na formação de todos aqueles que algum dia, de alguma forma, teria de "manipular matemática" (CHEVALLARD, 2005, p. 175-176).

Em nossa pesquisa, optamos em analisar os modos de vida do MRU na CEPE tendo como referência esse entendimento didático sobre as Práticas com Matemáticas, a partir dos níveis de fatores que codeterminam as ações de uma instituição, no caso a CEPE, ou seja, como e onde acontecem as práticas com esse objeto matemático na CEPE. Isto não implica em desconsiderar as práticas das matemáticas com regra de três, desde que tenhamos clareza dos discursos relativos a esse tema, que vivem no ensino fundamental da referida instituição.

Não assumimos um modelo de Praxeologia com Matemática explicitamente a priori nas práticas de ensino da CEPE, com vista a não corrermos o risco de impor condições que poderiam dificultar, e até mesmo impedir, de percebermos as práticas com o MRU na CEPE. Já que uma praxeologia se refere às organizações didáticas e matemáticas, e apresenta, em todo caso, uma tarefa, técnica, tecnologia e a teoria, às vezes, bem explícitos.

Mas, assumimos a existência de Práticas com Matemáticas como uma noção, por designar uma categoria de entendimento a interligar outras categorias teóricas à compreensão de um conjunto de conhecimentos sobre um objeto. Portanto, as práticas com matemática na CEPE estariam motivadas pela atividade de pesca e aquicultura, por entendermos que há sempre um discurso que conta com justificativas da própria instituição escolar, para condicionar as atividades à aceitação de fatores políticos e pedagógicos aos sujeitos.

Também, entendemos e utilizamos a noção de Práticas com Matemáticas no sentido de uma praxeologia incompleta, isto é, sem um discurso que a justifique (teoria), mas reúne e mobiliza técnicas e ferramentas matemáticas como elementos de soluções para suas necessidades; logo, importante abordagem para compreender objetos de saberes matemáticos que vivem nas práticas sociais de instituições como a CEPE. Capaz de produzir, unir e compartilhar a pluralidade de conceitos e categorias de análise de objetos matemáticos em contextos socioculturais, sem se fechar em uma ideia gerais ou abstrata, mas que deem conta de nos proporcionar mais entendimento dessa diversidade de pensar, saber e fazer.

10.7 Considerações finais

No texto procuramos construir discussão e reflexões a respeito de alguns aspectos e fundamentos integrantes de uma epistemologia do saber prático. Formada pelas relações sociais e interacionais humanas. Assumida por determinada prática social, mediada por objetos e artefatos tecnológicos culturais ostensivos ou não ostensivos. Mobilizadas por sujeitos dessa relação, recorrem a conhecimentos produzidos e validados por uma instituição; definidos por crenças, percepções, concepções e valores socioculturais, e que por sua vez, no campo da educação matemática, sustentam a noção de práticas sociais com matemática escolares ou extraescolares.

Nesta complexidade, trouxemos elementos da didática da matemática cujos fundamentos excede significativamente a compreensão sobre o ensino escolar que usam a matemática. Pois, as práticas sociais com matemática penetram todos os usos da matemática, infiltra-se no infinito do espaço onde o saber prático se descortina como fazer essencial das experiências humanas.

Procuramos alargar uma discussão que subsidiasse uma consistência teórica das Praxeologias com matemática na compreensão do termo que engloba noções de Práticas socioculturais com matemáticas, práticas sociais com matemática ou simplesmente Práticas com Matemáticas.

Sendo, portanto, as práticas com matemática derivações do saber prático possivelmente presentes em todos os setores da sociedade: nas práticas do camelô, do vendedor de rua; do comerciante; do construtor de barco, do ribeirinho, dos quilombolas, dos assentados, dos atingidos por barragens, do pecuarista, do agricultor familiar etc. cujas práticas são direcionadas para atender suas necessidades socioculturais. Neste entender as práticas com matemáticas acolhem alguns requerimentos políticos, sociológicos, didáticos e pedagógicos do processo educativo da EC; quando esta exige que a construção do conhecimento matemático na formação do professor para o campo se dê numa relação interdisciplinar entre saberes matemáticos da academia e saberes matemáticos do cotidiano escolar e extraescolar.

Dentre as práticas desenvolvidas pela CEPE há uma prática com objetos matemáticos, cujo discurso justificativo se dá pela atividade da pesca; e como base para a validação dos aspectos políticos e pedagógicos da CEPE, organiza uma nova praxeologia. Tal praxeologia é da pedagogia da alternância adotada pela CEPE e não da matemática; que alimenta o discurso racional sobre as práticas da CEPE, assegurando o hábitus escolar pela realização das tarefas envolvendo situações de pesca e aquicultura.

Por fim, não podemos deixar de lembrar que usuários de objetos matemáticos nas escolas, nas ciências aplicadas, nas práticas socioculturais, nas práticas profissionais, em geral, inclusive dos educadores matemáticos, que há muito se queixam das dificuldades no ensino e na aprendizagem das práticas sociais com matemáticas, entre elas das dificuldades de docentes e discentes; em geral, admitem que apenas a racionalidade matemática não seria capaz de construir recortes do domínio de realidade, de dar conta das práticas desse contexto.

Isso implica dizer que a noção de prática com matemática poderia construir, a nosso entender, uma ponte para o diálogo entre os fenômenos socioculturais e acadêmicos, entre as áreas de conhecimentos gerando compreensões sobre a realidade das histórias de vida, e descortinamento da possibilidade de práticas interdisciplinares. Superando o território monodisciplinar do conhecimento, como geralmente se deseja no ensino de matemática escolar de espaços urbanos e ou do campo.

REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag. Fundamentos da didática da matemática. Curitiba-PR: Editora UFPR, 2007.

ARTAUD, Michelle. Introduction à L'aproche écologique du didactique, L'écologie des organisations mathématiques et didactiques. Actes de la neuvème École d'Éte de didactique dês mathématiques. Houlgate: Bailleul, 1998, p. 101-139.

ASSUNÇÃO, Carlos Alberto Gaia. Práticas com Matemáticas na Educação do Campo: o caso da Redução à Unidade na Casa Escola da Pesca/ Carlos Alberto Gaia Assunção. (Tese Doutorado) Universidade Federal do Pará-Belém-Pará, 2016.

BARQUERO, Beta; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Giusepe. "Las tres dimensiones del problema didácticode la modelización matemática de 2013.

BOTELHO, Manoel Henrique Campos. O livro sagrado da Matemática (Aritmética) brasileira: Aritmética Progressiva, de Antonio Trajano. Crônica, SãoPaulo, 2012. Documento da intenet. Acessado em Julho de 2015. Disponível em http://www.brasilengenharia.com/portal/images/stories/revistas/edicao611/611_croni ca.pdf.

BOURDIEU, Pierre. Questões de sociologia. Tradução de Jeni Vaitsman. Rio de Janeiro: Marco Zero, 1983.

BOURDIEU, Pierre. O Poder simbólico. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil. 1989.

BOURDIEU, Pierre et al. A miséria do mundo. 5. ed. Petrópolis: Vozes, 2003. 747p.

BOURDIEU, Pierre. Razões Práticas. Sobre a teoria da ação. Campinas-SP: Papirus, 2008.

BOURDON, M. Aritmética**.** (Traducida por Agustín Gómez Santa Maria.Tratadocompleto de matemáticas. Tomo I. Según la 21 edición francesa. 1ª edición: 1797). Madrid: Imprenta de D. J. M. Alonso,1848.

BRASIL. Diretrizes Operacionais para a Educação Básica nas Escolas doCampo — Resolução CNE/CEB 3/04/2002. Brasília, DF, 2002. Disponível em: http://pronacampo.mec.gov.br/images/pdf/mn_resolucao_%201_de_3_de_abril_de_ 2002.pdf. Acesso em: 10/10/2022.

BROOKS, Edward. The philosophy of arithmetic as developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison containing also a history of arithmetic. Lancaster, PA: Normal publishing company,1880.

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique. 1991.

CHEVALLARD, Yves. Fundamental concepts of didactics: perspectives given by an anthropological. Theory of Didactic Transposition. 1992.

CHEVALLARD, Yves. Analyse des pratiques enseignates et didactique des mathematiques: l'approche anthropologique, 1996. Disponível em: https://www.google.com/search?q=Analyse+des+pratiques+enseignates+et+didactique+des+mathematiques%3A&rlz=1C1GCEA_enBR1077BR1077&oq=Analyse+des+pratiques+enseignates+et+didactique+des+mathematiques%3A&gs_lcrp=EgZjaHJvbWUyBggAEEUYOdIBBzk5M2owajeoAgCwAgA&sourceid=chrome&ie=UTF-8 Acesso em 05/06/2022

CHEVALLARD, Yves. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol 19, nº 2, pp. 221-266, 1999.

CHEVALLARD, Yves. La TAD face au professeur de mathématiques.Toulouse, UMR ADEF. le 29 avril 2009.

CHEVALLARD, Yves. A Teoria Antropológica do Didático face ao professor de matemática. IN: A Teoria Antropológica do Didático: princípios e fundamentos. Almouloud; Farias; Henriques 1ª ed. (orgs). Curitiba, PR: CRV, 2018.

CHEVALLARD, Y. Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionnel, rapport officiel. Seminaire de Grenoble. IREM d'Aix-Marseille. 1989.

CHEVALLARD, Y. La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: 3ª ed. 2ª reip. (posfácio) Aique Grupo Editor, 2005.

DEL POTRO, Betsabé Caunedo; DE LA LLAVE, Ricardo Córdoba. Oficios urbanos y desarrollo de la ciência y de la técnica en la baja edad media: la corona de castilla. Revista de História, Norba, v. 17, 41-48, 2004.

GAIA, Carlos A.; GUERRA, R. Descortinando Práticas com Matemáticas: Conexões entre TAD e Etnomatemática 2014; In: MENDES, Iran e FARIAS, Carlos Ademir. Práticas socioculturais e Educação Matemática. Livraria da Física. São Paulo. 2014.

GÓMEZ, B. Los ritos en la enseñanza de la regla de três. En Alexander Maz, Manuel Torralbo y Luís Rico (Eds*.). José Mariano Vallejo, El Matemático Ilustrado. Una mirada desde la educación matemática*, pp. 47-69. Córdoba. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Córdoba, 2006.

HOYRUP, Mathieu**.** Mathematical Structures in Computer Science, Volume 17, Issue 02, April 2007, pp 247-259; Published online by Cambridge University Press 03. May, 2007

LACROIX, Silvestre. François.Tratado elemental de aritmética, copuesto em frances para uso de la escuela central de lãs cuatro naciones. Madrid e na imprenta nacional, 1839.

LEONT'EV, Alexis. O desenvolvimento do psiquismo. Lisboa, Horizonte Universitário, 1978.

MIGUEL, Antônio; VILELA, Denise Silva. Práticas escolares de mobilização de cultura matemática. Caderno Cedes, Campinas, SP, v. 28, n. 74, p. 97-120, jan-abr. 2008.

OLIVEIRA, Marcus Aldenisson de. Antônio Bandeira Trajano e o Método Intuitivo para o Ensino de Arithimética(1879-1954) Dissertação (Mestrado em Educação). – Universidade Tiradentes, Aracajú- SE, 2013.

RADFORD, Luis. Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia. Org. Bernadete Morey e Iran Abreu Mendes. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2011.

REGO, Teresa Cristina. Uma perspectiva histórico-cultural da educação. Petrópolis, RJ: Vozes, 1995.

ROCHA, Maria Isabel Antunes; MARTINS, Aracy Alves. Formar docentes para a Educação do Campo: desafio para os movimentos sociais e para a universidade. In: ROCHA, A. M. I.; MARTINS, A. A. (Org.). Educação do campo: desafios para a formação de professores. Belo Horizonte: Autêntica, 2009. p. 17-24.

VALLEJO, Josef Mariano. Tratado Elemental de Matemáticas. escrito de orden de S.M. para uso de los caballeros seminaristas del seminario de nobles de Madridy demás casas de educación del Reino. Cuarta edición corregida yconsiderablemente aumentada. Tomo I. Parte primera, que contiene la Aritmética y Álgebra. Madrid: ImpGarrayasaza, 1841.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. A construção do pensamento e da linguagem. São Paulo: Martins Fontes, 2001.

VYGOTSKY, Lev Semenovich. Algumas ideias sobre o desenvolvimento e o jogo infantil. Zilma de Moraes Ramos de Oliveira. Série Ideias n. 2, São Paulo: FDE, 1994.

WACQUANT, Loic. (Ed.) Pierre Bourdieu and democratic politics: the mystery of ministry. Cambridge, UK: Polity Press, 2005. Edição brasileira. O mistério do ministério. Pierre Bourdieu e a política democrática. Rio de Janeiro: Revan, 2005.

11- Possível caracterização para a Álgebra elementar escolar em confluência com a Teoria Antropológica do Didático

José Carlos de Souza Pereira
José Messildo Viana Nunes

Introdução

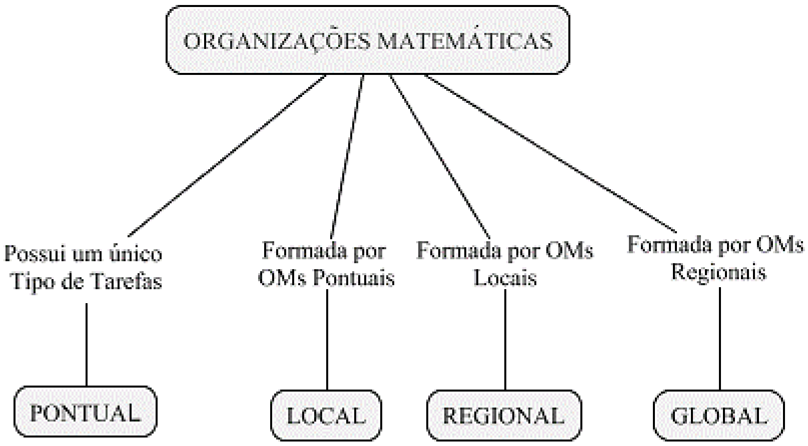
A caracterização da álgebra elementar clássica e escolar (Assude *et al.*, 2012) pode estar na perspectiva do modelo clássico aritmético ou de outro modelo capaz de tornar compreensível a evolução histórico-epistemológica de objetos matemáticos que constituem esse tipo de álgebra. Nesse sentido, faremos uma análise ecológica de várias obras, matemáticas ou não, dentre as quais estão Chevallard (1999) e Bosch e Chevallard (1999). O estudo dessas obras conduziu-nos para algumas conclusões sobre o que elas revelam ou discutem das possíveis características da Álgebra Escolar.

O estudo de obras é a base inicial para realizarmos pesquisas com uso da Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard, 1994, 1999, 2009a, 2009b, 2009c, 2009d; Pereira, 2017; Matos *et al.*, 2018; Pereira; Nunes, 2020). Na configuração do que pretendemos, neste capítulo, vamos adotar o sistema didático $\boldsymbol{S}(\mathrm{Y}, O, Q_{\mathrm{Y}})$. Nesse sistema didático, Y = pesquisadores, O = obras (artigos, livros) e Q_{Y} a questão que levou ao estudo dessas obras. A questão Q_{Y} está assim anunciada: quais características das organizações praxeológicas da álgebra elementar escolar identificamos em obras de diferentes épocas?

Em Chevallard (1999), temos a configuração elementar das Organizações Praxeológicas (OP). A descrição praxeológica dessas OP está alicerçada no bloco do saber-fazer (ou da práxis) e no bloco do saber (ou do logos). O bloco da práxis é composto, no mínimo, por tipo de tarefas e por uma técnica, denotado por $[T / \tau]$ – essa é a característica de uma Organização Praxeológica Pontual (OPP). Para sedimentar o bloco da práxis, é necessário o bloco do saber, composto pela tecnologia que justifica a funcionalidade da técnica e pela teoria que justifica o discurso racional da tecnologia. Denota-se esse bloco por [θ / Θ].

As obras citadas, neste capítulo, apontam diferentes contextos para o ensino da Aritmética e da Álgebra. Nossa intenção, com isso, é ver como se propunha o ensino da álgebra nessas obras e de que forma as Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD) (Chevallard, 1999; Matheron, 2000) eram propostas pelos autores que as produziam. A Figura 1, adaptada de Matheron (2000), resume as ideias dos tipos de Organizações Matemáticas.

Figura 1 – Tipos de Organizações Matemáticas



Fonte: Elaboração dos autores, a partir de Matheron (2000).

Matheron (2000) exemplifica uma Organização Matemática Pontual (OMP), por meio do tipo de tarefas T: **calcular a quarta proporcional de três números a, b, e c tal que** $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Esse tipo de tarefas está associado ao Teorema de Tales, comumente ensinado no nono ano do Ensino Fundamental brasileiro. Da reunião de várias OMP, surgem as Organizações Matemáticas Locais (OML).

As OMLs estão ao nível de tipos de tarefas T_i e do trabalho dos tipos de técnicas τ_i. Nesse nível de OM, o trabalho da técnica é fundamental, porque podem surgir tarefas complexas $t_i \in T_i$, que as técnicas τ_i não deem conta de solucionar (Chevallard, 1999). Esse aumento da complexidade das tarefas pode possibilitar que o bloco praxeológico atinja o nível tecnológico, ou seja, $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$, no qual o elemento teórico produz enunciados tecnológicos θ_j (Matheron, 2000), chegando ao nível das Organizações Matemáticas Regionais (OMR). Por conseguinte, as Organizações Matemáticas Globais (OMG) são decorrentes do agrupamento das OMR. As OMG atingem o nível mais alto de complexidade praxeológica, as demonstrações matemáticas são inevitáveis e os diferentes elementos teóricos precisam ser evocados. O bloco praxeológico de uma OMG é denotado por [T_{ijk}/τ_{ijk}/θ_{jk}/Θ_k] (Matheron, 2000). Esse tipo de OMG é exemplificada pela obra de Hilbert, "*Les fondements de la géométrie*" [Os fundamentos da geometria] (Matheron, 2000, p. 69). O nível axiomático e teórico dessa obra é complexo e revisa as ideias da geometria euclidiana. As OMP, OML, OMR e OMG podem compor as obras que constituem diferentes épocas do estudo e ensino de Matemática.

11.1 Ostensivos e não ostensivos em práticas da atividade matemática com álgebra escolar

Antes de exemplificarmos a funcionalidade dos ostensivos e não ostensivos, no modelo da Álgebra Escolar, caracterizaremos tais objetos conforme as compreensões de Chevallard (1994) e Bosch e Chevallard (1999). Essa caracterização decorre de algumas noções básicas:

> a) Qualquer ***atividade*** humana decompõe-se em certo número de ***tarefas***.
> b) Concretamente, uma tarefa de um ***tipo*** específico (abrir a porta, escovar os dentes, resolver uma equação do segundo grau, elaborar um axioma da geometria plana, dar uma lição de ortografia, etc.) apresenta-se como rotineira para o sujeito que deve executá-la com aplicação de uma determinada ***técnica***.
> c) Para ser viável, uma técnica deve ser ***compreensível e justificável***. Essa dupla função é justificada por um discurso específico, a ***tecnologia*** da técnica.
> d) Por sua vez, a tecnologia de uma determinada técnica deve aparecer como compreensível e justificável, que é denomina ***teoria*** ou tecnologia da tecnologia. (Chevallard, 1994, p. 1, tradução e grifos nosso).

As palavras em destaque na citação constituem ideias associadas à atividade matemática e são noções da TAD, principalmente, tarefas de determinado tipo, técnica, tecnologia e teoria. Em relação a isso, Chevallard (1994, p. 1, tradução nossa) explica que "a hierarquia técnica-tecnologia-teoria é relativa ao tipo de tarefas considerado. Assim, a elaboração de uma tecnologia (ou de uma teoria) pressupõe uma técnica [...]". Para ilustrar essa hierarquia, Chevallard recorre à tarefa do Quadro 1.

Quadro 1 – Exemplificação da hierarquia técnica-tecnologia-teoria

a) Em uma classe de Matemática, a tarefa consiste em demonstrar a igualdade $S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$, que pode ser realizada com ajuda da *técnica* conhecida sob o nome de "indução matemática": Tornamos S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n. Tem-se S_1 = 1 e, portanto, $S_1 = \frac{1(1+1)}{2}$. Supomos então que $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$ e mostramos que $S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Tem-se $S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2}+\frac{2}{2}) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Na sequência, $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ para todo $n \geq 1$.

b) Uma *tecnologia* clássica desta técnica é fornecida pela seguinte afirmação:
Seja $S \subseteq \mathbb{N}$. Se $0 \in S$ e, tem-se: $n \in S \Rightarrow n + 1 \in S$, então $S = \mathbb{N}$.
c) A justificativa para esta afirmação, ou seja, a *teoria* da técnica considerada pode consistir em uma axiomática de $\mathbb{N}$, incluindo a afirmação anunciada como *título de axioma* (conforme fora a escolha de G. Peano) *acrescida* de considerações sobre "a evidência" dessa afirmação (semelhantes às desenvolvidas, posteriormente, por H. Poincaré, em seu livro *A Ciência e a Hipótese*).
d) Porém, a teoria pode também consistir em *demonstrar* a afirmação tecnológica indicada, a partir do seguinte enunciado *teórico*:
$\mathbb{N}$ é bem ordenado, ou seja, qualquer parte não vazia de $\mathbb{N}$ possui um menor elemento.

Fonte: Chevallard (1994, p. 1-2, tradução nossa).

A tarefa do Quadro 1 movimenta objetos ostensivos e não ostensivos próprios da atividade matemática. Sem esses objetos, a solução da tarefa pela técnica da "indução matemática" não seria externalizada. Para melhor entendimento desses tipos de objetos, expomos no Quadro 2, as compreensões de Chevallard (1994).

Quadro 2 – Objetos ostensivos e não ostensivos

A observação da atividade humana leva a responder, estabelecendo uma distinção fundamental entre dois tipos de objetos: os objetos *ostensivos*, de um lado, os *não ostensivos*, de outro lado.
a) Denominam-se *ostensivos* os objetos que têm para nós uma forma *material*, *sensível*, qualquer que seja. Um objeto material (uma caneta, um compasso etc.) é um ostensivo. Da mesma forma
- os gestos: chamaremos de ostensivos *gestuais*;
- as palavras, geralmente, do discurso: falamos aqui de ostensivos *discursivos* (ou da linguagem);
- os esquemas, desenhos, grafismos: fala-se, neste caso, de ostensivos *gráficos*;
- as escritas e formalismos: falamos então de ostensivos *escriturais.*

A característica dos ostensivos é de poderem ser *manipulados*. Essa palavra deve ser entendida em um sentido amplo: manipulação no sentido estrito (a do compasso, ou da caneta), mas também pela voz, o olhar etc.
b) Ao contrário dos ostensivos, os *não ostensivos* – o que é usualmente chamado de *noção, conceito*, *ideia,* etc. – não podem, estritamente falando, ser manipulados: eles somente podem ser evocados, por meio dos ostensivos associados. Assim, ao dizermos que, para resolver a equação $2^x = 10$ "toma-se o logaritmo dos dois membros", é conveniente que o *não ostensivo*, conceito de logaritmo exista, mas não podemos dizer que o *ostensivo* (da linguagem) *logaritmo* está disponível. Para realizarmos a ação correspondente, será necessário dispormos de ostensivos *escriturais* adequados, que permitirão, por exemplo, escrever:

$$2^x = 10 \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 10 \Leftrightarrow x \ln 2 = \ln 10 \Leftrightarrow x = \frac{\ln 10}{\ln 2}.$$

A técnica de resolução das equações da forma $a^x = b$ exposta nesta obra supõe assim, ao lado de certo número de não ostensivos (conceito de logaritmo), *um sistema de ostensivos articulados a estes não ostensivos*.

Fonte: Chevallard (1994, p. 4-5, tradução nossa).

O avanço das ideias dos ostensivos e não ostensivos está na dialética (Quadros 1 e 2) existente entre eles na atividade matemática (Bosch; Chevallard, 1999). Isso está configurado na citação, a seguir:

> Qualquer atividade humana pode ser descrita, aparentemente, como uma manipulação de objetos ostensivos. Mas a análise mais superficial revela que o operador humano só pode realizá-la (e, eventualmente, só sabe com explicá-la) evocando ou invocando, o auxílio de objetos ostensivos apropriados, objetos *não ostensivos* que não necessariamente parecem ser específicos da atividade. Escrever 2 + 3 = 5 pode ser visto como uma simples manipulação de objetos ostensivos, mas não se efetuará, intencionalmente, sem a intervenção de alguns objetos *não ostensivos* específicos, como a noção de

adição (ou, se há apenas cópia de um "padrão" de escrita, noção de "reprodução" ou de "recopiage"). Porém, geralmente, partimos do princípio de que, *em qualquer atividade humana, há a coativação de objetos ostensivos e não ostensivos* (Bosch; Chevallard, 1999, p. 11, tradução nossa).

A dialética dos ostensivos e não ostensivos, na atividade matemática, remete à abordagem antropológica da parte prática, ou seja, aplicação de uma técnica para solucionar uma determinada tarefa. Em relação a isso, Bosch e Chevallard (1999, p. 11, tradução nossa) esclarecem que "retornando as noções fundamentais da abordagem antropológica, diremos que a aplicação de uma técnica se traduz pela *manipulação de ostensivos regulada pelos não ostensivos* [...]". Essa abordagem antropológica dos objetos ostensivos e não ostensivos está nas práticas sociais com Álgebra Escolar. Além disso, essa mesma abordagem fundamenta o modelo da Álgebra Escolar como aritmética generalizada (Catalán, 2003; Pereira, 2012).

Na próxima seção, mostramos como os objetos ostensivos e não ostensivos fizeram ou fazem parte de algumas práticas sociais com Álgebra Escolar.

11.2 Os ostensivos e não ostensivos em práticas sociais com álgebra escolar

Iniciamos esta seção, citando uma noção não ostensiva, descrita como **teorema** no livro de Simon Stevin (*Les Oeuvres mathematiques* de Simon Stevin), publicado em 1634. Esse livro foi revisado, corrigido e comentado por Albert Girard: "mais multiplicado por mais, dá produto mais, e menos multiplicado por menos, dá produto mais, e mais multiplicado por menos, ou menos multiplicado por mais, dá produto menos" (Stevin, 1634, p. 39, tradução nossa). Atualmente, o teorema anunciado por Stevin funciona em forma de regra prática do "jogo" de sinais no ensino da Álgebra Escolar. Essa regra prática é explicada por Stevin, por meio de vários objetos ostensivos, conforme consta no Quadro 3.

Quadro 3 – Explicação de Simon Stevin para o "jogo" de sinais

Seja 8 – 5 multiplicado por 9 – 7, no que segue; –7 vezes –5 resulta +35 (+35, porque, como diz o teorema, – por –, produz +). Em seguida, –7 vezes 8 resulta –56 (porque, como diz o teorema, – por +, produz –). Similarmente, seja 8 – 5, multiplicado pelo 9, obtermos o produto 72 – 45; em seguida, adicionamos +72 +35, resultando 107. Similarmente, adicionamos –56 –45, resultando –101; e subtraímos 101 de 107 que resta 6, para o produto da multiplicação. Da qual a disposição dos caracteres da operação é a seguinte:

$$\begin{array}{r} 8-5 \\ \underline{9-7} \\ -56\ +35 \\ \underline{72\ -45} \\ 6 \end{array}$$

Fonte: Stevin (1634, p. 39, tradução nossa).

A regra do “jogo” de sinais constitui uma prática social institucionalizada no ensino da Matemática. Essa regra possui objetos não ostensivos que, mesmo materializados pelos sinais + e – (ostensivos), continuam sem ostensividade completa. A compreensão de algumas dessas noções só ocorre no campo algébrico mais avançado: Teoria de Grupos e Anéis. Na Álgebra Escolar, a regra do “jogo” de sinal, assume caráter prático ostensivo pela manipulação dos sinais + e –, ou seja, **(+) + (+) = +; (–) + (–) = –; (+) + (–) = ± ou (–) + (+) = ∓; (+) · (+) = (–) · (–) = +; (+) · (–) = (–) · (+) = –; (+) ÷ (+) = (–) ÷ (–) = + e (+) ÷ (–) = (–) ÷ (+) = –.**

O predomínio cultural do modelo aritmético, na prática com Álgebra Escolar, constitui o discurso do livro de Euler (1795), intitulado *Élémens d’algèbre* [Elementos de Álgebra]. Nesse livro, Euler (1795, p. 5) anuncia que a Aritmética “[...] é a ciência dos números [...]”. Para externalizar ostensivamente essa ideia, em conexão com a Álgebra Escolar, Euler escreve: “[...] f + m + b + x, significa a soma dos números indicados por essas quatro letras” (Euler, 1795, p. 7, tradução nossa). Implícita na soma de Euler está o não ostensivo, noção de soma aritmética e algébrica.

A manipulação ostensiva dos sinais + e – recebe grande atenção de Euler, porque, para ele, “[...] na Álgebra, as quantidades consideradas simples são os números com os sinais que os precedem ou que os *afetam* [...]” (p. 10-11, tradução nossa). Notemos que há objetos não ostensivos implícitos, nas palavras de Euller, que os amplia para a noção de números inteiros positivos e negativos, de tal modo que os números positivos são afetados pelo sinal + e os negativos pelo sinal –, ostensivamente, temos: {..., –2, –1, 0, +1, +2, ...}. A ostensividade dos números inteiros positivos e negativos ampliou a manipulação algébrica, originando práticas numérico-algébricas culturalmente mantidas até os dias de hoje, no ensino da Álgebra Escolar. Por exemplo, a + a = 2· a; a + a + a = 3· a; a + a + a +a = 4· a; 2 · 3a = 6a; 3 · 4b = 12b; 5 · 7x = 35x; +a vezes +b = +ab; –a vezes 3 = –a vezes +3 = –3a; –a vezes –b = +ab (Euler, 1795).

Uma prática numérico-algébrica que hoje vive implícita no ensino da progressão aritmética são as “proporções aritméticas” (Euler, 1795): “quando duas relações aritméticas são iguais, está igualdade se chama uma *proporção aritmética*” (p. 314, tradução nossa). Essa não ostensividade anunciada por Euler é evidenciada na citação, a seguir:

> [...] quando $a – b = d$ e $p – q = d$, de tal maneira que a diferença é a mesma entre os números p e q, assim como, entre os números a e b, diz-se que esses quatro números formam uma proporção aritmética; escreve-se pôr $a – b = p –$

> q, indicando claramente que a diferença entre a e b é igual à diferença entre p e q.
> Uma proporção aritmética se constitui de quatro termos, que devem ser tais, que se subtrai o segundo pelo primeiro, o valor encontrado é o mesmo quando se subtrai o quarto pelo terceiro. Assim, os quatros números 12, 7, 9, 4 formam uma proporção aritmética, por que 12 – 7 = 9 – 4 (Euler, 1795, p. 314-315, tradução nossa).

Talvez o leitor se questione sobre o exemplo de Euler na citação em que ele subtrai o primeiro termo pelo segundo e o terceiro pelo quarto, mas, observa-se que: 7 – 12 = 4 – 9 = – 5 e 12 – 9 = 7 – 4 = 3. Euler (1795) mostra que a partir do princípio aditivo aplicado em a – b = p – q, chega-se a igualdade de a – p = b – q.

As proporções aritméticas contínuas, ou seja, com maior quantidade sequencial de termos, constituem as progressões aritméticas crescentes (4, 7, 10, 13, 16, ...) ou decrescentes (19, 15, 11, 7, 3, ...) (Euler, 1795). Esses tipos de progressões aritméticas possuem práticas com Álgebra Escolar, nas quais os objetos não ostensivos (noção de aditividade positiva e negativa, posição sequencial dos termos da proporção aritmética, identificação de uma progressão aritmética crescente ou decrescente etc.) são evocados ostensivamente em práticas aritméticas e algébricas, reconhecidas e legitimadas nas diversas instituições sociais de ensino básico, principalmente, nas de ensino médio. Uma dessas práticas pode ser visualizada, no Quadro 4, extraída de livro didático de matemática do Ensino Médio.

Quadro 4 – Prática com Álgebra Escolar e progressão aritmética

Três números estão em PA; o produto deles é 66 e a soma é 18. Calcule os três números.

Resolução:

Podemos sempre representar três números em PA por $x - r, x, x + r$, em que r é a razão.

Assim, temos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} (x-r)\cdot x \cdot (x+r) = 66 \\ (x-r) + x + (x+r) = 18 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\,(x^2 - r^2) = 66 \\ 3x = 18 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$3x = 18 \Rightarrow x = 6$

$6(6^2 - r^2) = 66 \Rightarrow 36 - r^2 = 66/6 \Rightarrow 36 - r^2 = 11 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = \pm 5$

Então, para $x = 6$ e $r = 5$, temos:

- $x - r = 6 - 5 = 1$
- $x + r = 6 + 5 = 11$

Para $x = 6$ e $r = -5$

- $x - r = 6 - (-5) = 6 + 5 = 11$
- $x + r = 6 - 5 = 1$

Verificação: $1 \cdot 6 \cdot 11 = 66$ e $1 + 6 + 11 = 18$

Portanto, os números procurados são 1, 6 e 11, que estabelecem duas PA: (1, 6, 11) e (11, 6, 1).

Fonte: Dante (2013, p. 214).

A manipulação ostensiva do Quadro 4 possui objetos não ostensivos que auxiliam a resolução da tarefa proposta. Eis alguns: 1) representação algébrica de três números em PA; 2) uso de letras para diferenciar os termos da PA e a razão; 3) noção de modelização de sistemas de equações; 4) noção de produto e soma de polinômios; 5) Identificação e cálculo de produtos notáveis; 6) noção e resolução de equação do primeiro grau com uma incógnita; 7) princípio aditivo e multiplicativo; 8) noção de potenciação e cálculo de raiz quadrada.

Outra prática explicada por Euler (1795) relaciona as proporções geométricas: "duas relações geométricas são iguais quando suas razões são iguais. Essa igualdade de duas relações se denominada *proporção geométrica*; escreve-se, por exemplo, $a : b = c : d$ ou $a : b :: c : d$, para indicar que a relação $a : b$ é igual a relação $c : b$ [...]" (p. 359-360, tradução nossa) ou "[...] *a* está para *b* assim como *c* está para *d* [...] (p. 360, tradução nossa). A não ostensividade dessa ideia é assim descrita por Euler:

> Uma proporção geométrica consiste então de quatro termos, tais que o primeiro dividido pelo segundo, resulta o mesmo quociente que o terceiro dividido pelo quarto. Deduz-se disso uma propriedade importante, comum a todas as proporções geométricas, que o produto do primeiro pelo quarto termo é sempre igual ao produto do segundo pelo terceiro; ou simplesmente, que o produto dos extremos é igual ao produto dos meios (Euler, 1795, p. 370-371, tradução nossa).

Para Euler (1795, p. 403, tradução nossa), "uma sequência de números que se torna sempre um mesmo número de vezes maior ou menor, denomina-se progressão geométrica, porque cada termo está para o seguinte na mesma relação geométrica [...]". Essa noção não ostensiva, anunciada por Euler, pode ser constatada a seguir:

> [...] o número que indica quantas vezes cada termo é maior que o anterior, chama-se *expoente*. Assim, quando o primeiro termo é 1 e o expoente é igual a 2, a progressão geométrica é a seguinte:
> *Termos* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 etc.
> *Progr. 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256* etc.
> os números 1, 2, 3 etc., sempre indicam a quantidade de termos da progressão. Se supormos, em geral, que o primeiro termo é *a* e o expoente é *b*, tem-se a seguinte progressão geométrica:
> $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ \ldots,\ n$
> *Progr.* $a, ab, ab^2, ab^3, ab^4, ab^5, ab^6, ab^7, \ldots, ab^{n-1}$.
> Assim, quando essa progressão é de *n* termos, o último termo é ab^{n-1}
> (Euler, 1795, p. 403-404, tradução nossa).

A ostensividade atual da palavra "expoente" do francês *exposant* traduz-se por "razão" da progressão geométrica, mas a interpretação de Euler pode ser compreendida, também, como a ostensividade de "potência", ou seja, o resultado da potenciação, conforme a seguir: $1 \cdot 2^0, 1 \cdot 2^1, 1 \cdot 2^2, 1 \cdot 2^3, 1 \cdot 2^4, 1 \cdot 2^5, 1 \cdot 2^6, 1 \cdot 2^7, 1 \cdot 2^8, \ldots, 1 \cdot 2^{n-1}$

$= 1 \cdot (2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, ..., 2^{n-1}) = 1 \cdot (1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^{n-1}) = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, ..., 2^{n-1}$. Essa prática numérico-algébrica está associada às proporções geométricas, por exemplo, os termos 1, 2, 4 e 8, estabelecem que 1 : 2 :: 4 : 8 ou $1 \cdot 8 = 2 \cdot 4$ ou 1/2 = 4/8. Outra prática que Euler (1795) destaca é a soma de todos os termos de uma progressão geométrica de *n* termos (Quadro 5).

Quadro 5 – Prática de Euler para soma de todos os termos de uma progressão geométrica

Uma das principais questões que se pretende nesta matéria é encontrar a soma de todos os termos de uma progressão geométrica; vamos então explicar o método. Seja dada a seguinte progressão, composta de dez termos: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, indicaremos a soma por $\int$, de tal modo que: $\int = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$, tomaremos o dobro dos dois lados, $2\int = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + 128 + 256 + 512 + 1024$. Retirando-se dessa progressão a progressão indicada por $\int$, resta $\int = 1024 - 1 = 1023$, portanto, a soma procurada é igual a 1023. Supomos, imediatamente, que na mesma progressão o número de termos seja indeterminado e igual *n*, de forma que a soma em questão, ou $\int$, seja $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{n-1}$. Multiplicando-se por 2, tem-se $2\int = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^n$, subtraindo-se dessa igualdade a anterior, tem-se $2^n - 1$. Vê-se então que a soma procurada se encontra, multiplicando o último termo, 2^{n-1}, pelo expoente 2, a fim de se obter 2^n e subtrai-se desse produto a unidade. Supomos agora, de forma geral, que o primeiro termo é *a*, o expoente igual a *b*, o número de termos igual a *n* e sua soma igual a $\int$, de modo que $\int = a + ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ... + ab^{n-1}$. Se multiplicarmos por *b*, teremos $b\int = ab + ab^2 + ab^3 + ab^4 + ab^5 + ... + ab^n$, subtraindo pela igualdade anterior resta $(b - 1) \int = ab^n - a$, de onde tiramos, facilmente, a soma procurada $\int = \dfrac{ab^n - a}{b-1}$. Consequentemente, encontra-se a soma de uma progressão geométrica qualquer, multiplicando o último termo pelo expoente da progressão, que se subtrai do produto o primeiro termo e, divide-se o resto pelo expoente diminuído da unidade.

Fonte: Euler (1795, p. 405-407; p. 410-411, tradução nossa).

A prática ostensiva referente à soma $\int = \dfrac{ab^n - a}{b-1}$, atualmente, está na expressão algébrica $S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q-1}, q \neq 1$ (a_1 é o primeiro termo, *n* o número de termos e *q* a razão da progressão geométrica). Vamos aplicar a fórmula de Euler para solucionar a seguinte tarefa: "calcular a soma dos termos da PG finita (5, 20, ..., 1280) (Dante, 2013, p. 225). Antes de aplicarmos a fórmula, precisamos escrever a progressão desta forma: $(5, 5 \cdot 4, ..., 5 \cdot 4^4)$. Assim,

$$\int = \frac{ab^n - a}{b-1} = \frac{5 \cdot 4^4 - 5}{4-1} = \frac{1280 - 5}{3} = \frac{1275}{3} = 425.$$

A prática com a fórmula de Euler (1795) presume, necessariamente, a dialética entre objetos ostensivos e não ostensivos (noção de potenciação e decomposição de números compostos pela razão da PG). Adaptando a fórmula de Euler a nossa prática atual, ela poderia ser expressa por $\int = \dfrac{a_k - a_1}{q-1}$ (a_1 é o primeiro termo, a_k último termo e q a razão da progressão geométrica). Notemos que a manipulação ostensiva aritmética comanda as ideias de Euler e tornou, didaticamente, mais econômica a resolução da tarefa proposta.

Destacamos da obra de Euler que as progressões, aritmética (PA) e geométrica (PG), possuem práticas sociais relativas ao cálculo de juros. A PA está no cálculo de juros simples e a PG no cálculo de juros compostos. Segundo Euler (1795), o progresso inicial sobre a teoria do cálculo de juros é de autoria de Leibniz, publicada em 1683, nas *Actas Eruditorum*. O próprio Euler declara que se deve dar maior atenção para o cálculo de juros compostos, porque possui um cálculo de juros sobre juros e gera maior montante continuamente.

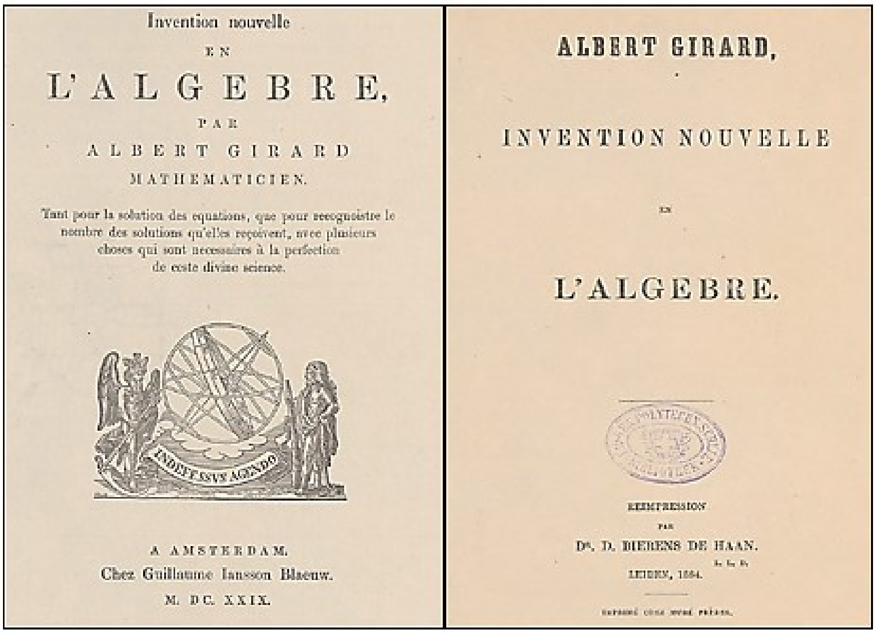
Prosseguiremos, na próxima seção, com mais caracterização da álgebra elementar escolar, na perspectiva de análise ecológica de organizações matemáticas (OM), afinada com a abordagem da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

11.3 Organizações praxeológicas da álgebra elementar escolar em alguns livros de matemática de diferentes épocas

As obras citadas, nesta seção, apontam diferentes características da Aritmética e da Álgebra. Nossa intenção com isso é ver como se propunha o ensino da álgebra nessas obras e de que forma as Organizações Matemáticas (OM) e as possíveis Organizações Didáticas (OD) (CHEVALLARD, 1999; MATHERON, 2000) eram propostas pelos autores que as produziam.

A primeira obra é "*Invention nouvelle en l'algèbre*" [Nova invenção em álgebra] de Albert Girard. Essa obra data de 1629 e foi reimpressa em 1884 (Figura 1) e possui algumas particularidades interessantes em relação aos objetos da matemática escolar. Uma dessas é em relação as quatro operações aritméticas fundamentais, as quais são denominadas de conjugações comuns simples (adição e subtração) e compostas (multiplicação e divisão) (Girard, 1629, 1884).

Figura 1 – Contracapa do livro de Albert Girard (1629, 1884)


Invention nouvelle
EN
L'ALGEBRE,
PAR
ALBERT GIRARD
MATHEMATICIEN.
Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent, avec plusieurs choses qui sont necessaires à la perfection de ceste divine science.

A AMSTERDAM.
Chez Guillaume Iansson Blaeuw.
M. DC. XXIX.

ALBERT GIRARD,
INVENTION NOUVELLE
EN
L'ALGEBRE.
REIMPRESSION
PAR
Dr. D. BIERENS DE HAAN.
LEIDEN, 1884.

Fonte: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4803

No capítulo "As características das potências e raízes", Girard (1629, 1884) inspira-se nas quatro conjugações comuns para propor as conjugações com os sinais de + e – (operações algébricas). Essas conjugações de sinais estão, atualmente, na adição, subtração, multiplicação e divisão de números inteiros. As Figuras 2, 3 e 4 ilustram a conjugação da adição, subtração e multiplicação com sinais + e –.

Figura 2 – Conjugação aditiva com sinais + e –

3	+ 11	+ 28	— 13	— 5	— 6	+ 3	+ 5
— 5	— 4	— 40	+ 19	+ 17	— 7	+ 8	— 5
— 2	+ 7	— 12	+ 6	+ 12	— 13	+ 11	

Fonte: Girard (1629, 1884, s. n. p.).

Figura 3 – Conjugação da subtração com sinais + e –

l'exacteur.	7	+ 31	— 17	+ 4	— 8	— 5	+ 1	— 10	+ 9
	7	+ 10	— 6	+ 9	— 12	+ 7	— 6	+ 3	— 7

7	+ 31	— 17	+ 4	— 8	— 5	+ 1	— 10	+ 9
— 7	— 10	+ 6	— 9	+ 12	— 7	+ 6	— 3	+ 7
	+ 21	— 11	— 5	+ 4	— 12	+ 7	— 13	+ 16

Fonte: Girard (1629, 1884, s. n. p.).

Figura 4– Conjugação multiplicativa com sinais + e –

	5 + 3 — 9 + 12 + 5 — 17 — 30
	4 — 3
	— 15 — 9 + 27 — 36 — 15 + 51 + 90
	20 + 12 — 36 + 48 + 20 — 68 — 120
produit.	20 — 3 — 45 + 75 — 16 — 83 — 69 + 90

Fonte: Girard (1629, 1884, s. n. p.).

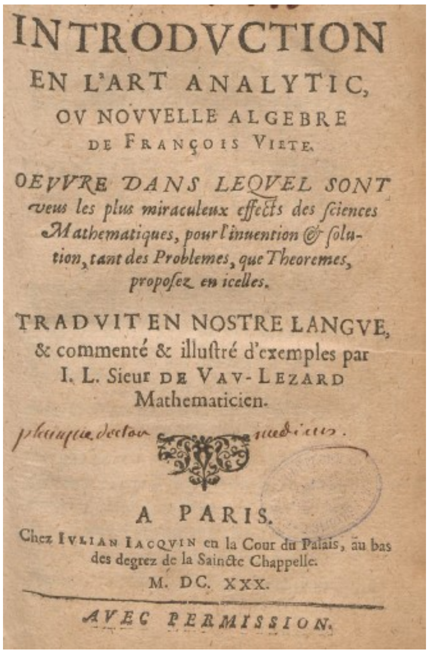
Podemos observar que a prática manipulativa das conjugações com sinais + e –, das Figuras 2, 3 e 4 é próxima das manipulações operatórias com polinômios. Porém, prevalece a ideia aritmética aplicada à manipulação ostensiva das operações com números inteiros. Girard dá ênfase a essas três conjugações e apenas indica que a divisão (quarta conjugação) surge por consequência da multiplicação com sinais + e –. Isso fica evidente quando ele cita que 20 –3 –45 +75 –16 –83 –69 + 90 dividido por 5 +3 –9 +12 +5 –17 – 30 deve resultar 4 – 3. Essa proposição praxeológica de Girard está associada à noção não ostensiva de divisão polinomial. Materializa-se isso pelos polinômios $20x^7 - 3x^6 - 45x^5 + 75x^4 - 16x^3 - 83x^2 - 69x + 90$, $5x^6 + 3x^5 - 9x^4 + 12x^3 + 5x^2 - 17x - 30$ e $4x - 3$.

Uma modelização interessante da Organização Matemática (OM) de Girard (1629, 1884) é o que ele denomina de “construção algébrica sobre questões”. Nessas construções, ele modela a noção de expressão algébrica polinomial, sem uso de letras, como incógnita ou variável: 4 (1) + 2 e 8 (2) – 4 (1) + 2. Essa modelização está na Álgebra Escolar, sob a forma de representação polinomial: $4x + 2$, $8x^2 - 4x + 2$ e $32x^3 + 4$. A multiplicação entre essas duas construções algébricas resulta 32 (3) + 4. A multiplicação citada por Girard se configura ostensivamente assim: $(4(1) + 2) \times (8(2) - 4(1) + 2) = 32(2 + 1) - 16(1 + 1) + 8(1) + 16(2) - 8(1) + 4 = 32(3) - 16(2) + 8(1) + 16(2) - 8(1) + 4 = 32(3) + 4$. Em forma de polinômio, temos o resultado $32x^3 + 4$.

Os fragmentos que extraímos da OM da obra de Girard (1629, 1884) revelam o atrelamento das noções algébricas ao numérico e a ostensividade dessas noções está em dialética com a teoria aritmética, assim como as técnicas que o autor descreve movimentam, essencialmente, o tratamento numérico.

A segunda obra pertence a François Viète (1630), denominada de “*Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre*” [Introdução na arte analítica, ou nova álgebra]. Nessa obra de Viète (1630) (Figura 5), existem várias noções matemáticas não ostensivas que identificamos em vários objetos da álgebra elementar escolar. Entretanto, as compreensões de Viète são concebidas a partir das ideias de Euclides (Os elementos), por exemplo, no Capítulo III (p. 25, tradução nossa): ele anuncia que "a primeira das grandezas[81] escalares é o lado ou raiz". A partir dessa primeira grandeza escalar, ele anuncia outras, simbolizando-as pelo Q (quadrado) e C (cubo): Q Q (quadrado multiplicado por um quadrado), Q C (quadrado multiplicado por um cubo), C C (cubo multiplicado por um cubo), Q Q C (quadrado ao quadrado multiplicado por um cubo), Q C C (quadrado multiplicado por um cubo e o produto deste por um cubo) e C C C (cubo multiplicado por cubo por cubo ou cubo de um cubo) (Ibidem, p. 25).

Figura 5 – Contracapa do livro de Viète de 1630


INTRODVCTION
EN L'ART ANALYTIC,
OV NOVVELLE ALGEBRE
DE FRANÇOIS VIETE.
OEVVRE DANS LEQVEL SONT
veus les plus miraculeux effects des sciences
Mathematiques, pour l'inuention & solution, tant des Problemes, que Theoremes, proposez en icelles.
TRADVIT EN NOSTRE LANGVE,
& commenté & illustré d'exemples par
I. L. Sieur DE VAV-LEZARD
Mathematicien.
A PARIS,
Chez IVLIAN IACQVIN en la Cour du Palais, au bas des degrez de la Saincte Chappelle.
M. DC. XXX.
AVEC PERMISSION.

Fonte: http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4788

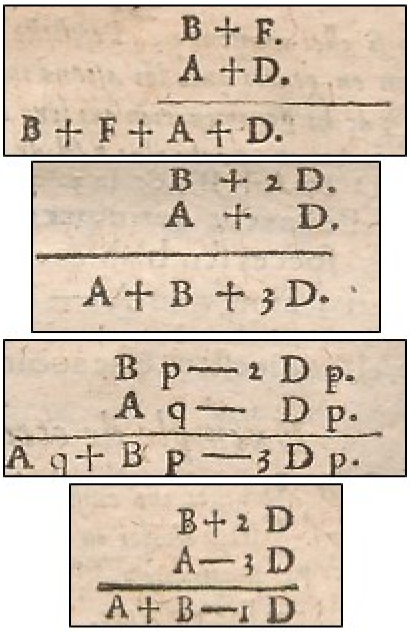
A representação das grandezas escalares, na OM de Viète, possui duas propriedades da potência de mesma base: produto e potência de potência. Confirmamos isso, na própria explicação de Viète (1630, p. 27), quando ele estabelece que **Q C C C C C** corresponde a 17 quantidades (soma dos expoentes: 2 + 3 + 3 +3 + 3 +3). Algebricamente, temos **Q** = x^2, **C** = x^3, **Q Q** = $x^2 \cdot x^2 = (x^2)^2 = x^4$, **Q C** = $x^2 \cdot x^3 = x^3 \cdot x^2 = x^5$, **C C** = $x^3 \cdot x^3 = (x^3)^2 = x^6$, **Q Q C** = $(x^2)^2 \cdot x^3 = x^7$, **Q C C** = $(x^2 \cdot x^3) \cdot x^3 = x^8$ e **C C C** = $x^3 \cdot x^3 \cdot x^3 = (x^3)^3 = x^9$.

Fica claro para nós que a álgebra de Viète está em dialética com a geometria. Isso é passível de conclusão quando ele escreve: "os tipos de grandezas comparativas de ordem e utilização das escalares são, P (plano), S (sólido), P P (plano-plano), P S (plano-

[81] N. T. A tradução da palavra *Grandeur* remete ao significado de grandeza, tamanho, quantidade, etc.

sólido), S S (sólido-sólido), P P S (plano-plano-sólido), P S S (plano-sólido-sólido) e S S S (sólido-sólido-sólido)” (Viète, 1630, p. 29, tradução nossa). O desdobramento dessa compreensão leva Viète a descrever outras. Uma delas trata dos “preceitos da lógica específica” (p. 32). É nessa lógica específica que surge a proposição do uso das letras do alfabeto. Isso é comprovado nos exemplos exibidos na Figura 6.

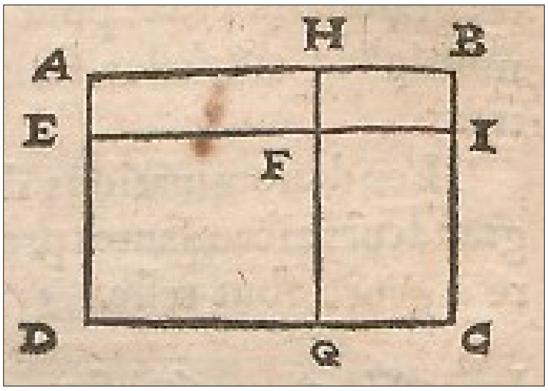
Figura 6 – Exemplos de quatro tipos de adições entre grandezas



Fonte: Viète (1630, p 34-35).

A OM de Viète possui explicações sobre a subtração, multiplicação e divisão entre grandezas. Essas explicações são possíveis anúncios tecnológicos-teóricos, apoiados na geometria euclidiana. Para Viète demonstrar a multiplicação de uma grandeza por outra, ele toma como pressuposto uma figura geométrica (Figura 7). Não exibiremos aqui a demonstração proposta por Viéte, mas, com base na Figura 7, e estabelecendo equivalências entre grandezas (A – B = AH, A = AB, B = HB, BC = D, BI = C e CI = D – G), ele propõe que o “[...] produto de A – B por D – G é o retângulo EFG contido sobre os lados EF igual à AH e FG igual à IC, então A multiplicado por D – G resulta DA – GA, que será igual ao retângulo IEDC, o qual é maior que o verdadeiro produto do retângulo IFGC [...]” (Viéte, 1630, p. 39, tradução nossa).

Figura 7 – Figura geométrica utilizada por Viéte para demonstrar a multiplicação de uma grandeza por outra



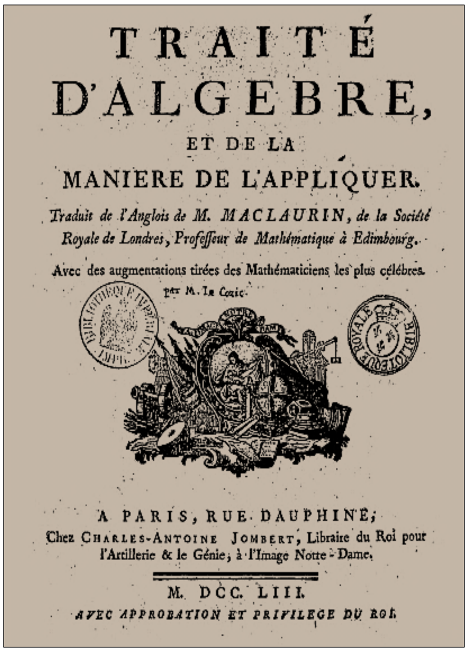
Fonte: Viéte (1630, p. 29).

A obra de Viéte (1630), mesmo alicerçada sobre as compreensões da geometria euclidiana, revela uma OM precursora de vários objetos da Álgebra Escolar, principalmente, noções não ostensivas da adição, subtração, multiplicação e divisão polinomial. As Figuras 6 e 7 tornam possível essa nossa inferência.

A obra de Colin Maclaurin (1753) – denominada de *Traité d'algèbre et de la manière de l'appliquer* [Tratado de álgebra e a forma de aplicá-la] – é uma tradução do original em língua inglesa. Essa obra (Figura 8) exibe uma estrutura organizacional de OM diferente das de Girard (1629, 1884) e Viète (1630). Nota-se a organização estrutural da obra de Maclaurin, em duas partes (primeira e segunda), as quais são subdivididas em duas seções (primeira e segunda) e essas seções, por capítulos, mostram uma sequencialidade textual próxima das ideias de uma Organização Didática (OD) (Chevallard, 1999). Na primeira parte, a primeira seção (As operações fundamentais da Álgebra) está dividida em oito capítulos: Capítulo Primeiro –Contendo as noções preliminares; Capitulo II – As quatro operações sobre os inteiros; Capitulo III – Os divisores e múltiplos; Capítulo IV – As frações; Capítulo V – Da formação das potências e da extração de suas raízes; Capítulo VI – As quantidades com radicais e imaginárias; Capítulo VII – Cálculo das potências pelos seus expoentes e Capítulo VIII – As razões, proporções e progressões. Em sequência, a segunda seção compõe-se de seis capítulos: Capítulo I – Da análise; Capítulo II – Da resolução das equações de segundo grau; Capítulo III – Os problemas indeterminados do primeiro grau e os que são determinados imperfeitamente; Capítulo IV – Da resolução com números racionais, dos problemas em que a quantidade indeterminada tem várias dimensões; Capítulo V – Aplicação da Álgebra na Geometria elementar; e Capítulo VI – Problemas Geométricos (Maclaurin, 1753).

A primeira parte da obra de Maclaurin (1753) pode caracterizar uma Organização Matemática Regional (OMR), porque identificamos a existência do bloco praxeológico [T_{ij}, τ_{ij}, θ_j, Θ] (Chevallard, 1999; Matheron, 2000) comandando as descrições dos capítulos dessa primeira parte. Além disso, a segunda parte dessa obra (Da resolução das equações de qualquer grau e aplicação da análise das curvas Algébricas (p. 169)) avança na complexidade dos objetos da Álgebra. Essa segunda parte do livro de Maclaurin, por conter objetos da álgebra elementar, foge à nossa intencionalidade e não será exposta neste subtópico.

Figura 8 – Contracapa do livro de Maclaurin (1753)



TRAITÉ D'ALGEBRE, ET DE LA MANIERE DE L'APPLIQUER.

Traduit de l'Anglois de M. MACLAURIN, de la Société Royale de Londres, Professeur de Mathématique à Edimbourg.

Avec des augmentations tirées des Mathématiciens les plus célébres.

par M. Le Cozic.

A PARIS, RUE DAUPHINE;
Chez CHARLES-ANTOINE JOMBERT, Libraire du Roi pour l'Artillerie & le Génie, à l'Image Notre-Dame.

M. DCC. LIII.
AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.

Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095477.

O que se nota na versão francesa do livro de Maclaurin (1753) é uma álgebra elementar anunciada, no capítulo primeiro da primeira seção: “a Álgebra é um Método geral para calcular tudo que é susceptível de qualquer determinação regular: é uma Aritmética universal [...]” (Maclaurin, 1753, p. 1, tradução nossa). Para complementar a compreensão da Álgebra como Aritmética universal, o autor explica que:

> A Aritmética e a Álgebra são fundamentadas sobre os mesmos princípios e procedem por meio das mesmas regras e mesmas operações fundamentais, mas a Aritmética comum trata apenas dos números e suas relações; a Álgebra envolve toda e qualquer quantidade, ou relação de quantidade, ou seja, tudo o que pode ser concebido como maior ou menor, como os números, as figuras Geométricas, o tempo, o movimento, a matéria, etc., e as relações entres essas coisas (MACLAURIN, 1753, p. 2, tradução nossa).

Vemos nas palavras de Maclaurin uma compreensão ampliada para a Álgebra Elementar, mesmo que ela esteja associada às ideias aritméticas. Isso não significa que é a Aritmética comum (dos números e suas relações algorítmicas), mas uma Aritmética universal comparativa e abrangente. De fato, o texto da obra de Maclaurin (1753) contém noções da álgebra de Girard (1629), Viéte (1630) e Stevin (1634). Podemos exemplificar isso, quando Maclaurin (1753) anuncia que as simbologias mais utem são o sinal + (mais) para indicar adição: **a + b**; o sinal de – (menos) que indica subtração: **a – b**; o sinal × ou • (multiplicação): **a × b**, ou **a (•) b**, ou a **• b**; e o sinal "**:**" ou ÷ (divisão): **a (:) b**, ou **a : b**, ou **a** ÷ **b**. A divisão na forma de fração é também mencionada na representação $\frac{a}{b}$ (**a** dividido por **b**). Ao que nos parece, estamos diante de uma OM na vertente modelizadora da Álgebra como Aritmética Generalizada.

A multiplicação algébrica, na OM de Maclaurin (1753), é compreendida por meio de três regras: a dos sinais, dos coeficientes e das letras (p. 6). A regra dos sinais segue próximo do que fazemos hoje no ensino da matemática, ou seja, (+) × (+) = +, (–) × (–) = +, (+) × (–) = – e (–) × (+) = –. Em relação à dos coeficientes, é a mesma da multiplicação aritmética. Por último, a regra das letras, significa repeti-las seguidamente. As Figuras 9 e 10 mostram as três regras da multiplicação algébrica. Notamos que Maclaurin inicia a multiplicação, no sentido da esquerda para a direita

Figura 9– Exemplos de duas multiplicações algébricas

$$
\begin{array}{ll|ll}
 & 2a - 3b & & aa + ab + bb \\
\text{par} & 4a + 5b & \text{par} & a - b \\
\hline
 & 8aa - 12ab & & aaa + aab + abb \\
 & \qquad + 10ab - 15bb & & \qquad - aab - abb - bbb \\
\hline
\text{som.} & 8aa - 2ab - 15bb & \text{somme} & aaa \ldots\ldots 0 \ldots\ldots 0 - bbb
\end{array}
$$

Fonte: Maclaurin (1753, p. 7).

Figura 10 – Exemplo de multiplicação algébrica

$$
\begin{array}{ll}
 & 3a + 4b - 5d \\
\text{par} & 2a - 3b - 4d \\
\hline
 & 6aa + 8ab - 10ad \\
 & \qquad - 9ab \qquad\qquad - 12bb + 15bd \\
 & \qquad\qquad - 12ad \qquad\qquad - 16bd + 20dd \\
\hline
 & 6aa - ab - 22ad - 12bb - bd + 20dd
\end{array}
$$

Fonte: Maclaurin (1753, p. 7).

Maclaurin (1753, p. 92, tradução nossa) comenta o que vem ser uma equação do segundo grau: "tem-se visto que as equações do segundo grau são aquelas onde a incógnita é elevada ao quadrado". Ele também propõe a regra (premissa de um discurso tecnológico) para a técnica que soluciona equações do segundo grau.

> *REGRA*
> 1º. Transportem todos os termos que contém a incógnita em um membro da equação e todos os termos conhecidos no outro membro.
> 2º. Se o quadrado da incógnita é multiplicado por qualquer quantidade, dividem-se todos os termos da equação por esta quantidade.
> 3º. Forme o quadrado da metade da quantidade que multiplica a incógnita simples, acrescenta-se aos dois membros da equação o quadrado desta metade, e o membro preenche a incógnita será um quadrado perfeito.
> 4º. Tira-se a raiz quadrada dos dois membros, que de um será sempre a incógnita com a metade da quantidade que multiplicou a incógnita simples; de tal forma, que transportando esta metade, ter-se-á o valor da incógnita.
> EXEMPLO.
> $y^2 + ay = b$
> adiciona-se o quadrado de $\frac{a}{2}$ ...... $y^2 + ay + \frac{a^2}{4} = b + \frac{a^2}{4}$
> extraindo-se a raiz ...... $y + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}}$
> transportando $\frac{a}{2}$ ...... $y = \pm\sqrt{b + \frac{a^2}{4}} - \frac{a}{2}$
> porque todo quadrado é positivo e, evidentemente, que a raiz quadrada de uma quantidade negativa é imaginária [...] (Maclaurin, 1753, p. 93, tradução nossa).

O modelo da equação de segundo grau, proposto por Maclaurin, difere em parte do modelo atual presente na álgebra elementar escolar: $ax^2 + bx + c = 0$. O modelo de Maclaurin assume que os coeficientes, em jogo, são apenas dois (a e b), visto que o coeficiente associado ao termo de segundo grau é igual a +1(um positivo), logo não afeta o desenvolvimento da resolução da equação via método de completar quadrados, cuja tecnologia θ reflete na fatoração de um trinômio quadrado perfeito de um lado e extração da raiz quadrada dos dois lados.

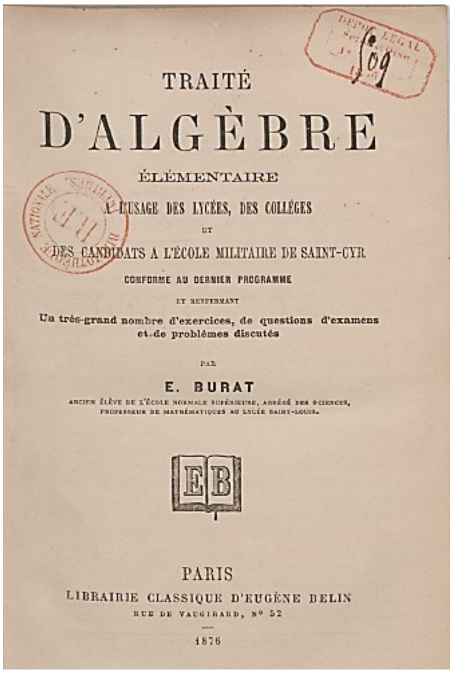
Outra obra que contempla as ideias discutidas, nesta seção, é de Émile Burat (1876): *Traité d'algèbre élémentaire, à l'usage des lycées, des collèges et des candidats à l'école militaire de Saint-Cyr* [Tratado de álgebra elementar, para o uso nos liceus, nos colégios e pelos candidatos à escola militar de Saint-Cyr].

O livro de Burat (1876) (Figura 13) é uma obra que escolhemos, entre outras, que podemos situar, no contexto da TAD, como uma Organização Matemática e Didática (OMD) de Álgebra Elementar, no âmbito do sistema de ensino francês. Embora seja uma obra do século XIX, o texto praxeológico de seu conteúdo traduz compreensões que permanecem no ensino de matemática atual, evidentemente, com alterações e recombinações praxeológicas (Chevallard, 2009a; Chevallard; Cirade, 2010).

A obra de Burat (1876) está estruturada de uma forma diferente das obras anteriores. Burat inicia seu texto praxeológico por uma seção denominada de

“P*RÉLIMINAIRES*” [PRELIMINARES] (p. 1). Nessa seção, o autor aborda “*Origine de l'algèbre, utilité des formules*” [Origem da álgebra, utilidade das fórmulas], “*Classificationdes formules et définitions*” [Classificação das fórmulas e definições] e “*Exercices*” [Exercício]. Após essas preliminares, segue-se o texto praxeológico distribuído por livros: LIVRO I – CÁLCULO ALGÉBRICO (p. 13-122); LIVRO II – RESOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU (p. 123-315); LIVRO III - EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU (p. 316-531) e LIVRO IV – PROGRESSÕES E LOGARITMOS (p. 532-676) (Burat, 1876, tradução nossa). Na seção das preliminares, Burat considera que “a álgebra tem por objetivo de simplificar e generalizar a resolução de problemas [...]” (Ibidem, p. 1, tradução nossa).

Figura 11 – Contracapa do livro de Burat


TRAITÉ

D'ALGÈBRE

ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES LYCÉES, DES COLLÉGES

ET

DES CANDIDATS A L'ÉCOLE MILITAIRE DE SAINT-CYR

CONFORME AU DERNIER PROGRAMME

ET RENFERMANT

Un très-grand nombre d'exercices, de questions d'examens et de problèmes discutés

PAR

E. BURAT

ANCIEN ÉLÈVE DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, AGRÉGÉ DES SCIENCES, PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES AU LYCÉE SAINT-LOUIS.

PARIS

LIBRAIRIE CLASSIQUE D'EUGÈNE BELIN

RUE DE VAUGIRARD, N° 52

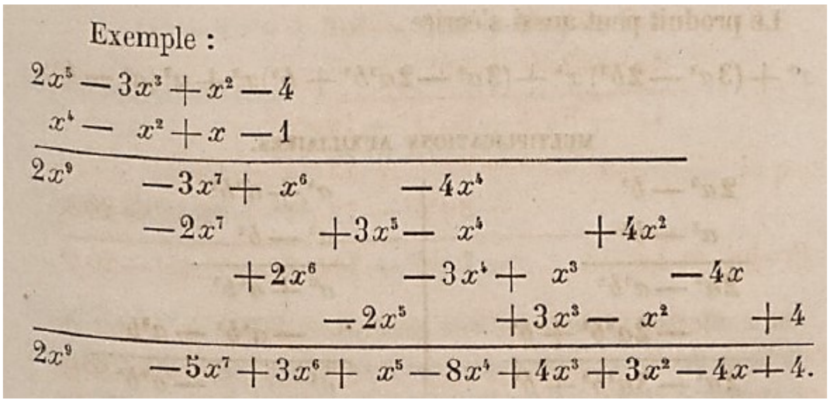
1876

Fonte: http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6531600m.

Para Burat, a simplificação e a generalização estão na origem da Álgebra. E isso é tão forte que ele explica essa origem por meio da resolução do seguinte problema: “encontrar dois números cuja soma seja 78 e a diferença 20” (p. 1, tradução nossa). Burat explica que esse problema possui solução aritmética, solução por simplificação (por meio da solução das equações $x + y = 78$ e $x – y = 20$) e por generalização (a partir da solução algébrica das equações $x + y = s$ e $x – y = d$) (Burat, 1876). A solução por generalização surge de: $x = \frac{s+d}{2} = \frac{78+20}{2} = \frac{98}{2} = 49$ e $y = \frac{s-d}{2} = \frac{78-20}{2} = \frac{58}{2} = 29$. Na sequência, Burat define o que ele compreende ser uma expressão algébrica[82] e um polinômio[83] (inclusive os classifica em monômio, binômio, trinômio e polinômio; mostra como se identificar o grau e calcular o valor numérico desses polinômios).

Vários exemplos de multiplicações polinomiais ilustram o texto praxeológico do LIVRO I da obra de Burat (1876). Um desses exemplos consta na Figura 14, sendo semelhante aos dos livros didáticos de matemática atuais. Além disso, os produtos notáveis constituem casos de "Resultados de Multiplicações Notáveis": $(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$; $(a – b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a^2 –2ab + b^2$; $(a + b)^3 = (a + b)^2 \times (a + b) = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$; $(a – b)^3 = (a – b)^2 \times (a – b) = a^3 – 3a^2b + 3ab^2 – b^3$ e $(a + b)\,(a – b) = a^2 – b^2$ (Burat, 1876, p. 36). Esses produtos notáveis permanecem nas OM e OD da Álgebra Escolar atual. São ensinados nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Figura 12 – Exemplo de multiplicação polinomial


Exemple :

$$
\begin{array}{l}
2x^5 - 3x^3 + x^2 - 4 \\
x^4 - x^2 + x - 1 \\
\hline
2x^9 \quad - 3x^7 + x^6 \quad - 4x^4 \\
\quad - 2x^7 \quad + 3x^5 - x^4 \quad + 4x^2 \\
\quad + 2x^6 \quad - 3x^4 + x^3 \quad - 4x \\
\quad - 2x^5 \quad + 3x^3 - x^2 \quad + 4 \\
\hline
2x^9 - 5x^7 + 3x^6 + x^5 - 8x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x + 4.
\end{array}
$$

Fonte: Burat (1876, p. 29).

A obra de Burat (1876), de acordo com a análise que fizemos, possui as características das Organizações Matemáticas Regionais (OMR), ou seja, o bloco praxeológico $[T_{ij}, \tau_{ij}, \theta_j, \Theta]$ está mais perceptível do que na obra de Maclaurin (1753). A principal diferença da obra de Burat (1876) para essa outra obra é o fato de conter, ao final dos capítulos, questões (tipos de tarefas) com grau de dificuldade crescente. Isso a torna, segundo nossa compreensão, uma Organização Matemática e Didática de Álgebra Elementar.

82 "Uma *expressão algébrica* é um conjunto de letras unidas entre elas pelos sinais das operações. Assim $5 \times a^3 \times b^2$, ou $5 \cdot a^3 \cdot b^2$, ou $5a^3b^2$, é uma expressão algébrica indicando o produto por 5 do cubo do número *a* pelo quadrado do número *b* [...]" (Burat, 1876, p. 5, tradução nossa).

83 "Um polinômio é um conjunto de vários monômios reunidos pelos sinais + ou –. Ex.: $4a^3 + 5a^2b – 7ab^2 + 3b^3$" (Burat, 1876, p. 7, tradução nossa).

11.5 Conclusão

Os objetos ostensivos e não ostensivos redimensionam as características da Álgebra Elementar. Isso está exposto nos artigos de Chevallard (1994) e de Bosch e Chevallard (1999). Compreendemos que a manipulação ostensiva dos objetos da Álgebra Elementar Escolar subjaz a existência dos objetos não ostensivos, por exemplo. Os objetos ostensivos e não ostensivos revelam práticas algébricas, que viveram ou vivem uma ecologia, em obras de diferentes épocas. Essas práticas fazem parte da atividade matemática com Álgebra Elementar, transpostas para o ensino da Álgebra Escolar. Exemplos dessas práticas constam nas obras de Stevin (1634) e Euler (1795). A ostensividade das práticas algébricas que extraímos das obras de Stevin (1634) e Euler (1795) caracteriza a Álgebra Elementar Escolar dependente das noções não ostensivas da Aritmética.

Para revelarmos mais evidências das características da Álgebra Elementar Escolar, examinamos algumas obras de diferentes épocas: Girard (1634,1884); Viète (1630); Maclaurin (1753) e Burat (1876). Ao analisarmos de forma breve essas obras, recorremos às noções da Teoria Antropológica do Didático sobre os tipos de Organizações Matemáticas (OM) (Chevallard, 1999; Matheron, 2000) e ao sistema didático adaptado de Chevallard (2009a, 2009b, 2009d): $\boldsymbol{S}(\mathrm{Y}, O, \mathrm{Q}_y)$. Nesse sistema didático, Y = pesquisadores, O = obras (artigos, livros) e Q_y a questão que levou ao estudo dessas obras.

Na obra de Girard (1629, 1884), a Álgebra Elementar Escolar caracteriza-se dependente da Aritmética. Isso fica explicito na expressão algébrica 8 (2) – 4 (1) + 2 ($8x^2 - 4x + 2$, na Álgebra de hoje). A Álgebra Elementar de Viète (1630) está inspirada nas noções da Geometria euclidiana e o texto praxeológico da obra dele mostra muito bem essa característica. O texto praxeológico da obra de Maclaurin (1753) revela uma Álgebra Elementar que, mesmo dependente das noções Aritméticas, já indica outras possibilidades de algebrização em relação às operações algébricas polinomiais e à resolução de equações. A principal característica da Álgebra Elementar de Maclaurin é mostrar a potencialidade do processo de algebrização, vinculada à Álgebra Elementar Escolar.

Escolhemos a obra de Burat (1876), para finalizar a terceira seção deste capítulo, porque possui um texto praxeológico de Álgebra Elementar Escolar vinculado ao modelo de Aritmética Generalizada, porém, já anuncia as principais operações algébricas (adição, subtração, multiplicação e divisão), na perspectiva futura da modelização do cálculo algébrico funcional.

De certo, concluímos que a Álgebra Elementar Escolar perpassa pelos modelos da Aritmética Generalizada, Geometria e Cálculo Algébrico Funcional. Quanto à questão Q_y (Quais as características das organizações praxeológicas da álgebra elementar escolar identificamos em obras de diferentes épocas?), julgamos respondida parcialmente, conforme nossas breves análises das OM de obras de diferentes épocas, que apontam para uma Álgebra Elementar dependente das noções teóricas da Aritmética e da Geometria, com predominância de organizações matemáticas regionais.

Referências

ASSUDE, T.; COPPÉ, S.; PRESSIAT, A. **Tendances de l'enseignement de l'algèbre élémentaire au collège: atomisation et réduction.** In: COULANGE, Lalina; *et al.* Enseignement de l'Algèbre Élémentaire: bilan et perspectives. Hors série – Revue Recherches en didactique des mathématiques. France: Éditions la Pensée Sauvage, 2012, pp. 41-62.

BOSCH, M. ; CHEVALLARD, Y;. **La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs**. 1999. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Sensibilite_aux_ostensifs.pdf >. Acesso em: 24 abr. 2011.

BURAT, E. **Traité d'algèbre élémentaire, à l'usage des lycées, des collèges et des candidats à l'école militaire de Saint-Cyr**. Paris: Librairie Classique d'Eugène Belin, 1876. Diponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k6531600m>. Acesso em: 31 jul. 2014.

CATALÁN, P. B. **El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares**. Zaragoza: Prensas Universitárias de Zaragoza: Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Zaragoza, 2003. (Monografias del Seminário Matemático "Garcia de Galdeano", 29). Tesis - Universidad de Zaragoza.

CHEVALLARD, Y. **Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique**. 1994. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=125>. Acesso em: 27 mar. 2016.

CHEVALLARD, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martinéz Montañes, Sevilla. Disponível em: <https://edisciplinas.usp.br/pluginfile.php/118315/mod_resource/content/1/articulo_chevallard_TAD_1999.pdf > . Acesso em: 18 jul. 2023.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques**. 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=162>. Acesso em: 24 abr. 2011.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER : problèmes et avancées**. 2009b. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. **Remarques sur la notion d'infrastructure didactique et sur le rôle des PER**. 2009c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

CHEVALLARD, Y. **La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder**: questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. 2009d. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/ >. Acesso em: 24 jun. 2013.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto & aplicações**, vol. 1. 2. ed. São Paulo: Ática, 2013.

EULER, L. **Élémens d'algèbre**. Lyon, 1795. Disponível em: <http://www.e-rara.ch/doi/10.3931/e-rara-8611 >. Acesso em: 14 ago. 2014.

GIRARD, A. **Invention nouvelle en l'algèbre**. Chez Cuillaume Iansson Bleuw. Amsterdam, 1629. Reimpression par Dr. Bierens de Hann. Leiden, 1884. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4803 > . Acesso em: 30 jul. 2014.

MACLAURIN, C. **Traité d'algèbre et de la manière de l'appliquer**. Paris, 1753. Disponível em: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k1095477>. Acesso em: 31 jul. 2014.

MATHERON, Y. **Analyser les praxéologies quelques exemples d'organisations mathématiques**. In: *petit x*, n° 54, pp. 51 - 78, 2000. Disponível em: <http://www-irem.ujf-grenoble.fr/spip/spip.php?rubrique12>. Acesso em: 15 jun. 2015.

MATOS, F. C.; PEREIRA, J. C. S.; NUNES, J. M. V.; GUERRA, R. B.; ALMOULOUD, S. A. Metodologia do percurso de estudo e pesquisa adaptada à formação inicial e continuada de professores de matemática Methodology of the study and research performance adapted toinitial and continued training of mathematics teachers. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 1, p. 448 - 470, 2018. DOI: http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2018v20i1p448-470.

PEREIRA, José Carlos de Souza. **Análise Praxeológica de Conexões entre Aritmética e Álgebra no Contexto do Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas. Belém, 2012.

PEREIRA, J. C. S. **Alterações e recombinações praxeológicas reveladas por professores de matemática do ensino básico em formação continuada: a partir de um modelo epistemológico alternativo para o ensino da álgebra escolar**. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2017.

PEREIRA, J. C. S.; NUNES, J, M. V. Proposições teórico-simbólicas mediadas pela teoria antropológica do didático. **REVEMAT**, v. 15, p.1 - 20, 2020. DOI: https://doi.org/10.5007/1981-1322.2020.e72425.

STEVIN, S. **Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin**. Leyde, 1634. Disponível em:<http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/2161127 >. Acesso em: 14 ago. 2014.

VIÈTE, F. **Introduction en l'art analytic, ou nouvelle algèbre**. Paris, 1630. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.3931/e-rara-4788 >. Acesso em: 30 jul. 2014.

12- Construindo praxeologias matemáticas de Geometria Analítica Plana como prática docente em um Percurso de Estudo e Pesquisa

Roberto Carlos Dantas Andrade
Renato Borges Guerra

Considerações iniciais

A partir da prática docente como professor de Matemática no ensino básico, mais especificamente de Geometria Analítica Plana, podemos destacar que as organizações matemáticas propostas para o ensino médio apresentam reduzidas, senão nenhuma, conexões internas, como também ausência de conexões objetivas com outros tópicos matemáticos.

Sobre as conexões internas, observamos que as organizações matemáticas apresentam tipos de tarefas no seio de praxeologias pontuais — como calcular a distância entre dois pontos e calcular o módulo de um vetor — em momentos diferentes de ensino e desarticuladas, parecendo serem totalmente desconectadas, apesar de utilizarem a mesma técnica decorrente do Teorema de Pitágoras como tecnologia. Essa observação nos levou naturalmente a pensar que as tarefas poderiam ser articuladas, em um dinamismo que permitisse um desencadeamento de tarefas integradas entre si em níveis crescentes de complexidade.

Esse pensar se estendeu às conexões externas, ao conjecturarmos se os objetos de estudo da Geometria Analítica poderiam de alguma forma evocar outros tópicos matemáticos do currículo do ensino básico, ou melhor, se esses objetos de estudo da Geometria Analítica poderiam ser intencionalmente conectados com temas matemáticos estudados no passado e no futuro do desenvolvimento do currículo do ensino básico. Assim, nos questionamos se os modelos matemáticos da Geometria Analítica poderiam, ou mesmo se já seriam intencionalmente utilizados para justificar conceitos relacionados ao estudo das funções, da Geometria Plana e espacial, da trigonometria dentre outros.

As observações realizadas anteriormente nos provocam reflexões sobre o ensino da matemática nas escolas, essas reflexões giram em torno de questões iniciais do tipo: *Que critérios devo utilizar para elaborar as organizações matemática e didática*[84] *que proporcionem o encontro do aluno com um determinado objeto matemático de saber do ensino básico, de forma inteligível e articulada com outros objetos? Quais instrumentos didáticos posso utilizar ou construir que possibilitem a preparação dos alunos para os concursos vestibulares e ENEM*[85]*? Como desenhar uma organização matemática e didática que evidencie a articulação entre vetores e outros temas da Geometria Analítica Plana?* Esses questionamentos nos motivaram a realizar investigações em busca de enfrentar e compreender o impacto que exercem sobre a formação e a prática docente.

Nesse caminhar investigativo, encontramo-nos com o Programa Epistemológico de Investigações em Didática das Matemáticas, em que as questões em destaque parecem convergir para o problema da desarticulação entre os conteúdos de estudo no ensino básico.

À luz da Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida por Yves Chevallard (1992), que nos fornece os subsídios para analisar e desenvolver organizações matemáticas e didáticas para os processos de estudos da Matemática, modelados a partir das noções de praxeologias matemáticas e didáticas, temos constatado que a problemática da desarticulação entre os conteúdos de estudo da Matemática tem se constituído a veia principal de onde pululam ramificações como as problemáticas relativas aos currículos, as quais, por sua vez, estão inclusas em problemáticas relativas à prática docente que se traduz no questionamento de Bosch e Gascón (2004, p. 12):

> Quais deveriam ser a estrutura e as funções dos dispositivos de uma organização didática escolar que permitiriam retomar os conteúdos antigos, inclusive os estudados em etapas educativas anteriores, para questioná-los, desenvolvê-los e articulá-los em organizações matemáticas cada vez mais amplas e complexas?

Tal questionamento, central do Programa Epistemológico em Didática da Matemática, revela o quanto nossas preocupações se aproximam e nos situa nessa linha de investigação em busca de dispositivos didáticos e metodológicos no enfrentamento da

[84] Termos cunhados da Teoria Antropológica do Didático, relativos às praxeologias matemáticas e didáticas que expressam de maneira imbricada o jeito de fazer e pensar do sujeito.
[85] Exame Nacional do Ensino Médio.

problemática posta. Gascón (2010) destaca a complexidade dessa problemática quando aponta que o problema da desarticulação temática requer outros enfrentamentos, pois se desdobra em outros questionamentos, tanto na perspectiva da Matemática, da didática e na relação do didático com o matemático. Dentre tais questionamentos, estão os relacionados ao currículo, à formação e à prática docente, ao autismo temático do professor, ao uso das metodologias de resolução de problemas e da modelagem matemática no ensino.

Nesse sentido, em conformidade com Gascón (2010, 2011), na prática docente da Matemática está inserido o problema da desarticulação, e este está associado às problemáticas do currículo; portanto, essas problemáticas não são do indivíduo, do professor enquanto pessoa, mas dele enquanto sujeito de uma instituição docente — o que é indicado por Cirade (2006), Chevallard (2001a, 2009a) e Gascón (2010) como problema da profissão professor; ou seja, o problema da desarticulação temática é um problema institucional.

Podemos assim, a partir da questão anterior proposta por Bosch e Gascón (2004, p. 12), fazer o seguinte questionamento: Que dispositivos didáticos permitiriam retomar os conteúdos antigos, inclusive os estudados em etapas educativas anteriores, para que sejam questionados, desenvolvidos e articulados em organizações matemáticas de complexidade crescente?

Dentre os dispositivos apresentados para o enfrentamento do fenômeno da desarticulação na prática docente, encontramos indicações de Chevallard (2001a), Bosch, Fonseca e Gascón (2004) e Fonseca (2004) referentes à importância dos tipos de tarefas, mas estas não são exploradas como dispositivos didáticos. É acentuado por Chevallard (2001) que a razão de ser de um objeto matemático se dá por meio das tarefas em uma organização matemática, podendo não se resumir a ela. É nessa perspectiva — da busca da razão de ser da obra matemática, que pode ser uma tarefa — que vislumbramos a tarefa como dispositivo didático capaz de minimizar os problemas da desarticulação temática.

Nessa perspectiva, conjecturamos a existência de tarefas matemáticas que nos permitam olhar o conteúdo matemático ao longo do currículo do ensino básico possibilitando o desenvolvimento de praxeologias matemáticas de complexidade crescente.

Nesse sentido, defendemos a tese de que no enfrentamento do problema da desarticulação a instituição docente, entendida como uma comunidade de professores, pode construir tarefas, eleger algumas dentre as já existentes em seu equipamento praxeológico ou nas obras matemáticas — que daqui em diante referenciaremos como Tarefas Fundamentais — que em um processo de estudos possam ser integradas e articuladas para o enfrentamento de outras tarefas. Assim, a conexão dos objetos matemáticos envolvidos seria estabelecida de forma inteligível, tanto no que se refere às relações internas ao tema, ao setor ou à área da disciplina matemática, como também às relações externas a cada um desses níveis de codeterminação, de modo a atender a intencionalidade dos sujeitos envolvidos no processo de estudos.

12.1 Teoria Antropológica do Didático e a prática docente

A Teoria Antropológica do Didático (TAD) (Chevallard,1999), resultante da problemática da Transposição Didática entre instituições proposta por Chevallard (1991), tem como linha condutora um programa de investigação caracterizado como Programa Epistemológico de Investigação em Didáticas das Matemáticas, cuja origem remonta os anos 1970, com os trabalhos de Guy Brousseau que deram origem à Teoria das Situações Didáticas.

A TAD parte da compreensão de que os seres humanos, para agirem, reúnem-se em grupos — as instituições — os quais impõem certo modo de fazer e pensar próprios no desenvolvimento de suas atividades. Nesse sentido, o fazer de um professor quando resolve uma equação em classe, ou quando corrige os exames de seus alunos, toma como referência construções elaboradas em instituições, resultantes de uma produção coletiva da qual esse professor participou e participa, mas que assume como suas.

Da mesma forma, os pesquisadores também agem em conformidade com instituições — como departamentos de universidades, academias, ou mesmo equipes de pesquisa — que de uma maneira ou de outra impõem os modos de realizar suas pesquisas; ou seja, esses modos são resultados de construções coletivas de diversas instituições e, nesse sentido, é importante destacar que as aproximações teóricas que adotam, também são consideradas como “instituições” em um sentido amplo, como as entidades que se criam para libertá-los dos condicionamentos até então existentes e que permitam o surgimento de novas formas de pensar e agir.

Sob esse pensar, Chevallard (1999) introduziu a noção de *praxeologia* para se referir a qualquer estrutura possível de atuação e conhecimento, assumindo que, na perspectiva antropológica adotada, toda atividade humana pode ser descrita como a ativação de *praxeologia* e que qualquer prática ou “saber-fazer” (toda *práxis*) é sempre acompanhada de um discurso ou “saber” (um *logos*); isto é, uma descrição, uma explicação ou uma racionalidade mínima sobre o que é feito, como se faz e por que se faz.

A *práxis* e o *logos* estão integrados "como dois lados de uma moeda, não há *práxis* sem *logos*, mas também não há *logos* sem *práxis"* (Chevallard; Bosch; Gascón, 2001, p. 251)*;* ou seja, a prática e um discurso que lhe dá razão, que explica ou justifica o que se faz, mesmo que se reduza a função da prática em toda atividade humana, inclusive na atividade matemática, estes vivem em simultaneidade (sincronia) em uma instituição. Daí o nome *praxeologia*, que significa essa simultaneidade a partir da junção das palavras gregas *práxis* e *logos*, que, em uma estrutura simples, pode ser descrita por meio das componentes tarefa-técnica, que diz respeito ao saber-fazer, e à tecnologia e teoria [T / ô / θ / Θ] que constituem o saber.

Em termos praxeológicos, podemos entender a Tarefa (t), que está sempre relacionada a um Tipo de tarefas (T), como toda ação singular, particular, específica de um fazer que se expressa por um verbo, como: arrumar a sala; organizar a gaveta; encontrar a fração reduzida; fatorar o polinômio; simplificar a expressão algébrica; encontrar a equação da reta tangente à curva no ponto P; dividir um número por outro.

Já o Tipo de tarefas (T), é um conjunto de ações do mesmo tipo, ou seja, é uma classe de tarefas com características comuns, como: arrumar salas; organizar cômodas; simplificar expressões algébricas; encontrar equações de retas tangentes a uma curva em um dado ponto P; determinar o quociente entre dois números dados etc., isto é, $T = \{t_1, t_2, t_3, t_4 \ldots\ldots t_n\}$. No quadro abaixo, exemplificamos alguns tipos de tarefas e suas possíveis tarefas associadas.

Quadro 1 – Exemplo de tipos de tarefas T e tarefas t

Tipos de Tarefas (T)	Tarefas (t)
Localizar pontos no plano	**Tarefa$_1$**: localizar o ponto A, dadas as coordenadas (x_a,y_a). **Tarefa$_2$:** Identificar as coordenadas do ponto A, representado no sistema de coordenadas ortogonais.
Determinar o baricentro do triângulo	**Tarefa$_1$:** Determinar o baricentro do triângulo equilátero ABC. **Tarefa$_2$:** Determinar o baricentro do triângulo retângulo MNP.
Calcular a distância entre dois pontos	**Tarefa$_1$:** Calcular a distância entre os pontos A e B. **Tarefa$_2$:** Calcular o comprimento do segmento $\overline{AB}$. **Tarefa$_3$:** Determinar o módulo do vetor $\overline{AB}$.
Escrever a equação da reta r, dados dois pontos	**Tarefa$_1$:** Escrever a equação da reta suporte do segmento $\overline{AB}$. Escrever a equação da reta que contém o lado $\overline{AB}$ do triângulo ABC.

Fonte: Andrade, 2012, p. 19.

Faz-se necessário destacar que a noção de tarefa está sempre interligada a um tipo de tarefa, ou seja, essas noções são solidárias. Contudo, devemos ter clareza de que não existem regras para se especificar um tipo de tarefa (T) e suas tarefas (t), o que pressupõe a complexidade existente na diferenciação e estabelecimento do que sejam as tarefas e o tipo de tarefas associados. Também é necessário garantir a existência de pelo menos uma maneira de realizar as tarefas pertencentes a um determinado tipo de tarefas (T). A essa maneira de realizar uma tarefa pertencente a um dado tipo de tarefas (T), dá-se o nome de técnica (ô). Vale salientar que a técnica (ô), que nem sempre é única, é relativa ao tipo de tarefas (T) e não apenas a uma tarefa específica.

Dessa forma, vemos a imbricação entre o tipo de tarefas e a técnica, o que revela o jeito de fazer. Assim, a Técnica (ô) é a maneira ou as maneiras de enfrentar uma tarefa ou um tipo de tarefas. Porém, a técnica pode se mostrar limitada para resolver todas as tarefas do mesmo tipo, o que requer um trabalho sobre a técnica, o que Chevallard (1999) denomina de alcance da técnica. Quando uma primeira técnica tem competência reduzida para o enfrentamento das tarefas de um mesmo tipo, elabora-se a partir desta uma outra técnica mais abrangente; é esse trabalho da técnica que vemos ser necessário em um processo de estudos da matemática escolar. Significa que, nessa imbricação entre tipos de tarefas e técnicas, uma tarefa pode ser problemática ou não. Ela é problemática quando o aluno não tem o domínio de uma técnica para resolvê-la. O objetivo no ensino é tornar as tarefas problemáticas em tarefas rotineiras pelo domínio das técnicas.

Tomando o saber como uma associação organizada de conhecimentos, a noção de praxeologia dada pela TAD nos possibilita unificar sob um mesmo conceito saber e atividade. O que significa que, ao se falar em teoria, como a teoria dos números, as teorias sociais etc., não estaremos nos referindo apenas aos componentes tecnológico-teóricos [θ / Θ] que formam o *logos*, como também a um conjunto de praxeologias.

Por outro lado, ao nos referirmos à prática, geralmente as identificamos como a perícia em saber fazer, por meio das componentes tarefa-técnica [T / τ], que formam a *práxis,* deixando de lado, ou por vezes omitindo, o componente tecnológico-teórico existente nessas práticas.

É importante, então, dizermos que o que é comumente considerado como conhecimento, habilidade ou competência de uma pessoa corresponde ao que Chevallard (2009a) designa como o Equipamento Praxeológico (EP) da pessoa, isto é, o amálgama de praxeologias e de fragmentos praxeológicos de que a pessoa dispõe para ativar a qualquer momento, quando necessário, sob certas condições e restrições.

Mais precisamente, na TAD é assumido que a pessoa é resultante de seu passado e presente de sujeições institucionais e o seu conhecimento pode, em diacronia, ser imaginado como o fazer da história da pessoa como sujeito, por meio da crônica de suas sujeições e contrassujeições, e, em sincronia, com o conjunto de suas relações pessoais com os objetos[86] que vivem nas instituições em que atua e em que atuou.

Esse conjunto de relações pessoais, que Chevallard (2009a) designa como universo cognitivo (UC) da pessoa é entendido como resultante das movimentações de praxeologias que a pessoa realiza ao longo do tempo sobre seu EP. Segundo o autor, dessa movimentação resulta que partes desse equipamento podem perder suas características de operação, outras podem vir a ser remodeladas e novos elementos podem ser adicionados. De outra maneira, as mudanças no UC resultam de uma dinâmica cognitiva que ocorre quando as relações pessoais a um dado objeto, que vive em uma dada instituição, na qual o indivíduo ocupa certa posição, mudam, são criadas ou desaparecem. Nessa linha de pensamento, podemos inferir que a relação de uma pessoa com um dado saber matemático existe quando a pessoa realiza uma praxeologia com esse saber em uma instituição. Chevallard (2009a) considera Instituição um dispositivo social, total ou parte dele, que impõe ou permite que a pessoa que vive nesse espaço ocupe uma determinada posição e influa em sua maneira de fazer e pensar.

Nesses termos, o que fazemos ou pensamos em uma dada instituição, em uma determinada posição, são frutos de assujeitamentos institucional. Isso significa que o indivíduo se torna uma pessoa à medida que é sujeito de múltiplas instituições; portanto, não há como falar de relação pessoal sem que seja disponibilizada pelo menos uma praxeologia com um objeto de saber pela instituição para a pessoa, mesmo que não estejam claros os interesses e as intenções institucionais que envolvam essa praxeologia.

Mas é preciso considerar que a relação pessoal nunca é perfeitamente conforme as relações institucionais, tampouco é original. A relação pessoal a um objeto é um amálgama resultante das integrações e influências ao longo do tempo de múltiplas relações institucionais em que a pessoa vive e viveu, aceitando, ou se recusando a aceitar, essas ou aquelas mudanças em seu EP.

---

3 É considerado por Chevallard na TAD como a primeira noção fundamental e concebido como "qualquer entidade, material ou não material, *que existe pelo menos para um indivíduo."* (Chevallard, 2009a, p. 01, grifos do autor, tradução nossa).

Por outro lado, segundo Chevallard (2009a), a multiplicidade de sujeição é fonte de sentimento de liberdade das pessoas nas instituições, pois, constantemente, para testar ou exercer sua liberdade, confrontam uma sujeição contra as outras, desestabilizando seus condicionamentos, criando nova sujeição, voluntariamente, como faz o cientista quando cria uma nova teoria para, em seu assujeitamento, descondicionar-se das maneiras de pensar e fazer que impedem ou limitam seu fazer.

Isso nos leva então a considerar que a relação institucional e as relações de pessoas que vivem em uma instituição relativas a um dado objeto matemático determinam-se mutuamente nas dinâmicas dos interesses e intenções institucionais e pessoais que vivem na instituição, dando forma e sentido às praxeologias.

De outro modo, as praxeologias não são obras do acaso, mas, antes, construções de pessoas que vivem em uma instituição, os atores da instituição, que as dotaram de *porquês* e *para quês*, *com* e *para* a instituição, pois

> em geral, nossas relações "pessoais" são frutos de nossa história de submissões institucionais passada e presente. Reciprocamente, uma instituição não pode existir sem indivíduos. Há, portanto, uma dialética *entre instituições e indivíduos*. (Chevallard, 2009a, p. 03, grifos do autor, tradução nossa).

Essa dialética entre pessoa e instituição se desenvolve nas sujeições que exigem a conformidade da relação de uma pessoa com a instituição, relativa a um dado objeto institucional; no entanto, a relação institucional pode ser modificada pelos sujeitos dessa instituição ao criarem para si uma nova sujeição, que pode ser inédita e significativa no seio da instituição.

A capacidade dessas pessoas em desenvolver relações pessoais institucionalmente inéditas, corporificadas em praxeologias inéditas pela mobilização de seus EPs, quando necessário para aquela instituição, contrastam-nas daquelas pessoas que aderem apaixonadamente a certos meios das instituições a que tenham se assujeitado. Para estas, certamente "a conformidade com a instituição é mais assumida do que a capacidade pessoal para produzir relações inovadoras" (Chevallard, 2009a, p. 04).

Em ambas as situações, como criadores de praxeologias inéditas para uma instituição ou como difusores de praxeologias dominantes[87], os docentes assumem papel importante na transposição didática quando elaboram seus textos eminentes de saber, colocando o saber em seu discurso derradeiro, para ser ensinado, o que Chevallard (2001)

---

[87] Assumidas como as praxeologias que vivem nas instituições e são consideradas pelos professores como imprescindíveis para o estudo de um determinado objeto matemático.

destaca como o momento do professor, só seu, em relação com o saber, que permite construir a sua versão para o saber.

Nesse momento, o docente busca responder a questões que emergem em suas práticas, no confronto de praxeologias institucionais matemáticas e didáticas, que exigem a construção de praxeologias, às vezes nunca ensinadas, mas necessárias não só para a compreensão das organizações matemáticas que vivem na instituição, mas também para tornar o ensino inteligível para ele mesmo — o professor.

A movimentação de praxeologias disponíveis não se constitui produtora de mudanças praxeológicas substanciais. Há a necessidade de que uma questão exija do professor mudanças em suas relações com o saber matemático em jogo. Há a necessidade de uma capacidade de questionamento forte, que exija uma resposta com sentido forte, que não seja simples informação, mas signifique propor tarefas, as quais, para serem enfrentadas, requeiram o desenvolvimento de uma ou mais técnicas que provoquem a reconstrução de Organizações Matemáticas (OM) e Organizações Didáticas (OD) institucionalizadas, buscando as "razões de ser" para o saber ora questionado, pois

> geralmente, as "razões de ser" de uma OM se encontram nas OMs que a precedem ou nas OMs a que se integrará. Estas tendem a desaparecer à medida que a construção avança, mas pode ser importante, do ponto de vista da eficácia da OD correspondente, saber manter em vida essas OMs "intermediárias", pelo menos durante a construção da OM considerada. (Bosch; Gascón, 2001, p. 18, grifos dos autores, tradução nossa).

Mas, por outro lado, nenhum dos componentes das organizações escolares, Matemática e Didática, estão oficialmente cristalizados em uma dada instituição. Em geral, esses componentes não se encontram elaborados em todos os seus detalhes e nem se encontram necessariamente coerentes, mas fortemente "naturalizados", até transparentes, para os sujeitos da instituição que os assumem e os transmitem por meio de suas práticas institucionalizadas.

Além disso, a construção de uma organização praxeológica não se faz livremente, pois está subordinada a condições impostas, seja pela instituição, por outros atores da instituição que defendem uma praxeologia até então dominante, por condições de ordem pedagógica que exigem uma subordinação à infraestrutura didática, como as dos livros-textos adotados pela escola, ou do tempo didático, como os programas estabelecidos pelas secretárias de educação, por exemplo. As condições precisam ser vencidas. As que resistem tornam-se restritivas e podem não fazer vingar a organização didático-matemática na instituição.

Essa compreensão, que se estende ecologicamente no sentido de que as praxeologias construídas em uma instituição são reconstruídas para dar respostas a outras instituições sob outras condições e restrições distintas de sua origem, é o cerne da TAD e revela a importância da prática docente como provedora de questões fortes que exigem como respostas um conjunto articulado de praxeologias matemáticas e didáticas sujeitas às condições e restrições existentes nas instituições.

É nesse sentido que a TAD, certamente, constitui-se em um aporte para as investigações sobre práticas docentes e formação de professores, assim como fez Chevallard (1999) ao propor a análise do didático das práticas docentes e, em continuidade, quando o mesmo autor (2001a, 2001b, 2002, 2006, 2009a, 2009b, 2009c) passou a assumir importante papel nas pesquisas relacionadas à formação inicial e continuada de professores, como as realizadas pelo programa de pesquisa liderado por Gascón (2010), que encaminhou pesquisas de doutorado como as de, entre outros, Bolea (2003), Fonseca (2004), Garcia (2005).

Bosch e Gascón (2009) apontam que a TAD tem estado sempre intimamente relacionada com a formação inicial e continuada de professores, não somente pela formação contínua de investigadores que trabalham no âmbito da TAD, mas também — que é de nosso interesse — porque desde a evidência do fenômeno da *transposição didática* (Chevallard, 1991) a TAD tem sido um dos primeiros enfoques a considerar como objeto de estudo e investigação não só as atividades de ensino e aprendizagem mas também todo o processo interminável que se estende desde a criação, utilização e difusão do saber matemático, passando por sua incorporação na escola como saber ensinado, incluindo todas as instituições que participam nesse processo, entre elas o próprio professor como instituição e as que intervêm em sua formação inicial e continuada.

12.2 O problema praxeológico do professor: um problema da formação docente

Bosch e Gascón (2001), em um de seus primeiros trabalhos, analisaram as relações entre as práticas docentes e as organizações didáticas escolares, objetivando situar as práticas docentes como constituídas de atividades humanas institucionalizadas, caracterizam-nas como praxeologias didáticas dos professores, segundo o modelo estabelecido por Chevallard (1999).

As praxeologias didáticas dos professores são consideradas por Chevallard (2001b) como um problema praxeológico, que ele identifica como o *problema □ do* *professor*, decorrente da necessidade que esse professor tem de reconstruir (OMs) que possam ser estudadas em uma instituição escolar, expressando-o da seguinte maneira:

> Observando T_π tipo de tarefas, dizemos que o problema praxeológico do professor de matemática é construir uma praxeologia $[T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$, isto é, buscar uma resposta $R_\pi = [T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$ para a questão Q_π: como realizar uma tarefa $t_\square$ do tipo T_π? É o mesmo que falar de organização matemática, chamada aqui de organização didática uma praxeologia da forma $[T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$. (Chevallard, 2001, p. 03, grifos do autor, tradução nossa).

Essa descrição da praxeologia do professor se situa em um nível de generalidade no qual se encontra diluído o objetivo principal em um vasto conjunto de tarefas dispersas e, em consequência, em múltiplos objetivos também dispersos. Se for tomada uma OM específica, pode-se dizer que o problema do professor consiste em reconstruir a OM para que possa ser estudada em uma instituição docente. Com esse fim, o sistema de tarefas passa a ter unidade e até certa estrutura, e então se pode falar de praxeologia didática do professor relativa a uma OM concreta, como sendo a resposta $R_\pi = [T_\pi / \tau_\pi / \theta_\pi / \Theta_\pi]$ que cada professor dá ao problema de reconstruir uma OM em uma determinada instituição de ensino. É, em outras palavras, a resposta para o "problema [praxeológico] do professor" (Chevallard, 2001, p. 01).

Dessa forma, a praxeologia didática do professor — que pode ser descrita como a reconstrução de uma OM vivenciada em sala de aula que permita aos alunos atuarem com eficácia para resolver problemas com Matemática e, ao mesmo tempo, entender o que fazem de maneira racional — nos leva a afirmar, em acordo com Chevallard (2001), que o que se aprende e se ensina em uma instituição escolar são praxeologias matemáticas que respondem a uma dada questão por meio de tarefas ou tipos de tarefas mobilizadas pelo professor.

Nesse sentido, as praxeologias didáticas são um conjunto de praxeologias que o professor movimenta para a difusão social das praxeologias matemáticas e, como tal, estão estreitamente relacionadas de acordo com o princípio fundador da didática, já que

> o princípio fundador das didáticas, pelo menos no sentido brousseauniano da palavra, não só o que é transmitido depende da ferramenta com a qual se pretende conseguir a transmissão, como também que as organizações de transmissão, isto é, didáticas, estejam configuradas de uma forma intimamente relacionada com a estrutura do que deve ser transmitido. Em outras palavras, as organizações didáticas dependem fortemente das organizações a ensinar: das organizações matemáticas, em nosso caso. Este "isomorfismo" didático-matemático é o que eu expresso através de uma hierarquia de níveis de codeterminação de OD e de OM. (Chevallard, 2001, p. 02, grifos do autor, tradução nossa).

Sob esse pensar, fica claro o alerta, tanto de Chevallard (1991) sobre o cuidado com a reconstrução das OM no trânsito dos objetos matemáticos entre as instituições de ensino, quanto o de Bosch, Fonseca e Gascón (2004, p. 210) ao afirmarem que a "ignorância das causas de origem matemática do problema didático impossibilita seu tratamento eficaz e perpetua as descontinuidades e contradições entre as práticas que se desenvolvem nas diferentes instituições afetadas".

Nesses termos, podemos inferir, em acordo com Chevallard, Bosch e Gascón (2001), Bosch, Fonseca e Gascón (2004), Bosch e Gascón (2004) e outros, que, embora o Programa Epistemológico assume que o matemático (o objeto de estudo) e o didático (a organização para o estudo) constituam duas dimensões inseparáveis da realidade escolar que se determinam mutuamente, faz- se necessário analisar o conhecimento matemático tal como se apresenta historicamente no seio de cada instituição, fazendo abstrações de sua gênese e de seu processo de reconstrução, o que se constitui em um processo de estudos e, portanto, didático. Isso revela a dimensão epistemológica que Gascón (2011) destaca como o cerne do problema didático.

É necessário ressaltar que o sentido dado na TAD ao epistemológico, segundo Bosch *et al.* (2006), é de não o reduzir ao conteúdo matemático, mas sim ampliá-lo ao âmbito e ao alcance que habitualmente se tem dado ao matemático e à epistemologia das matemáticas, conforme Gascón (2001), quando tratam das diversas ampliações da epistemologia clássica. Esses autores estabelecem a concepção epistemológica relativa à manipulação de um saber em uma dada instituição com objetivos didáticos.

Na linha da investigação da profissão do professor de Matemática, Cirade (2006) busca caracterizar essa profissão a partir da interrelação entre o problema da profissão e o da formação no IUFM[88], por meio da análise das praxeologias matemáticas e didáticas que o professor deve possuir para o exercício da prática docente, como problema profissional. Para tanto, utilizou o modelo de praxeologias proposto por Yves Chevallard, assumindo a classificação do saber docente para a prática do professor de Matemática em três tipos: as praxeologias matemáticas a ensinar; as praxeologias matemáticas para o ensino; e as praxeologias didáticas. Esses tipos praxeológicos não são considerados como compartimentos isolados, mas como um conjunto em que as praxeologias didáticas englobam as praxeologias a ensinar, as quais, por sua vez, comportam as praxeologias para o ensino. Esse conjunto de praxeologias que o professor deve possuir para ser

[88] Institut Universitaire de Formation des Maîtres de l`Académie d`Aix-Marseille

ativado, sob certas condições e restrições, em um dado momento da prática docente, constituiria o EP disponível para a prática profissional.

Seguindo esse entendimento do papel do EP na profissão do professor de Matemática, Gascón e Bosch apontam três contribuições da TAD para a formação de professores para o ensino básico, quais sejam:

> A maneira de colocar o problema da formação e delimitar o âmbito empírico no qual este deve se situar para ser abordado; a proposição e experimentação de dispositivos de formação; e, finalmente, a colocação em evidência de fenômenos que incidem no desenvolvimento desta formação, dificultando-a ou facilitando-a. (Gascón e Bosch 2009, p. 89, tradução nossa).

Esses autores formulam o problema de formação nos seguintes termos:

> Qual é o Equipamento Praxeológico necessário, ou pelo menos útil, para que os professores possam intervir de maneira efetiva e pertinente na formação matemática dos estudantes, de tal ou qual etapa educativa e o que se pode fazer para ajudar para que os professores disponham dele? (Gascón e Bosch 2009, p. 94, tradução nossa).

No entanto, alertam para o risco de se querer formar professores a partir dos EPs já disponíveis, deixando sob a responsabilidade do professor a capacidade de poder "aplicar" esses equipamentos em situações concretas que podem vir a enfrentar. Isso não quer dizer que os EP disponíveis não devam estar presentes no processo de formação, mas que, sobretudo, esse processo ocorra a partir das necessidades praxeológicas que se criam no exercício da profissão, evitando a *pedagogia do monumentalismo*, que, de certo modo, antepõe o estudo das questões, problemas ou necessidades que estão na origem do processo de formação, pois

> [...] quando o projeto de formação está baseado mais no que o formador pode oferecer em detrimento às necessidades das pessoas em formação, os conteúdos de ensino — que podem ser um "saber" com claro componente teórico, mas também um "saber-fazer" eminentemente prático — se convertem em "obras" ou monumentos que os estudantes devem conhecer, no sentido de "ser visitado", sem que ninguém saiba muito bem o porquê de terem sido construídos nem para que servem hoje. (Gascón e Bosch, 2009, p. 95, tradução nossa).

Com tal preocupação, esses autores reformulam o problema da formação docente considerando-o "dual" do anterior: "Quais são as *questões cruciais* que devem enfrentar os professores em sua prática docente, e o que pode fazer a formação para ajudá-los a construir *respostas satisfatórias* a essas questões?" (Gascón e Bosch, 2009, p. 96, grifos do autor, tradução nossa).

Segundo Bosch e Gascón (2009), as respostas às questões cruciais residem nos ingredientes básicos do EP do professor, o que caracteriza o caráter "dual" do problema.

Mas tal encaminhamento tem a virtude de manter aberto o problema da descrição desse EP e, portanto, de sua construção e difusão nos processos de formação.

Em resposta as reflexões propostas na TAD no que diz respeito a visita histórica epistemológica dos objetos matemáticos que vivem nas instituições do ensino básico Brasileiro, bem como possibilitar o enfrentamento do problema praxeológico do professor em construir e reconstruir OM e OD, considerando os pressupostos evidenciados por Bosch e Gascón (2009), passamos apresentar alguns resultados de nossas investigações para a elaboração de praxeologias para o estudo da Geometria Analítica Plana.

12.3 Tipos de tarefas no contexto histórico epistemológico da Geometria Analítica

Neste tópico, consideramos a obra *La Géométrie*, de René Descartes (1637), buscando em parte da história e da epistemologia da Geometria Analítica eleger os tipos de tarefas que podemos caracterizar como fundamentais, pois a apropriação desses tipos de tarefas poderá contribuir para a elaboração das praxeologias matemáticas, que substanciadas pelo uso destes possibilitará a articulação e justificação entre os temas, setores e áreas da Matemática escolar.

Na elaboração de transposições didáticas, os professores devem considerar a epistemologia do saber matemático como orientação e condução para a construção dos objetos matemáticos na instituição escolar a partir de reflexões no contexto histórico, de modo a assegurar uma forma equilibrada, evitando sua banalização ao memo tempo que o mantêm próximo ao saber de referência, é vigilância epistemológica requerida por Chevallard (2001) na transposição didática.

Nesse sentido, procuramos investigar aqueles tipos de tarefas estabelecidas por Descartes como articuladoras de outras tarefas, que possam ser vistas como as Tarefas Fundamentais[89]. Assim, o estudo teve como fonte primária a obra *La géométrie* (1637), apoiada nas traduções e comentários feitos por Smith e Latham (1954) — esta edição contém a versão original em fac-símile da obra *Geometria* de Descartes e uma tradução para o inglês. Outra obra utilizada é a tradução para o português de Lopes (Sem data), editada em Lisboa e, do mesmo modo que a de Smith e Latham, traz comentários como notas a fim de interpretar a obra de Descartes.

[89] Conferir em Andrade, Roberto Carlos Dantas. A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores: o caso da geometria / Roberto Carlos Dantas Andrade, orientador Prof. Dr. Renato Borges Guerra, revisor gramatical Mateus Maia Rezende — 2012.

La géométrie é parte da obra *Discours de La méthode,* o qual é formado por um prefácio com o mesmo nome da obra e mais três partes: *La géométrie, La dióptrique, Les météores.* Essa obra foi publicada originalmente em francês, as três partes constituem-se em ensaios do método para conduzir a razão na busca das verdades da ciência. Segundo os comentadores de *La géométrie*, este é um dos trabalhos de Descartes que menos recebeu críticas e objeções em relação às críticas recebidas pelas partes em que são expostos os aspectos filosóficos- teológicos do Método, porém foi o trabalho que revolucionou não só a Matemática como também a ciência como um todo. *La géométrie* é composta de três livros: o livro primeiro, intitulado "Dos problemas que se podem construir sem empregar mais que círculos e retas"*;* o livro segundo intitulado "Da natureza das linhas curvas"; e o livro terceiro, denominado "Da construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos".

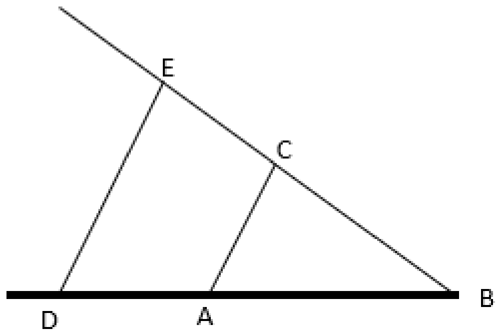
Descartes inicia o livro primeiro refletindo sobre o cálculo aritmético e relaciona com as operações de geometria e um correspondente geométrico às operações algébricas. Em seguida, construiu a simbologia que iria usar na obra e mostrou como se chega às equações que serviriam para resolver problemas. Fez um estudo sobre os tipos de equações de segundo grau e como resolvê-las. Finalmente, aplicou seu método à resolução algébrica do *problema de Pappus* para quatro retas. Estabelecendo assim os princípios gerais da Geometria Analítica, como descrito abaixo:

> A aritmética não compreende mais que quatro ou cinco operações, que são, adição, subtração, multiplicação, divisão e extração de raízes, que pode tornar-se como uma espécie de divisão, assim não há outra coisa a fazer em geometria, com respeito às linhas que se desejam conhecer, *que juntar ou subtrair outras, ou ainda, conhecendo uma, que designarei por unidade para relacioná-la o melhor possível com os números, e que geralmente pode ser escolhida arbitrariamente* e, conhecendo logo outras duas, determinar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a outra está para a unidade, que é o mesmo que a multiplicação; ou ainda, encontrar uma quarta que esteja para uma dessas duas como a unidade está para a outra, que é o mesmo que a divisão; ou, enfim, encontrar um, dois, vários meios proporcionais entre a unidade e alguma outra linha, o que é o mesmo que extrair a raiz quadrada, ou cúbica, etc. *E eu não temerei introduzir estes termos aritméticos em geometria, a fim de tornar-me mais inteligível* (DESCARTES, 1954, p. 3, apud Lopes).

Nesse texto, percebemos a relação que Descartes estabelece entre a geometria e a aritmética; para tanto, utiliza-se da proporcionalidade, na forma do que hoje é institucionalizado como o Teorema de Tales, "um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais", este teorema é em princípio tema de estudos no nono ano do ensino fundamental brasileiro.

Para realizar a articulação entre as operações aritméticas com as geométricas, Descartes procedeu da maneira descrita na Figura 1.

Figura 1 – Multiplicação e divisão de segmentos



Fonte: Descartes, 1637, p. 298

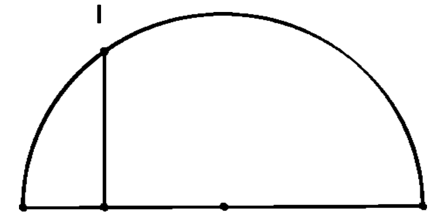
Em nossos dias, compreendemos o fazer de Descartes da seguinte forma. Para multiplicar $\overline{BD}$ por $\overline{BC}$, dever-se-ia tomar $\overline{AB}$ como unidade, depois unir os pontos A e C e então traçar $\overline{DE}$ paralela a $\overline{CA}$. Daí, ele afirmou que $\overline{BE}$ seria o produto de $\overline{BC}$ por $\overline{BD}$. Em consequência a esse procedimento, Descartes também estabeleceu a divisão $\overline{BE}$ por $\overline{BD}$ como sendo $\overline{BC}$, descrevendo o seguinte procedimento: unindo os pontos E e D, traça-se $\overline{AC}$ paralela a $\overline{DE}$. Podemos perceber o fazer matemático por meio da aplicação do Teorema de Tales: Um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais determina segmentos correspondes proporcionais. Sendo a proporção,

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{BE}}$$

e assim, assumindo $\overline{AB}$ como a unidade, então **BE = BD x BC** e **BC=BE: BD**.

Em seguida, Descartes estabelece a extração da raiz quadrada tomando um triângulo inscrito em uma semicircunferência, mais uma vez utilizando a proporcionalidade, pois estabelece a raiz quadrada como sendo a altura do triângulo inscrito, que é o meio proporcional em que esta divide a hipotenusa, já que esse triângulo é retângulo.

Figura 2 – Cálculo da raiz quadrada



Fonte: Descartes, 1637, p. 298

Para se extrair a raiz quadrada de **GH**, junta-se em linha reta $\overline{FG}$, que é a unidade, dividindo-se **FH** em duas partes iguais pelo ponto **K**; tomando esse ponto como centro, traça-se o círculo **FIH**, elevando-se desde o ponto **G** uma linha reta, formando ângulos retos com $\overline{FH}$, até **I**, é **GI** a raiz buscada. Em termos atuais, percebemos que Descartes utilizou o axioma da inscrição de um triângulo em um semicírculo, que determina que esse triângulo é retângulo com a hipotenusa sobre o diâmetro do semicírculo, daí que utilizando as relações métricas do triângulo retângulo podemos concluir que $GI^2 = FG\,.\,GH$, e como **FG** é a unidade conclui-se que **GI** é a raiz quadrada de **FH**.

Esses fazeres são confirmados por Descartes ao descrever a relação entre a aritmética e a geometria. Segundo Smith e Latham (1954), ele resume seu trabalho em carta à Princesa Elisabeth descrevendo que "na solução de problemas geométricos [...] não usei outro teorema exceto os que afirmam que os lados de triângulos semelhantes são proporcionais e que o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos lados" (Smith; Latham, 1954, p. 10, tradução nossa). Essa afirmativa nos indica a compreensão de que a teoria das proporcionalidades estabelece em nível histórico e epistemológico a conexão e articulação da aritmética com a geometria, possibilitando assim o desenvolvimento do método para enfrentamento dos tipos de tarefas concebidos no contexto geométrico, sendo esse método a própria Geometria Analítica.

Percebemos que por meio desses dois exemplos Descartes, para realizar a tarefa de relacionar as operações aritméticas com as operações de segmentos, teve que estabelecer o segmento unitário e com isso o produto de dois segmentos, que na geometria grega resultava em uma superfície, a partir de então poderia resultar também em outro segmento. Além disso, pensamos que na realização dessa primeira tarefa, Descartes intencionava a busca de uma estrutura Matemática que fundamentaria o método analítico por ele desenvolvido.

Um dos objetivos do método analítico é o enfrentamento dos problemas da geometria sem a necessária construção com régua e compasso utilizados no método sintético; para isso Descartes propõe a utilização de letras para a representação dos segmentos, assim estabelece os procedimentos algébricos que utilizará no enfrentamento do problema de Pappus. Significa que o seu propósito é a retirada das linhas, já que em determinado momento se tornaria dificultoso representá-las, em função da quantidade, pois ele amplia o problema para ***n*** linhas em vez de apenas quatro, como na proposição original.

> Frequentemente não é necessário então traçar as linhas no papel, mas é suficiente designar cada uma por uma simples letra. Desse modo, para somar as linhas $\overline{BD}$ e $\overline{GH}$, eu chamo uma de *a* e outra de *b* e escrevo $a + b$. Então $a - b$ indicará que *b é* subtraído de *a; ab* que *a* é multiplicado por *b;* $\frac{a}{b}$, que *a é dividido por b; aa* ou a^2 *que a* é multiplicado por ele mesmo; a^3 que é o multiplicado o resultado de multiplicar outra vez por *a e assim* indefinidamente. (DESCARTES, 1954, p. 5, traduzido por Lopes).

Em continuação, descreve o seu método de resolver problemas enfatizando a necessidade da representação algébrica, destacando que

> se nós desejarmos solucionar qualquer problema, primeiro supomos a solução já efetuada e damos nomes para todas as linhas que parecem necessárias para sua construção as que são desconhecidas e as que são conhecidas. (DESCARTES, 1954, p. 6, traduzido por Lopes).

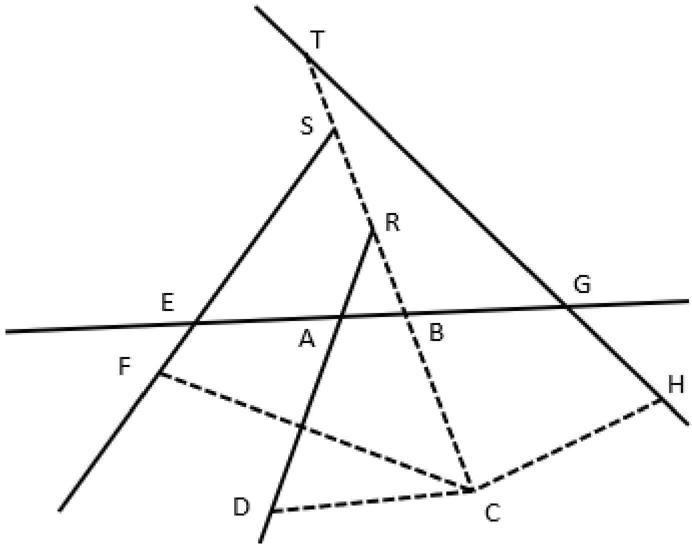
Assim, o método pode ser resumido em três etapas: nomear, que consiste em assumir que o problema já está resolvido e, a partir daí, nomear todos os segmentos conhecidos e desconhecidos necessários para a resolução do problema; equacionar, que significa estabelecer uma equação envolvendo essas variáveis; e construir soluções geométricas, fazendo uso de régua e compasso. Essas indicações culminam com a maneira de articular as equações de retas para resoluções de problemas, sem se prender à utilização apenas de equações de retas que possam ser visualizadas, essa articulação provocará o surgimento de outra equação, que representará o lugar geométrico que é a solução do problema. Como na indicação abaixo:

> [...] Então, não fazendo distinção entre linhas conhecidas e desconhecidas, nós temos que examinar a dificuldade no caminho que mostra mais naturalmente as relações entre essas linhas, até conseguirmos expressar uma mesma quantidade de duas maneiras. Isso constituirá uma equação, pois os termos de uma dessas duas expressões são iguais aos termos da outra. (DESCARTES, 1954, p. 9, traduzido por Lopes).

Após estabelecer a estrutura que fundamentaria o seu método, Descartes toma como motivação para a concepção da Geometria Analítica a tarefa proposta por Pappus, reconhecida como o problema de Pappus, e já enfrentada pelos gregos por meio das mais variadas técnicas. Euclides (322-285 a.C.) o resolveu para três e quatro retas. Pappus o generalizou para um número arbitrário de retas. Sendo esse considerado um dos problemas chave para o desenvolvimento da geometria.

O problema de Pappus é descrito da seguinte maneira: são dadas quatro linhas (retas), nas posições $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$. Temos que descobrir o lugar geométrico do ponto **C**, a partir do qual é possível traçar as linhas $\overline{CB}$, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$ e $\overline{CG}$ até as quatro retas, sempre fazendo com que cada uma delas forme o mesmo ângulo com a linha com que se encontra, de tal modo que **CB x CD**, mantenha sempre uma determinada proporção com **CF x CH**. O lugar geométrico é uma cônica que passa pelas quatro intersecções **(A, B, C, D)** das quatro linhas. Sendo sua representação geométrica representada pela figura 3.

Figura 3 – Representação gráfica do problema de Pappus



Fonte: Descartes, 1637, p. 309

Na perspectiva de resolver o problema, Descartes descreveu o seguinte procedimento:

> Primeiro suponho o problema resolvido e, para sair da confusão de todas essas linhas, considero uma das dadas e uma das que se há de encontrar, por exemplo, AB e CB, como as principais, às quais trato de referir todas as outras. Designo AB por X [...] e BC por Y [...] e prolonguem-se todas as demais linhas até que cortem também essas duas, prolongadas se necessário e se não lhe são paralelas; como se vê, elas cortam a linha AB nos pontos A, E, G e a linha BC nos pontos R, S, T. Pois bem, como todos os ângulos do triângulo ARB são dados, a proporção dos lados AB e RB é também dada, e indico-a como de z para b; de maneira que representando AB por x, RB será bx/z e a linha total CR será y + bx/z, pois o ponto B cai entre C e R; se R caísse entre C e B seria CR = y - bx/z e se caísse entre B e R, seria CR = -y + bx/z. Analogamente, os três ângulos do triângulo DRC são dados e, por conseguinte, também a proporção que há entre os lados CR e CD, indico como z para c, de modo que sendo CR = y + bx/z, será CD= cy/z + bcx/z^2 . Após isso, como as linhas AB, AD, e EF são dadas em posição, a distância entre os pontos A e E também é dada e, designando-as por k, ter-se-á EB igual a x + k; que seria k — x se o ponto B caísse entre E e A; e -k + x se E caísse entre A e B. E como todos os ângulos do triângulo ESB são dados, e estabelecendo que BE está para BS assim como z está para d, tem-se: BS = (dk + dx)/z e a linha CS é (zy + dk + dx)/z. Se o ponto S caísse entre B e C seria CS = (zy — dk - dx): e quando C cair entre B e S teremos CS = (-zy + dk + dx)/z. Além disso, os três ângulos do triângulo FSC também são conhecidos, e, portanto, é dada a proporção de CS para CF, que z para e, e será CF = (ezy + dek + dex)/z^2 . Analogamente, AG ou l é dada e BG é l - x, pois no triângulo BGT é também conhecida a proporção BG:BT = z/t, teremos: BT = (f l - fx)/z, sendo CT = (zy + fl - fx)/z. Agora, como a proporção de TC para CH está dada pelo triângulo TCH, fazendo-a como z para g, tem-se CH = (gzy + fgl- fgx)/z . (DESCARTES, 1954, p. 20 traduzido por Lopes).

A partir do exposto, podemos destacar a proposição de um tipo de tarefas que é a necessidade da utilização de duas linhas como referência para a localização das outras linhas, o que está muito próximo do que usamos como sistema de coordenadas que caracteriza o método analítico.

Na Geometria Analítica escolar atual, identificamos como a necessidade primeira *representar um ponto por um par de números reais* e que, ao analisarmos as organizações propostas nos livros didáticos, esse é um tipo de tarefa que poderíamos considerar como sendo uma das tarefas fundamentais da Geometria Analítica, a qual se refere ao estabelecimento de um sistema de coordenadas.

Na continuação da resolução do problema, Descartes propõe o que identificamos como outra tarefa fundamental a *determinação da equação da reta*, pois substituindo em **CB x CD = CF x CH**, obtemos uma equação do segundo grau em ***x*** e ***y***. Atribuindo um valor a uma das variáveis, encontramos a segunda. Como isso pode ser feito indefinidamente, encontraremos uma infinidade de pontos, e a partir deles poderemos construir a curva que representa o lugar geométrico. A resolução do problema de Pappus dada por Descartes é reconhecida como a base para o desenvolvimento da Geometria Analítica. Reduzindo o problema a duas retas e, ao graduá-las, constrói-se o sistema de coordenadas, base da Geometria Analítica. O que é exposto no destaque:

> Vê-se assim que qualquer que seja o número de linhas dadas, todas as linhas traçadas a partir de C, que formam ângulos dados, conforme o enunciado, podem sempre expressar-se, cada uma por três termos, dos quais um é composto pela quantidade desconhecida **Y** multiplicada ou dividida por alguma outra conhecida, e o outro, pela quantidade desconhecida **X** multiplicada ou dividida por outra conhecida, e o terceiro termo, de uma quantidade conhecida. (DESCARTES, 1954, p. 22, traduzido por Lopes).

Quanto ao tipo de tarefas que descreve *o cálculo da distância entre dois pontos*, encontramos o trecho da obra de Descartes que além de descrever essa tarefa também evidencia a sua relação com outro tipo de tarefa, que é *a determinação da equação da circunferência.* Essa relação nos indica que também no contexto histórico e epistemológico a determinação da distância entre dois pontos se estabelece como uma tarefa que movimenta e propicia o enfrentamento de outros tipos de tarefas, caracterizando-se como uma tarefa fundamental.

> Não direi tampouco que fosse em virtude de os geômetras não quererem aumentar o número das suas condições e que eles se tenham contentado com o que lhes facultasse poder unir dois pontos dados por uma linha reta e descrever o círculo de um centro dado e passando por um ponto dado. (DESCARTES, 1954, p. 26, traduzido por Lopes).

Nessa revisão histórica e epistemológica, podemos inferir que para o estabelecimento do método analítico, Descartes, além de eleger o Teorema de Tales para relacionar a aritmética com a geometria e a álgebra — o que fundamentaria seu método por meio das proporções — ele, em seu fazer, evidencia três tipos de tarefas que também hoje são proposições nas OM e OD constantes nos livros didáticos, sendo estas: representar um ponto por um par de números reais; a determinar a distância entre dois pontos e determinar a equação da reta. Assim, pensamos, a partir dessa revisão histórica e epistemológica, que se confirma a eleição desses três tipos de tarefas como os tipos de tarefas que podem ser tomadas como fundamentais na reconstrução de praxeologias matemáticas articuladas para o estudo no ensino médio.

Após essa revisão histórica e epistemológica, conjuntamente com as análises nos manuais didáticos, o Percurso de investigação por nós vivenciado até aqui, quando do estudo das OM presentes nos livros-textos, na história e epistemologia da GAP, e as obras constituídas no Programa Epistemológico de Investigação em Didática das Matemáticas nos indicam novos desdobramentos, pois nas OM dos livros didáticos o Teorema de Tales não aparece como tarefa, nem como técnica, muito menos como tecnologia da GAP; já na investigação histórica e epistemológica, esse tema parece transversalizar o fazer, ora no nível de tarefa/técnica, ora como a tecnologia.

Nesse sentido, outros questionamentos surgem como, por exemplo: qual o nível de participação do Teorema de Tales nas tarefas escolares de Geometria Analítica? É necessária ou não a construção de novas tarefas sobre o Teorema de Tales para o estudo de GAP, visto que esse tema é proposto na grade curricular para ser tratado no sétimo ano do ensino fundamental como tarefas isoladas no setor da Geometria Plana?

Assim sendo, como desdobramentos deste percurso investigativo, novas questões são postas: qual a potencialidade do Teorema de Tales para o ensino da GAP? Como os professores em suas práticas docentes veem essa potencialidade? Essas questões nos indicam a ampliação do ambiente de investigativo, visto que as compreendemos em função da imbricação existente entre a dimensão epistemológica do problema didático da reconstrução de OM e OD e as problemáticas da prática docente.

Essa ampliação também nos conduz a realizar análises investigativas na dimensão institucional relativas ao problema da desarticulação em níveis da disciplina matemática, da área geometria, do setor geometria analítica entre os temas de um mesmo setor, como o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, ou de setores diferentes como o Teorema de Tales e a condição de alinhamento.

12.4 Um Percurso de Estudo e Pesquisa para o enfrentamento do problema praxeológico do professor frente ao estudo da Geometria Analítica

As investigações históricas epistemológicas aliadas à nossa prática docente com a Geometria Analítica fazem surgir novos questionamentos agregados ao questionamento inicial de: como construir ou reconstruir OM e OD para o estudo da Geometria Analítica? E podemos aferir que este não é um problema isolado, mas sim um problema da profissão que se insere num problema praxeológico do professor.

Daí que um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) nos termos propostos por Chevallard (2004, 2006, 2009a, 2009b, 2009c) se coloca nesta investigação como dispositivo metodológico para o enfrentamento de problemas didáticos no ensino e, por conseguinte, também se torna um dispositivo didático para enfrentar o problema da desarticulação, embora entendendo que tratar o problema da desarticulação considerando as condicionantes do currículo não é simples tendo em conta que as práticas docentes que vivem na instituição podem se configurar como restrições para a proposição de resposta ao problema.

A configuração do PEP, que exige o desdobrar de sistemas didáticos, e em sistemas auxiliares, a partir de questionamentos formulados pelos professores de uma comunidade de práticas docentes com matemática em torno de tarefas que possam catalisar as articulações com diferentes organizações sob as condições impostas, pode encaminhar o necessário confronto de práticas que minimizem ou eliminem as restrições impostas pelas práticas docentes que vivem na instituição, ao tempo em que se constroem as respostas procuradas para as problemáticas postas.

Nesses termos, o PEP se impõe como dispositivo de formação de professores à medida que encaminha a construção de respostas às questões problemáticas da e pela Comunidade que podem ser traduzidas pela questão:

Q: *Como fazer a construção de uma OM/OD, entendida como um conjunto estruturado de tarefas, que respondem a questões determinadas, com forte grau de integração e em ordem crescente de complexidade e que façam o reencontro dos professores com o conjunto de obras essenciais do programa de Geometria Analítica?*

Responder a tal questionamento encaminha a formação do sistema didático S(X,Y,y,Q), em que X é um grupo de alunos hipotéticos[90], Y composto pelos docentes

[90] "A noção, de aluno hipotético, objetiva idealizar a atividade liberando o autor, provisoriamente, das variáveis contextuais e cognitivas que podem influenciar na execução da atividade" (GASCÓN, 2010, p. 12).

da escola onde a pesquisa se desenvolve e $y \in Y$ o professor que coordena os estudos e autor desta investigação.

O pensar inicial sobre a noção de tarefas nos leva ao papel funcional das tarefas nas organizações matemáticas e didáticas e é inicialmente traduzido no seguinte questionamento;

Q_0: *Por que e para quê existe tal e tal tarefa nas organizações matemáticas/didáticas da Geometria Analítica Plana do ensino básico?*

Para o enfrentamento dessa questão, a Comunidade inicia seus estudos pela busca de relações entre as OMs e ODs propostas nos livros didáticos com possíveis modelos epistemológicos relativos à Geometria Analítica recorrendo ao modelo praxeológico proposto pela TAD, destacando as tarefas ou tipos de tarefas propostos nas OMs. Busca vislumbrar um modelo epistemológico que permita uma estrutura de tipos de tarefas articuladas e, entre elas, as Tarefas Fundamentais por se permitirem ser vistas nesse modelo como técnicas/tecnologias de outras tarefas.

Nesse sentido se configura o sistema didático **S_1 (Y, y, O_1)**, com a obra O_1 de Yussef et al. (2005) usada na escola onde ocorreu a pesquisa, e dele resulta a formulação de uma resposta R_1 pela Comunidade, a compreensão da estrutura de tarefas da obra relativa aos temas que são divididos em estudo do ponto, da reta e da circunferência. Essa resposta decorre do desdobramento de **S_1** em um conjunto de sistemas didáticos do tipo **S_{1k} (Y, y, P_k)**, em que P_k são praxeologias constantes na obra em estudo. A resposta R_1 pode ser descrita como segue no quadro 2:

Quadro 2– Tipos de tarefas para o estudo da GAP nos livros-textos

Tipo de Tarefas	**Técnica**
Localizar pontos no sistema de coordenadas ortogonais.	Constitui-se em traçar retas auxiliares, paralelas aos eixos e passando pela abscissa do ponto e ordenada do ponto.
Calcular a distância entre dois pontos.	Modela-se em triângulo retângulo, sendo a distância entre os pontos identificada como a hipotenusa desse triângulo e daí utiliza o Teorema de Pitágoras.
Determinar o ponto médio de um segmento.	Calcula-se a média aritmética entre as coordenadas dos pontos extremos do segmento.
Determinar o baricentro de um triângulo.	Calcula-se a média aritmética entre as coordenadas que compõe os vértices do triângulo.
Determinar em que condições três pontos estão na mesma linha.	Calcula-se o determinante composto pelas coordenadas desses três pontos, completando o determinante com uma coluna em que seus valores são todos iguais a um. Se o resultado for zero, os pontos estão alinhados; se for diferente de zero, os pontos não estão alinhados.

Escrever a equação da reta	Se forem informados dois pontos pertencentes à reta, então se utiliza o cálculo do "determinante". Se foram informados um ponto e a inclinação que a reta tem em relação ao eixo das abscissas (o ângulo), a tarefa se desdobra em primeiro determinar o coeficiente angular *m*, para em seguida escrever a equação a partir da expressão $y - y_0 = m\,(x - x_0)$.
Determinar a posição relativa de duas retas	Analisam-se os coeficientes angulares, na perspectiva de serem iguais ou inversos e simétricos.
Calcular da distância entre um ponto e uma reta	Aplica-se a fórmula $d_{Pr} = \left\| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right\|$.
Determinar a equação da circunferência	Fundamenta-se a partir da distância entre dois pontos.
Analisar a posição relativa de um ponto, de uma reta e de uma circunferência em relação à outra circunferência.	De forma genérica, a técnica para o enfrentamento desse tipo de tarefas é o cálculo da distância entre pontos.

Fonte: Andrade, 2012, p. 117.

Pelo exposto no Quadro 2, os tipos de tarefas são isolados uns dos outros, caracterizados por uso de técnicas específicas para cada tipo, sem evidenciar possíveis articulações que possam se vislumbrar entre os tipos de tarefas. O que configura realizações de OM pontuais e rígidas, contrárias à proposição de OMLRC[91] indicada como a estrutura mínima para o fazer docente.

Quanto ao estudo da reta, o primeiro Tipo de Tarefas é *determinar a equação da reta*. A técnica para enfrentar esse Tipo de Tarefas depende das informações fornecidas, se forem informados dois pontos pertencentes à reta, então se utiliza o cálculo do "determinante", sendo esse composto pelos dois pontos dados e um terceiro ponto genérico pertencente à reta; para a composição do determinante, utiliza-se um (1) na última coluna.

A respeito dessa técnica, dois docentes da comunidade de práticas chamam a atenção de que é um fazer semelhante ao da condição de alinhamento, porém não justificam o uso do "determinante", tal como os livros-textos.

Se a informação para determinar a equação da reta for um ponto e a inclinação que ela tem em relação ao eixo das abscissas (o ângulo), a tarefa se desdobra em primeiro determinar o coeficiente angular *m*, para em seguida escrever a equação a partir da expressão $y - y_0 = m\,(x - x_0)$, informada sem nenhuma justificativa.

[91] Organizações Matemáticas Locais Relativamente Completas (FONSECA, 2004)

Já no Tipo de Tarefas *determinar a posição relativa de duas retas*, a técnica utilizada requer a análise comparativa dos coeficientes angulares, na perspectiva de serem iguais ou inversos e simétricos. Outro Tipo de Tarefa é o *cálculo da distância entre um ponto e uma reta*. A técnica para esse tipo de tarefa se restringe à aplicação direta da fórmula:

$$d_{pr} = \left| \frac{ax_0 + by_0 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$$

sem estabelecer de que forma se chegou a esse modelo. Dessa maneira, enfrentar tarefas desse tipo se limita ao uso direto da fórmula em exaustivos exercícios de repetição.

Mais uma vez chegamos à compreensão de que por esse caminho o fazer docente gira em torno do Tipo de Tarefas que obedece a uma estrutura rígida de tipos de tarefas marcadamente isoladas, destituída de qualquer trabalho da técnica que possibilite a instituição de uma OMLRC no sentido proposto por Fonseca (2004).

Quanto ao estudo da circunferência, os Tipos de Tarefas iniciam por *determinar a equação da circunferência*, com a técnica fundamentada a partir da distância entre dois pontos, um dos pontos representando a localização do centro e o outro um ponto genérico da circunferência, sendo essa distância o raio. Mas, tal conexão fica limitada somente à apresentação da equação genérica da circunferência.

Outro Tipo de Tarefas é *analisar a posição de um ponto, de uma reta e de uma circunferência em relação à outra circunferência*. De forma genérica, a técnica para o enfrentamento desse tipo de tarefas é o cálculo da distância entre pontos. Nesse momento, se evidencia o resgate da técnica para se calcular a distância entre dois pontos como tarefa auxiliar para resolução dos tipos de tarefas vinculadas à circunferência, ou seja, de forma explícita surge a articulação entre os Tipos de Tarefas, porém sendo evidenciada pela utilização da mesma técnica, não descrevendo um verdadeiro trabalho na técnica, muito menos nos Tipos de Tarefas que possibilitassem no decurso do estudo a articulação e justificativas para esses Tipos de Tarefas, destacando inclusive a razão de ser desses Tipos de Tarefas nas OM/OD propostas no Ensino Básico.

Em resumo, a resposta R_1 produzida pela Comunidade a partir do sistema didático S_1 outorga o selo de legitimidade à resposta por nós apresentada, em Andrade (2012): Localizar pontos no plano; calcular a distância entre dois pontos dados e encontrar a equação do segmento de reta, como os Tipos de Tarefas Fundamentais.

Sempre com intuito de se obter um conjunto estruturado de tarefas com forte grau de integração e assim com maior grau de complexidade, a Comunidade referenda o estudo realizado no que se refere a necessidade de investigar a história e a epistemologia da Geometria Analítica, o que está em acordo com o programa epistemológico proposto por Yves Chevallard, como recursos para encontrar tarefas não explicitadas, ou omitidas, nas praxeologias escolares da Geometria Analítica, ou que podem eventualmente estar presentes na escola em outros temas ou setores em outras posições do currículo. De outro modo, a Comunidade postula a não suficiência dos livros didáticos investigados, da necessária visão do objeto no horizonte do currículo, para busca das Tarefas Fundamentais e que é traduzida no seguinte questionamento:

Q_1: *Quais são as tarefas presentes na história e epistemologia da GAP que de algum modo podem ser vinculadas a tarefas constantes nas praxeologias que vivem na escola?*

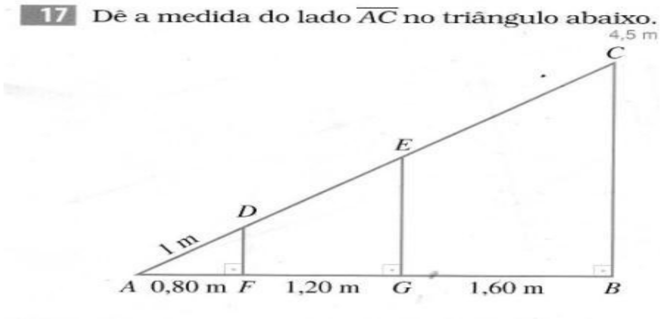
Possíveis respostas para esse questionamento são encaminhadas pelo sistema didático **S_2(Y, y, O_2)**, em que O_2 refere à obra sobre a história e epistemologia da Geometria Analítica, mais precisamente o trabalho de René Descartes (1637) apoiada pela tradução e comentários de Smith e Latham (1954), apresentadas em tópico anterior deste artigo (Tipos de tarefas no contexto histórico e epistemológico da geometria analítica).

A partir desse estudo e das mobilizações do Equipamento Praxeológico pessoal e institucional, a Comunidade estabelece possíveis relações entre as tarefas da GAP que vivem na escola com as tarefas também da escola sobre o Teorema de Tales e que se faz presente na obra estudada e que fundamenta a GAP.

Nesse texto, a Comunidade nota que Descartes recorre ao que hoje é institucionalizado como um tipo de tarefa do Teorema de Tales, "um feixe de retas paralelas determina sobre duas transversais segmentos proporcionais", tema de estudos no sétimo ano do ensino fundamental brasileiro.

Mais precisamente, para realizar a articulação entre as operações aritméticas com as geométricas, necessárias ao desenvolvimento da GAP, Descartes procedeu da maneira citada neste texto conforme a Figura 1. Se no contexto da epistemologia da GAP, as operações entre segmentos, pensadas como operações entre números, constituía-se em novidade, hoje são rotineiras nas tarefas escolares sobre o Teorema de Tales e se constituem como a resposta R_2 selada pela Comunidade como exemplo o tipo de tarefa da figura 4 extraída do livro didático do 9º ano utilizado na escola em que ocorreu a pesquisa empírica.

Figura 4 - Tipo de tarefas propostos para o estudo do Teorema de Tales nos livros



Fonte: Bianchini, 2006, p. 153

Assim, do sistema didático **S$_2$**, resulta que tipos de tarefas sobre o Teorema de Tales se põem como uma conexão que desencadeia o processo analítico que caracteriza a GAP e, nesse sentido, como um dos temas da área da geometria que possibilitaria ao professor reconstruir OM e OD que permitissem a articulação com outras OM e OD já vivenciadas ou por vivenciar nas instituições de estudos e, mais importante, pode ser assumida como tema que articula a Geometria Sintética com a Geometria Analítica. Dessa forma, uma quarta questão foi estabelecida pela Comunidade:

Q$_2$: *Qual a potencialidade do Teorema de Tales no currículo do ensino básico?*

Na perspectiva de enfrentamento da Q$_2$, se impõe um sistema auxiliar **S$_3$(Y, y, *O$_3$*)**. A Comunidade decidiu realizar investigações históricas e epistemológicas desse tema matemático de estudo propostos na grade curricular da escola, nesse sentido outras obras (*O$_3$*) são incluídas para estudos, mais precisamente, Guedj (2008); Boyer (1974); Eves (2004); e Struik (1989).

No percurso do estudo, um determinado membro da comunidade o professor A, destacou que *Tales possivelmente não estabeleceu relação de semelhança de triângulos, pois não havia triângulo, e sim relações entre segmentos, o triângulo é a construção da nossa mente*.

Esse argumento foi construído a partir do que descreve Guedj (2008, p. 43) sobre Tales ter deduzido “que no instante em que minha sombra for igual à minha estatura, a sombra da pirâmide será igual à sua altura”.

O destaque sobre a consideração ou não da semelhança de triângulos, provocou intenso debate, pois outros três professores L, V e G não concordaram, afirmando *que se Tales não estivesse pensando em semelhança de triângulos, não teria se preocupado com* *o instante e o dia, além do que ele era astrônomo e já deveria conceber a propagação retilínea dos raios solares.*

Dessa forma, novas questões foram levantadas como:

- ✓ **Q_3:** Qual relação existe entre o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos?
- ✓ **Q_4**: Qual relação existe entre o Teorema de Tales e as Proporções?
- ✓ **Q_5**: Tales, no episódio da medição da altura da Pirâmide, utilizou a teoria das proporções ou semelhança de triângulos?
- ✓ **Q_6** Ao propor para o aluno do sétimo ano encontrar o valor de **x**, este sendo a medida de um segmento de reta, resultado de uma figura formada por um feixe de retas paralelas cortadas por duas transversais, trabalharemos na área da álgebra ou da geometria?

Com a finalidade de esclarecer melhor as questões formuladas, a comunidade decidiu, por sugestão nossa (o diretor dos estudos), instituir sistemas didáticos auxiliares do tipo $\mathbf{S_4(y_m, \mathit{P}_j)}$ em que $y_m \in Y$ e P_j são praxeologias relativas às questões levantadas com a finalidade de apresentação de resultados e estudos em encontros futuros.

As praxeologias de estudo, vinculadas às questões levantadas anteriormente, foram eleitas em comum acordo na Comunidade, sendo estas: a demonstração do Teorema de Tales pelo método das proporções; aplicações relativas ao Teorema de Tales, buscando evidenciar as relações desse com outros temas e setores da Matemática escolar.

Ainda sobre o estudo histórico epistemológico do Teorema de Tales, em outro episódio, o Professor V, mostrando a obra de Guedj (2008, p.36), chama atenção do grupo ressaltando que esse autor afirma "que Tales mostrou que a cada triângulo podia corresponder uma circunferência: [...] isso significa dizer que três pontos não alinhados, *definem* não apenas um triângulo, o que é evidente, mas também uma circunferência, o que não é tão evidente". Essa argumentação provocou debate entre os componentes da Comunidade, no qual parte do grupo concordava com o que havia sido exposto e parte concordava parcialmente, como afirma o professor C: *no caso da circunferência, nem sempre, pois algumas condições deveriam ser consideradas*. Mas foi prontamente contestado por outro membro do grupo, também professor de desenho geométrico, como segue.

Professor G: *Considerando a condição de existência de um triangulo, é evidente a construção do triângulo dado três pontos não alinhados, então sempre por três pontos não alinhados passa uma circunferência, já que todo triângulo tem circuncentro e esse é sempre possível de ser determinado.*

Continuando, o professor V destacou, fazendo referência à condição de alinhamento tema da GAP, que: *é condição necessária para a construção de um triângulo que os três pontos não estejam na mesma linha*.

Nesse episódio, fica clara a importância da presença do professor de Desenho como membro da Comunidade, como condição enriquecedora para o PEP, como já destaca Chevallard (2009c) ao enfatiza a necessidade da codisciplinaridade no desenvolvimento desse dispositivo.

Em sequência aos estudos e provocados pela afirmação do professor de Desenho, os professores G e V expuseram algumas reflexões destacando a relação de imbricação que ocorre entre a condição de alinhamento de três pontos, o triângulo e a circunferência, conteúdos de estudos propostos como temas da GAP, na perspectiva de evidenciar a relação entre o método sintético e o método analítico. Por meio dessas reflexões, o grupo mais uma vez se reportou às OD desenvolvidas em sala de aula, as quais tomam como referências as OM propostas no livro didático, em que os temas mencionados são tratados sem nenhuma articulação.

Esse episódio provocou a manifestação dos membros do grupo, onde destacaram a importância dessa Comunidade e da elaboração da OM e OD de referência para estudos na escola.

Aqui, percebemos que o desenvolvimento do PEP na Comunidade de Práticas despertou nos professores a necessidade de processos de estudos, pois muitos episódios da história e da epistemologia da Matemática, inclusive da Matemática escolar, podem revelar articulações entre temas que não são evidenciados nas OM propostas por autores nos livros didáticos, como no caso do alinhamento de pontos, o triângulo e a circunferência, que para alguns componentes da Comunidade só ficou evidente não só com o estudo da obra, como também pelo Equipamento Praxeológico disponibilizado e mobilizado pela Comunidade. Isto está claro nas declarações a seguir.

Professor V: *só agora eu atentei para esse detalhe, que por três pontos não alinhados quaisquer podem ser traçada uma circunferência, isso permite que, ao falar de condição de alinhamento, eu já possa tratar da equação da circunferência*. Que é corroborado por outro membro da Comunidade quando afirma: Professor M: *Também, da equação da reta e da área de polígonos dados os vértices*.

Este episódio, de algum modo, expressa a compreensão da Comunidade sobre a potencialidade das tarefas relativas ao Teorema de Tales, de forma implícita ou explicita pode se constituir para o professor como tipos de tarefa fundamental, visto que possibilitam, na perspectiva do horizonte conteúdo, articulações e justificações da atividade matemática, do professor, e do aluno, relativo ao estudo das geometrias que vivem na escola básica.

Ainda, evidencia para a Comunidade o papel do professor como construtor e organizador de tarefas para o estudo. Revela a necessidade para o professor da análise histórico-epistemológica do saber matemático de referência, tanto no sentido do saber sábio como do saber escolar.

Outro ponto destacado foi durante o debate sobre a relação entre o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos, o grupo concluiu que se trata de temas imbricados, pois nas fontes por nós consultadas não ficou claro se Tales utilizou a semelhança de triângulos para estabelecer o teorema ou vice-versa.

Nesse sentido, o professor F acrescentou que *o Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos são as mesmas coisas*. Porém o grupo decidiu por aprofundar mais os estudos a fim de assumir ou não essa proposição, quando ficou claro para a Comunidade que é o nível de articulação entre esses temas, Teorema de Tales e a Semelhança de Triângulos, mais o estudo da teoria das proporções que poderia também, no sentido macro, estabelecer articulações mais profundas como as possíveis entre as áreas de Geometria, Aritmética e Álgebra.

Nesses termos, a Comunidade legitima como resposta $\mathbf{R_3}$ que o Teorema de Tales transversaliza o ensino básico, pois ele pode ser colocado como tarefa/tema que articula outros temas, setores e áreas, e de acordo com sua função na OM/OD, pode assumir o papel de tarefa, de técnica ou de tecnologia/teoria. Para melhor compreender a potencialidade do Teorema de Tales no currículo, a Comunidade destaca as condições e restrições advindas das relações docentes, da história, da epistemologia escolar sobre a vida do Teorema de Tales na escola.

Quadro 3 -Condições e restrições no estudo histórico e epistemológico do Teorema de Tales

Episódio	Condições	Restrições
Estudo Histórico e epistemológico do Teorema de Tales	- A presença explícita no currículo da instituição no sétimo ano do Ensino Fundamental. - A potencialidade de um fazer articulado com outros temas como semelhança de triângulos e a proporcionalidade. - A possibilidade de integração e transição entre os setores como a Geometria Sintética e a Geometria Analítica. - A capacidade de articulação entre a álgebra e a geometria do Ensino Básico. - A disposição de articulação com outras disciplinas como no caso o Desenho Geométrico.	-O isolamento temático no currículo e nas OM e OD institucionais. - A monumentalização desse tema por parte do fazer docente. - O isolamento em nível disciplinar. - A falta de percepção por parte do professor da presença do Teorema de Tales de forma implícita ou explícita em outros setores de estudos do Ensino Básico, que não da Geometria Plana.

Fonte: Andrade, 2012, p. 117

Parece claro que as restrições aqui expostas podem ser removidas por um PEP, como ora realizado, desde que as condições de codeterminação didática permitam. Outras respostas apresentadas pelos sistemas auxiliares não foram assumidas para um estudo mais aprofundado por diferentes razões. Os estudos sobre as demonstrações do Teorema de Tales realizadas por Eudoxo a partir do método das proporções tendo como motivação a análise numérica, foram devidas à complexidade que envolve essas obras e observando que a tarefa de demonstrar o Teorema de Tales não consta nas OM do ensino básico relativas a esse objeto, ou quando consta é apenas para medidas com números racionais.

Mas, em decorrência desse episódio e fruto do tratamento no sentido da subdivisão de segmentos que comprova o Teorema de Tales para segmentos cuja razão entre as medidas são números irracionais, a Comunidade observou que esse procedimento poderia revelar articulações com as frações.

Essa articulação com as frações desencadeou outro sistema didático, que não inserimos nesta comunicação por fugir de certo modo do propósito da questão em jogo **Q_2**, marcante pela negociação de significados, pois a Comunidade se debruçou intensamente no enfrentamento da problemática levantada, assumindo um problema intrínseco da Comunidade, com argumentações várias dos seus membros que se posicionaram destacando suas experiências no ensino de frações e observando esse estudo como de grande valia para suas práticas futuras.

Em consequência, a comunidade decidiu por construir futuramente uma OM para o ensino de frações em que as Tarefas Fundamentais poderiam ser buscadas no quadro das representações geométricas das frações, pois possibilitariam a articulação e a justificação das operações com frações, além de possibilitar o trabalho da técnica. Nesse momento, fica claro para a Comunidade o papel do professor como construtor de OM/OD, como articulador de tarefas, e sobretudo o problema da profissão docente: "O que (de fração) e como ensinar?"

Após a evidência da potencialidade dos Tipos de Tarefas Fundamentais em contribuir para o enfretamento do problema praxeológico do professor por prover uma construção de praxeologias intra e interrelacionadas em níveis de articulação que ascendem do tema aos níveis superiores de organizações praxeológicas e de codeterminação didática, a atenção da Comunidade se volta para velhos e novos questionamentos sobre as estruturas das OM e OD presentes nas instituições escolares, que carecem de investigação nos moldes metodológicos e didáticos aqui apresentados por meio do PEP, entre eles, os seguintes:

✓ Quais as relações entre a Geometria Plana e a Geometria Analítica?

✓ Por que usar determinante para encontrar a equação da reta e mostrar que três pontos estão alinhados?

✓ Qual o papel de cada um dos tipos de equações da reta: segmentária, paramétrica, geral, reduzida e vetorial?

✓ Para que calcular as coordenadas do ponto que representa o baricentro de um triângulo?

Nessa rede de tessituras complexas, a comunidade expressou a necessidade de uma melhor compreensão da questão Q_1, propondo outras questões derivadas:

Q_7: *Como eleger as Tarefas Fundamentais?*

Q_8: *Esse tipo de tarefas, as fundamentais, sempre existem, seja qual for a OM relativa um determinado objeto matemático de estudo?*

Esses questionamentos refletem a complexidade na eleição das Tarefas Fundamentais, que não se configuram como instrumentos estáticos e pré-estabelecidos, pois estão além da história e epistemologia do saber e intrinsecamente ligadas à intencionalidade didática, por exemplo, da função que pode assumir no processo de estudo relativo aos momentos didáticos[92]. Isso implica na atenção às condições de vida

[92] Não há de se esperar que a (re)construção, no curso de um processo de estudo de uma determinada organização matemática se organize de uma forma única. Mas verifica-se, no entanto, que seja qual for o caminho de estudo, certos *tipos de situações* estão necessariamente presentes, mesmo se são muito variáveis, tanto no plano qualitativo como no plano quantitativo. Chamaremos esses tipos de situações

das tarefas no tema, no setor e na área e, em resumo no que permite o currículo da escola em confronto com o equipamento praxeológico da instituição docente. Nesses termos, a Comunidade coloca outra questão:

Q_9: *Em acordo com as condições institucionais e a instituição docente quais seriam as possíveis Tarefas Fundamentais para o estudo da Geometria Analítica Plana?*

Nesse caminhar, seguindo os questionamentos Q_7, Q_8 e Q_9, se acentua na Comunidade a importância da exposição de seus membros das suas relações com o saber que podem ser traduzidas a partir de suas práticas docentes com este saber, que podem revelar novas condições que venham encaminhar as tarefas fundamentais. Assim, a Comunidade opta por iniciar com o confronto das práticas na área da geometria e no setor da Geometria Analítica.

12.4.1 Práticas dos professores A e Gu para o estudo da Geometria Analítica Plana

Na perspectiva de compartilhar suas experiências no ensino da GAP, os professores A e Gu enfatizam que seguiam as OM/ OD constantes nos livros didáticos utilizados como referências na escola, com algumas adaptações por eles realizadas. Isso implicou em questionamentos feitos pela Comunidade, do tipo *como eram realizadas as articulações, se é que tinham essa preocupação, se nesses textos não eram atendidas e, quando feitas, não eram evidenciadas?*

Em resposta, os professores A e Gu comentaram que as faziam, porém de forma muito tímida, ficando quase que evidente o isolamento entre os temas desse setor e, em algumas vezes, entre as tarefas propostas em cada tema.

Quando questionados sobre o estudo dos vetores, tema da Matemática componente da grade curricular, esses professores destacaram que, como no livro didático (YOUSSEF *et al.*, 2005) não há nenhuma referência a esse assunto, eles elaboram material complementar e seu estudo se dá após todo o estudo da GAP.

Após o relato sobre suas práticas, as quais eles afirmam estarem baseadas nas propostas constantes nos livros-textos utilizados na escola, outros professores da Comunidade relataram que também seus fazeres docentes para o estudo da GAP se assemelham com esses, assumindo como uma das principais justificativas a obrigatoriedade de utilização do livro didático. Porém, a Comunidade reconhece a

---

momentos de estudo ou momentos didáticos porque se pode dizer que, seja qual for o caminho seguido, *se chega forçosamente a um momento* em que tal ou qual "gesto do estudo" deverá ser cumprido (Chevallard, 1999, p. 21, tradução nossa, grifos do autor).

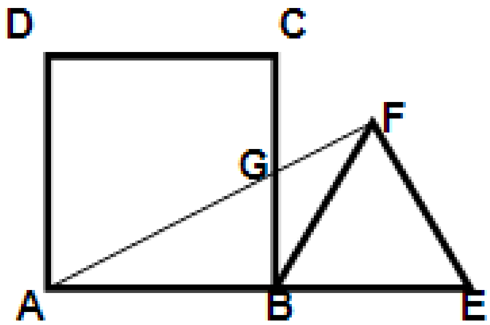
desarticulação entre os temas, setores e áreas presentes nessas OM/ OD, e também que esse fazer docente pouco contribui para o enfrentamento do autismo temático do professor.

Também foi feito aos professores o seguinte questionamento: *Quais relações eram estabelecidas em suas práticas entre a Geometria Plana (método sintético) e a Geometria Analítica?* O professor A relata que não destacava essas articulações, enquanto o professor Gu descreve que propunha atividades aos alunos em que buscava evidenciar que um mesmo problema poderia ser resolvido por um dos métodos: sintético, vinculado à Geometria Plana; ou analítico, vinculado, nesse caso, à GAP.

Para ilustrar como fazia essa relação, o professor Gu propôs o sistema didático, **S_5(Y, Gu, p_i),** em que p_i é o estudo da seguinte questão:

A figura a seguir mostra um quadrado ABCD e um triângulo equilátero BEF, ambos com lados de medida 1 cm. Os pontos A, B e E são colineares, assim como os pontos A, G e F. Qual é a medida da área do triângulo formado pelos pontos BGF?

Figura 5 - Área do triângulo BGF



Fonte: Andrade, 2012, p. 129

Para responder a essa questão, a Comunidade pôs-se a estudar as possíveis soluções com técnicas tanto da Geometria Plana como da Geometria Analítica. Utilizando técnicas da Geometria Plana, uma das soluções apresentadas **(R_{51})** inicia por reconhecer que o triângulo ABF é isóscele, pois AB$= \mathrm{BF} = 1$, e como o ângulo $\mathrm{A\hat{B}F}$mede 120º, posto que é suplementar do ângulo $\mathrm{F\hat{B}E} = 60$º, então $\mathrm{B\hat{A}F} = \mathrm{A\hat{F}B} = 30$º. Isso implica no triângulo BGF ser também isósceles, visto que $\mathrm{B\hat{F}G} = \mathrm{G\hat{B}F} = 30$º, pois $\mathrm{A\hat{C}B} = 90$º e $\mathrm{F\hat{B}E} = 60$º, já que $\mathrm{G\hat{B}F}$, $\mathrm{A\hat{C}B}$ e $\mathrm{F\hat{B}E}$ formam um ângulo raso. Assim, aplicando a lei dos senos no triângulo BGF, teremos $\frac{\mathrm{BG}}{\sin 30°} = \frac{\mathrm{BF}}{\sin 120°}$ resolvendo teremos $\overline{BG} = \frac{\sqrt[3]{3}}{3}$. Dessa forma para calcular a área do triangulo BGF, aplica-se a expressão que calcula área do triângulo, quando se conhece o ângulo e os lados adjacentes a este resultado é *A*

□ $\frac{\mathrm{BF} \times \mathrm{BG}}{2} \times \sin 30°$, cujo resultado é:

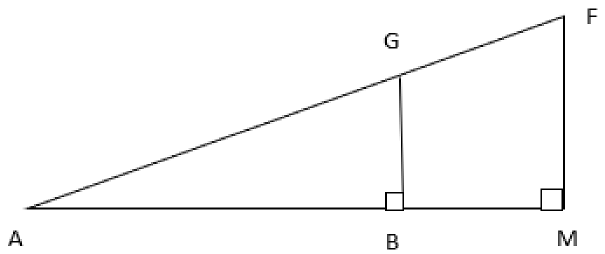
$$A_\Delta = \frac{\sqrt{3}}{12}\ u.a.$$

Com as técnicas da Geometria Analítica, foi proposta a seguinte solução **(R_{52}):** localizam-se os vértices da figura como pontos em um sistema de coordenadas ortogonais, tendo como a origem o vértice A(0, 0) do quadrado, daí temos B(1, 0), E(2, 0) e C(1, 1). Para encontrar as coordenadas do ponto F, calcula- se a altura do triângulo BEF relativa a F, $h_f = \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{1\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, sendo essa a ordenada de F e sua abscissa $\frac{3}{2}$, já que a altura em um triângulo equilátero também é mediana, portanto, as coordenadas de F são $(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$. As coordenadas de G podem ser encontradas como ponto de intersecção da reta que passa pelos pontos C e B e a reta que passa por A e F, para isso encontra-se a equação da reta $\overleftrightarrow{CB}$ que resulta em $x - 1 = 0$, e a equação da reta $\overleftrightarrow{AF}$ representada por $3y - \sqrt{3}x = 0$. Resolvendo o sistema $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ 3y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases}$, encontramos as coordenadas do ponto G $(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$. Com as coordenadas dos pontos B(1, 0), F$(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ e G$(1, \frac{\sqrt{3}}{3})$, pode-se calcular a área do triângulo aplicando a técnica da área do polígono quando se conhecem os vértices, $A_\Delta = \frac{|D|}{2}$, em que D é o determinante composto pelos pontos que representam os vértices do polígono, $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 1 & \frac{\sqrt{3}}{3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{6}$, sendo

$$A_\Delta = \frac{|D|}{2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{12}\ u.a.$$

Ao final da exposição dessa solução, o professor V expressou que em vez de ter que encontrar as equações das retas, para em seguida resolver o sistema para determinar as coordenadas do ponto G, poderia ser usado o Teorema de Tales, modelando o triângulo AFM, em que M é o ponto médio do segmento $\overline{BE}$.

Figura 6: Aplicação do Teorema de Tales



Fonte: Andrade, 2012, p.130

Aplicando o Teorema, teremos, $\frac{\overline{GB}}{\overline{FM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AM}}$, de onde resulta que $\overline{GB} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} x 1}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

O trabalho com essa questão despertou na Comunidade a possível razão de ser da Geometria Analítica, qual seja, como no exposto por Gascón (2003, p. 29), "as técnicas da Geometria Analítica constituem a resposta a algumas das limitações que apresentam as técnicas sintéticas para resolver problemas genuinamente geométricos propostos sem utilizar coordenadas". Por outro lado, o mesmo autor assevera que em muitos casos é quase que imprescindível o uso de técnicas sintéticas para previamente sugerir a estratégia que se usará posteriormente com as técnicas analíticas.

Quanto à busca das Tarefas Fundamentais, dentre as tarefas pertencentes ao Modelo Epistemológico de Referência (MER), assumido por estes professores a partir das OM e OD presentes nos livros didáticos, a Comunidade sela a resposta R_{pi} que estas não diferem das já elencadas anteriormente, reafirma a potencialidade do Teorema de Tales, e acrescenta que os métodos sintéticos e analíticos devem ser propostos de modo articulado na perspectiva da complementariedade de ambos.

Isto revela que as condições para eleição das Tarefas Fundamentais estão também relacionadas à intencionalidade didática em articular tarefas não só relativas de um setor em estudo, mas com tarefas de outros setores, como no caso da Geometria Plana e a Geometria Analítica.

Após essas compreensões, foi proposto um novo sistema didático à Comunidade para um aprofundamento sobre essas relações entre a Geometria Analítica e a Geometria Plana **S_6(Y, y, O_4)**, em que a obra (O_4) utilizada é o trabalho de Gascón (2003) que trata dos efeitos do autismo temático sobre o estudo da geometria no Ensino Básico.

Nesse estudo, dentre as questões levantadas, o autor destaca o uso da construção com régua e compasso como técnica que auxilia de forma bastante significativa na escolha e aplicação das técnicas da Geometria Analítica, pois

> [...]a eficácia para resolver certos tipos de problemas de Geometria Analítica melhora de forma muito significativa se se utiliza uma parte do tempo em traduzir os problemas ao âmbito da Geometria Sintética e resolvê-los, por exemplo, com régua e compasso. (Gascón, p. 29, tradução nossa).

Essa afirmativa de Gascón ajuda a Comunidade a selar como resposta Ro_1 a disciplina Desenho Geométrico no currículo do Ensino Básico na perspectiva de possibilitar articulação entre a Geometria plana e a Geometria Analítica já observada na obra de Descartes. Porém, o professor G, argumentou que para isso, apesar do que já foi feito, seria necessária uma reformulação tanto no conteúdo de ensino como na metodologia da disciplina Desenho Geométrico, para que ela assumisse esse "novo papel", que segundo o entendimento da Comunidade, deveria ser seu principal objetivo.

A compreensão da Comunidade recai sobre as tarefas do desenho geométrico como aquelas que poderiam promover a articulação e justificação entre as tarefas da Geometria Plana e, por conseguinte entre as tarefas das geometrias planas e analíticas, daí que a busca das tarefas que possuem a noção de Tarefa Fundamental pode ser buscada em outras disciplinas sob as condições e restrições institucionais. Isto revela que a complexidade para eleição das tarefas extrapola o nível da disciplina matemática e implica no papel da Comunidade em outros níveis de codeterminação didática.

A resposta da Comunidade em parte pode se materializar no currículo escolar pelo encaminhamento programático que a Comunidade empreende a disciplina Desenho Geométrico.

Esta disciplina se caracteriza pelas construções no nível do desenho técnico, com poucas relações com a Matemática daí a necessidade de mudanças visando aproximar cada vez mais o Desenho da Matemática. Essas mudanças passam a ser condicionantes para a articulação entre essas disciplinas e seus objetos de estudo. Uma dessas mudanças sugeridas é que o estudo objetivasse, a partir das construções, as demonstrações e resoluções de problemas da geometria, como por exemplo, do Teorema de Tales, da Semelhança de Triângulos, da inscrição e circunscrição de polígonos em circunferências etc., bem como, a compreensão dos elementos, como apótema, altura, mediana, mediatriz, baricentro, ortocentro, bissetriz e outros, com suas respectivas funções no desenho.

Porém, muitas restrições poderão emergir para que de fato isso aconteça, dentre elas o destaque está na resistência dos professores em concretizar essas mudanças nas ementas do desenho Geométrico, alegando que estariam repetindo assuntos que se estuda em Matemática, que se alia à falta de uma organização de referência para que os professores possam seguir no tempo do ensino da disciplina quando esta está inserida na grade curricular da escola.

Ao concordar com o professor, a Comunidade assume também como resposta R_{o2} construir futuramente essa organização didática de referência para o ensino do Desenho Geométrico, tomando por base a articulação entre os setores da geometria em uma perspectiva do horizonte do conteúdo ao longo da educação básica. Fica claro aqui, mais uma vez, a Comunidade reconhecendo seu papel de construtora de organizações para o ensino de modo a atender um modelo epistemológico de referência.

Após essas reflexões sobre a prática docente dos professores A e Gu com a GAP, a Comunidade nos solicitou que expuséssemos a prática relativa a esse setor e que foi vivenciada na escola configurando-se como a parte empírica da dissertação de mestrado (Andrade, 2007), denominada de Geometria Analítica Plana: praxeologias matemáticas no ensino médio.

12.4.2 Práticas do professor Andrade para o estudo da Geometria Analítica Plana

Iniciamos por expor as intencionalidades da prática, buscando um estudo da Geometria Analítica Plana em conexões com o tema desse setor: o estudo dos vetores. Relato que as tarefas eram propostas aos alunos buscando a construção do conhecimento a partir da interação em uma comunidade de estudos e elaboradas em forma de problemáticas a serem enfrentadas por eles levando em consideração seus conhecimentos matemáticos anteriores.

Nesse sentido, tivemos que romper com o MER institucionalizado que atendia as OM e OD propostas no livro-texto (DANTE, 2005), que não tratava do estudo dos Vetores. Assim, passamos a elaborar as OM e OD tomando como referência obras utilizadas em estudo no nível superior, estabelecendo OM e OD diferentes daquelas institucionalizadas no ensino básico até então.

A primeira atividade da OD que teve como tarefa para os alunos uma breve pesquisa na história da Matemática a respeito do surgimento da Geometria Analítica e dos Vetores, objetivando a construção de um texto, destacando em que parâmetros ou contextos deram-se o desenvolvimento da Geometria Analítica e do estudo dos Vetores, bem como de outros conhecimentos matemáticos que possam ter servido de alavanca estimuladora para o estudo e desenvolvimento desses conhecimentos, destacando também a sua importância para a Matemática e suas aplicações no estudo de outras áreas.

O objetivo dessa tarefa era provocar o interesse dos alunos no estudo desses conteúdos, visando à razão de ser do estudo da GAP, bem como lhes possibilitar possíveis identificações de conhecimentos anteriores que possam ser resgatados a fim de possibilitar a assimilação de novos conhecimentos em processos de estudos articulados entre o novo e o velho.

Nas apresentações, pudemos observar que quase todos os grupos de alunos destacaram que os estudos da Geometria Analítica e dos Vetores não surgiram como fruto da ideia de uma pessoa e nem em um único momento histórico.

O sistema de coordenadas é assumido em posição de mais inclusivo e agregador da GAP e dos Vetores e, em termos praxeológicos, como um tema de grande potencial de articulação com os outros temas. Nesse destaque, a Comunidade ratifica esse tipo de tarefas como aquele que poderia ser eleito como um tipo de Tarefas Fundamentais.

O conceito de vetor como um conjunto de segmentos orientados, permite que possamos traçar segmentos, nesse plano e em posições diferentes, que mantém as características de direção, sentido e comprimento do primeiro.

No estudo do ponto já se evidenciava o conceito de vetores como um conjunto de segmentos orientados, com a mesma direção, sentido e magnitude. No cálculo da distância entre dois pontos, a interpretação dada foi do comprimento do segmento orientado, e assim, considerando esse segmento como um representante de um vetor que foi interpretado como o módulo do vetor.

Isso implica que calcular a distância de um ponto qualquer até a origem de um determinado sistema, seja ele ortogonal ou não, pode ser feito utilizando a lei dos cossenos, o que se caracterizou como a tecnologia para esse tipo de tarefas. As relações trigonométricas em um triângulo qualquer seria a teoria para a realização desse tipo de tarefas.

Dessa forma, a Comunidade pôde concluir que a técnica desenvolvida para realização da tarefa necessitou do resgate das relações trigonométricas no triângulo, as quais identificamos como a teoria desse tipo de tarefas, mais precisamente da lei dos cossenos, que é a tecnologia.

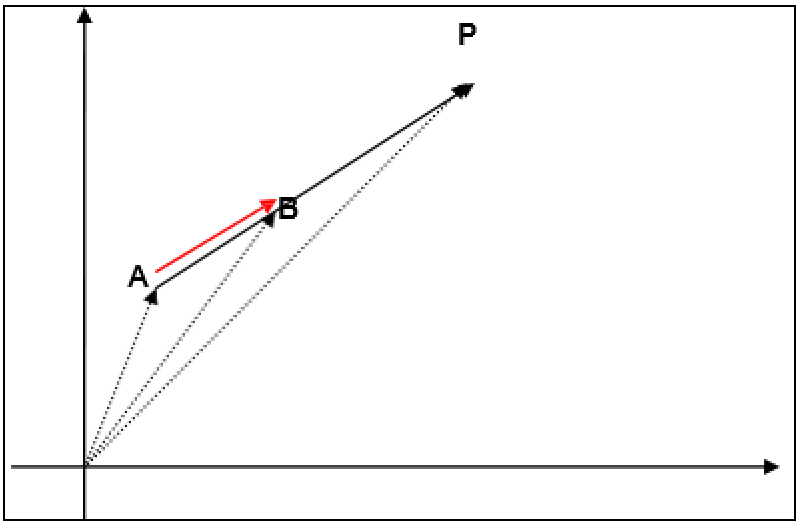
Assim a lei dos cossenos parece ser uma tarefa/tema da trigonometria que possibilita a articulação entre a trigonometria e a GAP, e nesses termos, para a Comunidade ficaram relativamente evidenciadas as conexões existentes entre o estudo dos triângulos, a lei dos cossenos e o Teorema de Tales.

Ainda como socialização da prática, descrevemos que propusemos aos alunos tipos de tarefas em um sistema de eixos ortogonais. Como respostas para o enfrentamento, os alunos concluíram que poderiam aplicar a lei dos cossenos para calcular a distância entre dois pontos, porém isso se caracterizava como aplicação do Teorema de Pitágoras, que no entender dos alunos facilitava o fazer.

Isso nos permitiu acentuar aos nossos pares o porquê de os livros-textos só tratarem as questões em sistema ortogonais, o que em nosso entender torna opaco todo um trabalho na técnica que poderia ser realizado a fim de proporcionar o desdobramento de uma Organização Pontual (OMP) a uma OMLRC.

Para o tipo de tarefas *escrever a equação da reta*, a seguinte técnica foi adotada, tomando um representante do vetor $\overrightarrow{AB}$ no sistema de eixos ortogonais de coordenadas (a,b), e um escalar t$\in$ R, ao multiplicar o vetor $\overrightarrow{AB}$ por escalar inteiro maior que um (t >1), encontramos, como resultado, um outro vetor que chamaremos de $\overrightarrow{AP}$, cujas coordenadas serão (ta, tb). Isso implica $\overrightarrow{AP}$= t ($\overrightarrow{AB}$), e não esquecendo que $\overrightarrow{AP}$ = P – A e $\overrightarrow{AB}$= B – A, a representação no sistema é:

Figura 7 – Gráfico do produto de um Vetor por um escalar no sistema de coordenadas ortogonais



Fonte: Andrade, 2012, p. 135

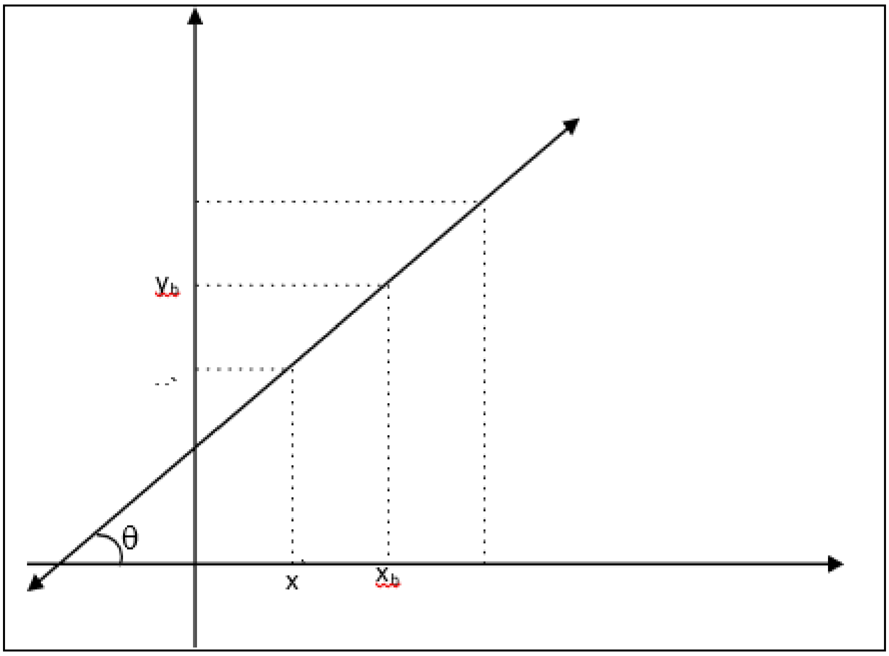
Sendo $\overrightarrow{AB}$(a, b) e considerando $\overrightarrow{OA}$(x`, y`), $\overrightarrow{OP}$(x, y) e $\overrightarrow{OB}$(x_b, y_b), daí que a = x_b - x`e b = $y_b$ — y`. Tomando t ($\overrightarrow{AB}$) = $\overrightarrow{OA}$ + $\overrightarrow{OP}$, que em termos de coordenadas podemos escrever t (a, b) = - (x`, y`) + (x, y), que aplicando a igualdade entre vetores chegaremos em $\begin{cases} x = x' + t.a \\ y = y' + t.b \end{cases}$. Essa é a expressão que representa a equação da reta que passa pelos pontos A e B, ou seja, equação da reta que passa pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ (representação do vetor, que reconhecemos como equação paramétrica da reta.

Quando questionado pela comunidade sobre as outras formas de representação da reta, presente nos livros didáticos, a resposta a esse questionamento se deu a partir de manipulações algébricas reescrevendo a equação paramétrica afim de isolar o parâmetro t, como a seguir.

$$\begin{cases} x = x' + t.a \\ y = y' + t.b \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} t = \frac{x-x'}{a} \\ t = \frac{y-y'}{b} \end{cases} \longrightarrow \frac{x-x'}{a} = \frac{y-y'}{b} \longrightarrow y - y' = \frac{b}{a}(x - x')$$

Feito isso, substituímos a e b, tomados anteriormente como, a = x_b - x\`e b = $y_b$ — y\`, na equação teremos: $y - y' = \frac{\text{yb} - \text{y`}}{\text{xb} - \text{x`}}(x - x')$, que implica em $y = y + \frac{\text{yb} - \text{y`}}{\text{xb} - \text{x`}}(x - x')$ onde identificamos $\frac{\text{yb} - \text{y`}}{\text{xb} - \text{x`}}$ como a razão de segmento que indica a inclinação da reta em relação ao eixo das abscissas, denominado nos manuais como coeficiente angular da reta (o que representaremos, a partir de agora, por **m**), ou seja, em termos trigonométricos é a tangente do ângulo que a reta forma com o eixo horizontal.

Figura 8 - Gráfico para identificar o coeficiente angular



Fonte: Andrade, 2012, p.137

$$tg\theta = \frac{\text{yb} - \text{y`}}{\text{xb} - \text{x`}} \longrightarrow \text{m}= \frac{\text{yb} - \text{y`}}{\text{xb} - \text{x`}}$$

Sendo assim, para encontrar a equação da reta suporte que passa pelo segmento orientado $\overrightarrow{AB}$, dados A (x_a , y_a) e B(x_b , y_b), usaremos a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{y = y_a + \frac{y_b - y_a}{x_b - x_a}(x - x_a)}, \text{ ou } \boldsymbol{y = y_a + m(x - x_a)}.$$

Essa expressão representa a tecnologia da técnica para resolver um tipo de tarefas que é a determinação da equação da reta.

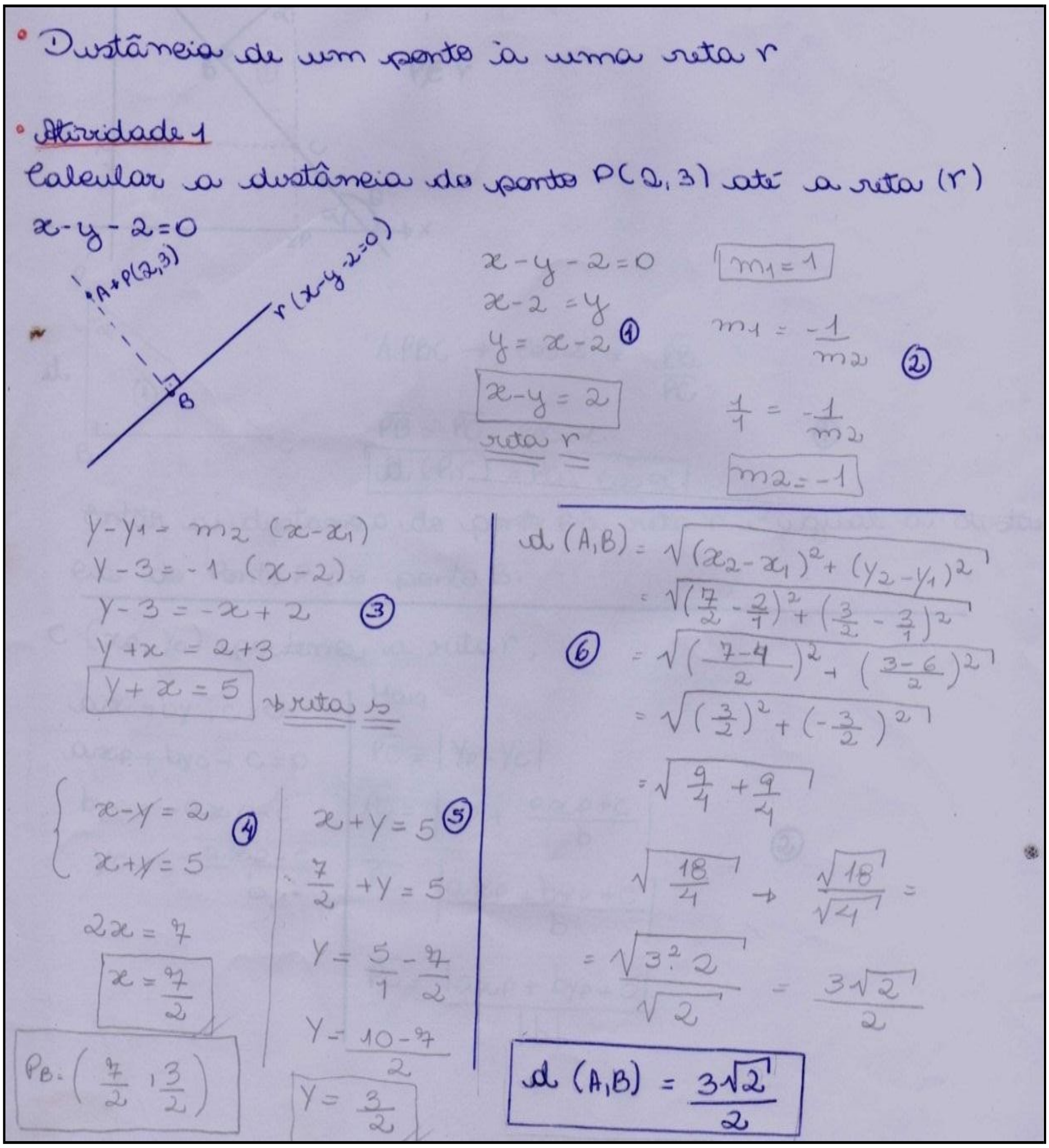
Após essa exposição, a Comunidade expressou algumas preocupações com as condições institucionais como a avaliação, a preparação para o vestibular, a carga horária etc. Em resposta, sobre a avaliação, obedecemos às orientações da escola, uma parte dessa contínua e outra parte uma prova comum para todas as classes da série, elaborada por um professor escolhido entre os que trabalham com o setor (Geometria Analítica). A parte contínua geralmente se constitui em pequenos testes, em nosso caso ela aconteceu no processo, fruto do comprometimento com os estudos desencadeado a partir da OM/OD posta em cena.

Quanto à carga horária, não tivemos problema, pois conseguimos desenvolver o estudo em um bimestre e meio, diferente do que ocorria em práticas anteriores em que levávamos dois bimestres para trabalhar os mesmos conteúdos, isso implicou em ganho de tempo que possibilitou propormos aos alunos uma grande variedade de problemas, inclusive de vestibulares, a fim de que eles construíssem um fazer rotineiro no uso de determinadas técnicas para tipos de tarefas semelhantes, atendendo assim às exigências institucionais, como a preparação para os concursos vestibulares.

Houve também indagação sobre outros tipos de tarefas, como: *o cálculo do baricentro; do ponto médio; da área do triângulo dados os vértices; as posições relativas de duas retas etc*. A esse respeito, acentuamos que seus estudos derivaram dos estudos do sistema de coordenadas*, do ponto e da reta* como expostos anteriormente, como no caso do tipo de tarefas: *determinar a distância entre um ponto e uma reta*, que optamos por apresentar uma prática diferente das que estão presentes nos livros didáticos.

Nesta prática, após trabalharmos as tarefas vinculadas ao cálculo da distância entre dois pontos e da determinação da equação do segmento de reta, propomos aos alunos a tarefa de determinar a distância de um ponto dado a uma reta dada como nas construções abaixo (figuras 9 e 10) que revelam o enfrentamento dessa tarefa a partir de outras tarefas.

Figura 9 – Construção dos Alunos para o enfrentamento do tipo de tarefas, determinar a distância de um ponto dado a uma reta dada (1)



Fonte**:** Andrade, 2012, p. 139

Nessa construção observamos que para enfrentar a tarefa proposta o aluno enfatiza as técnicas da Geometria Analítica, mais precisamente composta pelo enfrentamento dos tipos de tarefa**:**

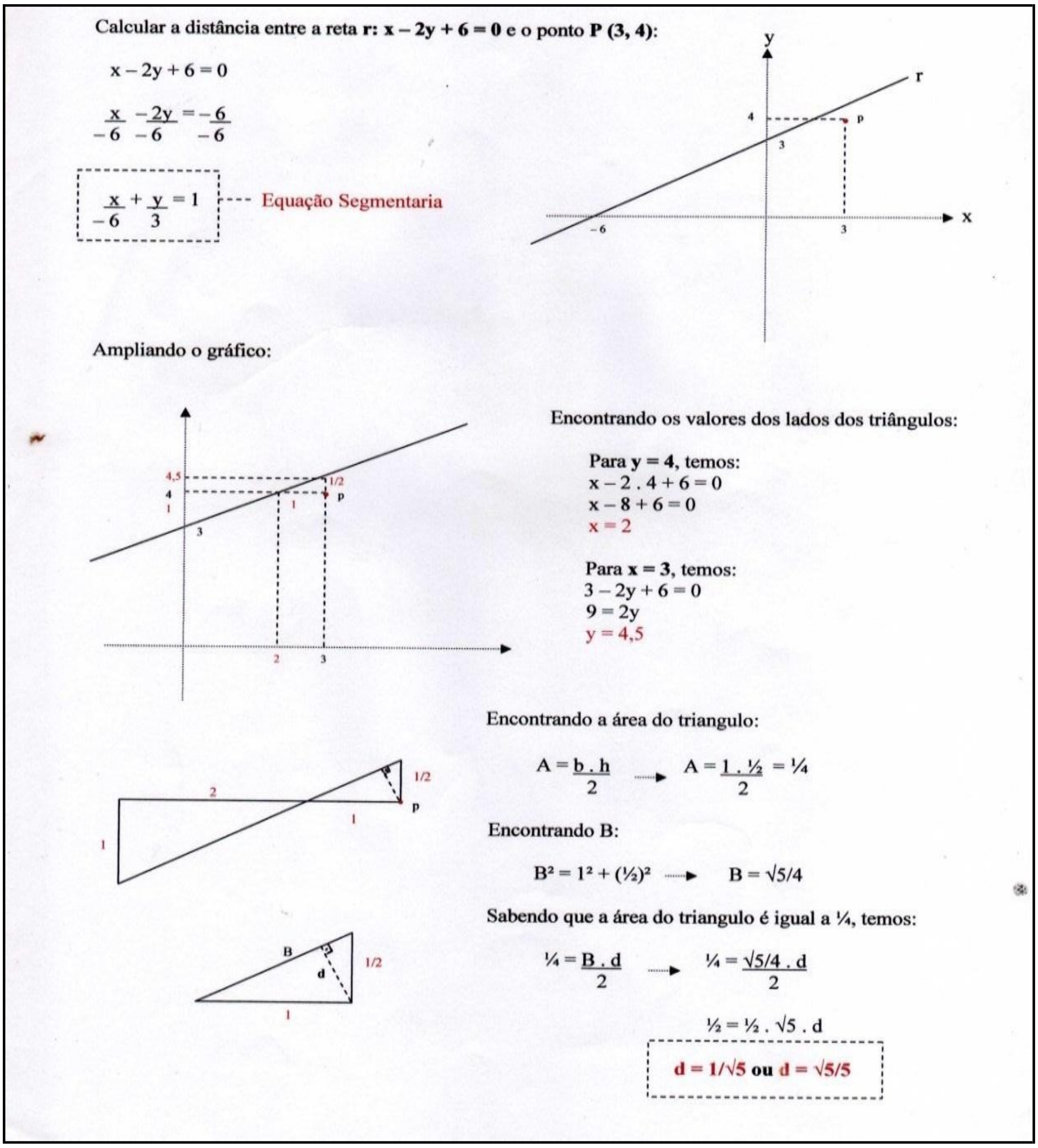
t$_1$- escrever a equação da reta perpendicular passando pelo ponto dado;

t$_2$- determinar o ponto de intersecção entre as retas;

t$_3$- determinar a distância entre dois pontos.

Aqui a Comunidade pôde observar que o aluno apresenta domínio das tarefas que tínhamos elegido como Tarefas Fundamentais e com a movimentação destas, associada às tarefas; determinar o ponto de intersecção entre retas e encontrar a reta perpendicular à reta dada, ele pode responder esse tipo de tarefas.

Figura 10 – Construção dos Alunos para o enfrentamento do tipo de tarefas, determinar a distância de um ponto dado a uma reta dada



Fonte: Andrade, 2012, p. 140

Nessa segunda resposta, o aluno utiliza técnicas da Geometria Analítica inicialmente a partir da tarefa escrever a equação segmentária da reta objetivando a representação gráfica; ou seja, apoia seu fazer no desenho, o que possibilitaria a utilização de técnicas da Geometria Plana Sintética. Assim, as técnicas utilizadas que traduzimos por enfrentar as tarefas do tipo:

t_1- escrever a equação segmentária da reta;

t_2 - modelar um triângulo sendo o ponto P (3,4) um de seus vértices;

t_3- determinar os pontos de intersecção da reta r com as retas y=4 e x=3, que permite encontrar os outros dois vértices do triângulo; encontrar as medidas dos lados desse triângulo;
t_4- determinar a área desse triângulo a partir dos catetos, já que esse triângulo é retângulo;
t_6- determinar a hipotenusa desse triângulo; determinar a altura desse triângulo relativo à hipotenusa.

Essa movimentação de tarefas possibilitou a esse aluno um fazer articulado entre vários temas não só ao nível de setor, extrapolando para os setores da geometria.

As diferenças nas técnicas utilizadas entendemos ser consequência do EP de cada aluno, visto que não se firmou no contrato didático que as técnicas para o enfrentamento da tarefa deveriam ser da Geometria Analítica, ao contrário, o contrato didático possibilitava ao aluno a liberdade de recorrer ao seu EP para escolher as técnicas que lhe proporcionassem um fazer justificado e inteligível.

Diante do exposto, alguns professores da Comunidade manifestaram suas compreensões sobre essa prática, enfatizando, a condição de que ela só foi possível por ter sido desenvolvida nesta escola, pois os alunos da escola trazem consigo certa "bagagem" de conhecimentos anteriores que possibilita a eles revisitá-los para construir o novo sem a interferência direta do professor, o que é diferente em certas escolas públicas estaduais.

Essa afirmação foi criticada por outros membros da Comunidade, destacando a necessidade do resgate de conhecimentos anteriores para reconhecer o novo, seja qual for o aluno ou a escola. Pode ser que uns mais outros menos, mas todos possuem conhecimentos anteriores que podem ser mobilizados na perspectiva do estudo de novos conhecimentos.

Mas, sobretudo, fica claro que resolver situações problemáticas é mobilizar um conjunto de tarefas que respondem a questões determinadas.

Assim sendo, esses professores afirmam que há possibilidade sim, do desenvolvimento dessa prática, vivenciada pelo professor Andrade, nas escolas públicas estaduais, sendo necessário fazer adaptações nas OM/ OD considerando as instituições em jogo. Isso revela a tomada de consciência da Comunidade de práticas da escola em que se estabeleceu a comunidade em que ocorreu o PEP, sobre as ingerências das instituições no fazer docente.

12.4.3 Praxeologias construídas na comunidade de práticas desenvolvidas pelo professor V na escola

Após a apresentação das práticas, tomando como base os estudos realizados no contexto histórico e epistemológico, nas análises dos livros didáticos e, principalmente dos relatos das práticas compartilhadas pelos membros do grupo, a Comunidade acorda entre seus membros a importância dos seguintes tipos de tarefas:

- ✓ localização de pontos no plano
- ✓ determinar a distância entre dois pontos;
- ✓ escrever a equação da reta;
- ✓ determinar a medida de um segmento a partir e outros segmentos;

A Comunidade assegura que de uma ou de outra maneira os três primeiros tipos de tarefas, da GAP e o último até então pensado como específico da geometria sintética, lhes parecem ser os que se caracterizam como fundamentais, pois estão presentes nas práticas que vivem na escola e expressam a potencialidade de justificação e articulação com as outras tarefas, parecendo transversalizar o setor da Geometria Analítica, ora assumindo o papel de tarefa, ora sendo utilizado como técnica, ou até mesmo como tecnologia/teoria, o que expõe a funcionalidade dos elementos de uma praxeologia.

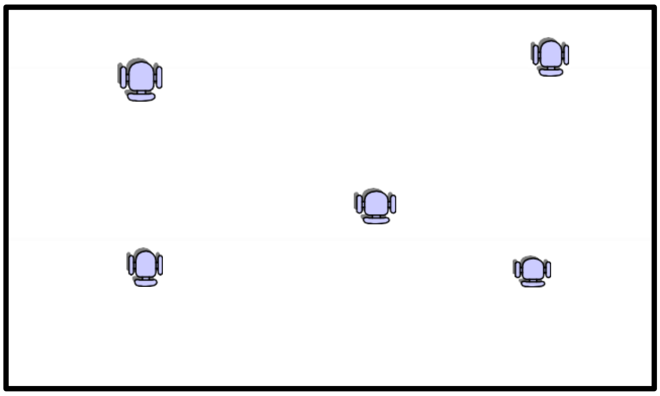
Essa ordem, numa compreensão à luz da TAD, não se deu ao acaso, mas emergiu como produto dos confrontos das práticas, de suas interpretações à luz das obras e praxeologias estudadas, em diferentes sistemas didáticos pela Comunidade, e aponta a estrutura do modelo epistemológico a ser tomado como referência para a consecução de seu objetivo quando essa Comunidade assume o papel de construtora de OMRE que se constitua em uma OMLRC a partir da movimentação intencional de tarefas à luz da noção das tarefas fundamentais.

Assume que a OM deva ser construída em dialética com a OD; ou melhor, a Comunidade assume que a OM/OD terá de se desenvolver em um processo de investigação em que as tarefas sejam apresentadas aos alunos em forma de questionamentos que exijam dos alunos a mobilizações de seus EPs para enfrentá-los.

Isso implica novas condições a serem consideradas pela comunidade, visto que o aluno nesse novo sistema não seja mais hipotético, é um aluno que viverá as OM frutos dessa Comunidade e não as OM dos livros-textos e das construídas na singularidade de um professor. Significa então que esse novo sistema se configura no PEP como um sistema auxiliar da seguinte maneira $\mathbf{S_7(X, y, \rho_k)}$, em que **X** é o conjunto de alunos do terceiro ano, **y** o professor V membro da Comunidade e $\boldsymbol{\rho}$ o conjunto de praxeologias matemáticas construídas na comunidade e postas em ação na classe, constituindo-se em organizações didáticas.

Desta forma e com o objetivo de tratar o Tipo de Tarefas “Localizar um objeto no plano”. A OD inicia por propor aos alunos a localização das cadeiras na sala de aula, as cadeiras foram dispostas em cinco lugares diferentes da sala, os alunos deveriam indicar aos colegas a localização da sua cadeira nesse ambiente. As cadeiras foram assim distribuídas:

Figura 11 – Distribuição das cadeiras na sala de aula



Fonte: Andrade, 2012, p.143

Então, na primeira aula seria proposta a tarefa; **t_1:** *localizar 5 cadeiras posicionadas no interior da sala de aula.*

A tarefa a ser desenvolvida em equipes e cada equipe de alunos ficaria responsável por localizar uma das cadeiras.

Na sala de aula, o professor V relatou para a Comunidade que os grupos variando de 5 a 7 alunos foram convidados a enfrentar essa tarefa de modo reformulado — como na proposição **t'' abaixo** — para encaminhar o processo de investigação e com orientação de que anotassem o máximo de observações possíveis:

t_1'': Cada equipe deverá:

1) expressar a posição da cadeira correspondente ao seu grupo;
2) socializar a sua construção;
3) analisar as construções das outras equipes e socializar para abertura de debates;
4) montar a sua proposta final.

No decorrer da atividade os alunos levantaram questionamentos como:

- *Considero que já estava dentro da sala ou estava lá fora?*
- *De onde devo partir?*

- *Como o piso da sala é composto de lajotas, posso considerar cada lajota como uma unidade?*

Como um dos objetivos da atividade era fazer com que eles descobrissem a importância da origem, do posicionamento “livre” do sistema de eixos ortogonais, eles poderiam ficar à vontade, não ocorrendo interferência do professor em seus respectivos processos de construção.

O professor V relatou que nas construções dos alunos observou que fica clara a percepção deles sobre a necessidade de referências para localizar objetos. Essas referências são expressas no geral: como considerar o ponto de partida (origem) e as direções tomadas até alcançar a cadeira; além disso, há a necessidade de assumir uma unidade de medida, no caso as lajotas do piso.

Em alguns trabalhos ocorreu a representação em sistema de eixos ortogonais, que nas palavras do professor V, ao socializar os acontecimentos com a Comunidade, expressava conhecimentos anteriores, quando do estudo de funções realizados no 9º ano do fundamental e no primeiro ano do ensino médio. Fato esse que o professor aproveitou para, por meio de diálogos provocativos sobre a técnica utilizada, buscar a institucionalização do sistema de coordenadas como resposta para o tipo de tarefas localizar objetos no plano.

A segunda e seguinte tarefa foi proposta como desdobramento da primeira. $\mathbf{t_2}$: *determinar as distâncias entre duas cadeiras*.

Entre as respostas, algumas são realizadas a partir da contagem direta das lajotas, porém a dificuldade surgiu quando as cadeiras se encontravam em linha diagonal uma da outra. No relato do professor, o fazer dos alunos se deu de duas maneiras: na primeira, calculou-se a diagonal de uma lajota e em seguida contou-se o número de diagonais, para o cálculo da diagonal os alunos utilizaram a expressão da diagonal do quadrado $d = l\sqrt{2}$; já na segunda, os alunos contaram as lajotas em linha reta e aplicaram o Teorema de Pitágoras.

Após esse relato, alguns professores da Comunidade observaram que as técnicas utilizadas nos dois casos foram muito próximas, pois ambas utilizaram o Teorema de Pitágoras, a diferença consistia em que o aluno ao utilizar o modelo da diagonal do quadrado expressava que o cálculo da diagonal do quadrado é um fazer rotineiro.

Continuando a exposição, o professor V relatou que na ocasião da institucionalização buscou evidenciar o Teorema de Pitágoras como a técnica para esse tipo de tarefas, ou seja, para calcular a distância entre dois pontos aplica-se o Teorema de Pitágoras.

Para as outras atividades, as proposições deveriam visar à equação da reta, porém o professor V expressou a sua preocupação com tarefas anteriores, como o ponto médio, o baricentro e a condição de alinhamento.

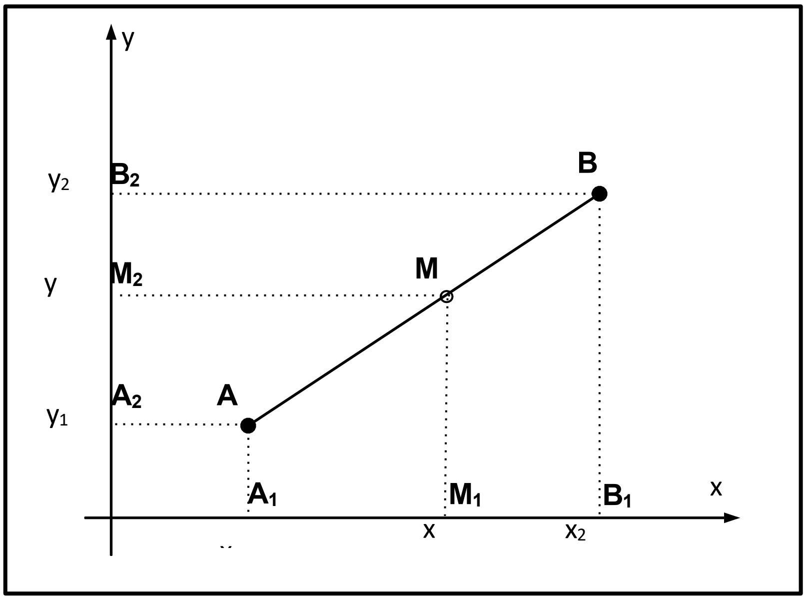
Isso expõe a resistência desse professor ao modelo alternativo que estávamos construindo, pois ele traz enraizado em seu fazer uma epistemologia que parece ser inquestionável, fruto das relações que manteve com esse objeto não só no exercício da prática docente, mas também durante seus estudos na posição de aluno. Isso implica consequentemente, e em acordo com a Comunidade, que a ponderação dele apesar de ter sido questionada foi aceita pelo grupo.

Assim, as tarefas subsequentes foram *cálculo das coordenadas do ponto médio, do baricentro* e, em seguida*, condições de alinhamento de três pontos e equação da reta.*

Porém, analisando a articulação possível entre esses tipos de tarefas, considerando os estudos realizados anteriormente, ficou estabelecido que a OM/OD proposta deveria enfatizar essa articulação de forma a justificar o fazer do aluno, o que foi feito a partir da OM/OD a seguir.

Para determinar as coordenadas do ponto médio, além de localizar no sistema de eixos, aplica-se o Teorema de Tales, considerando que, se M é ponto médio, a razão entre os segmentos $\overline{AM}$ e $\overline{MB}$ é um, e sendo $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ e $M(x, y)$, temos que:

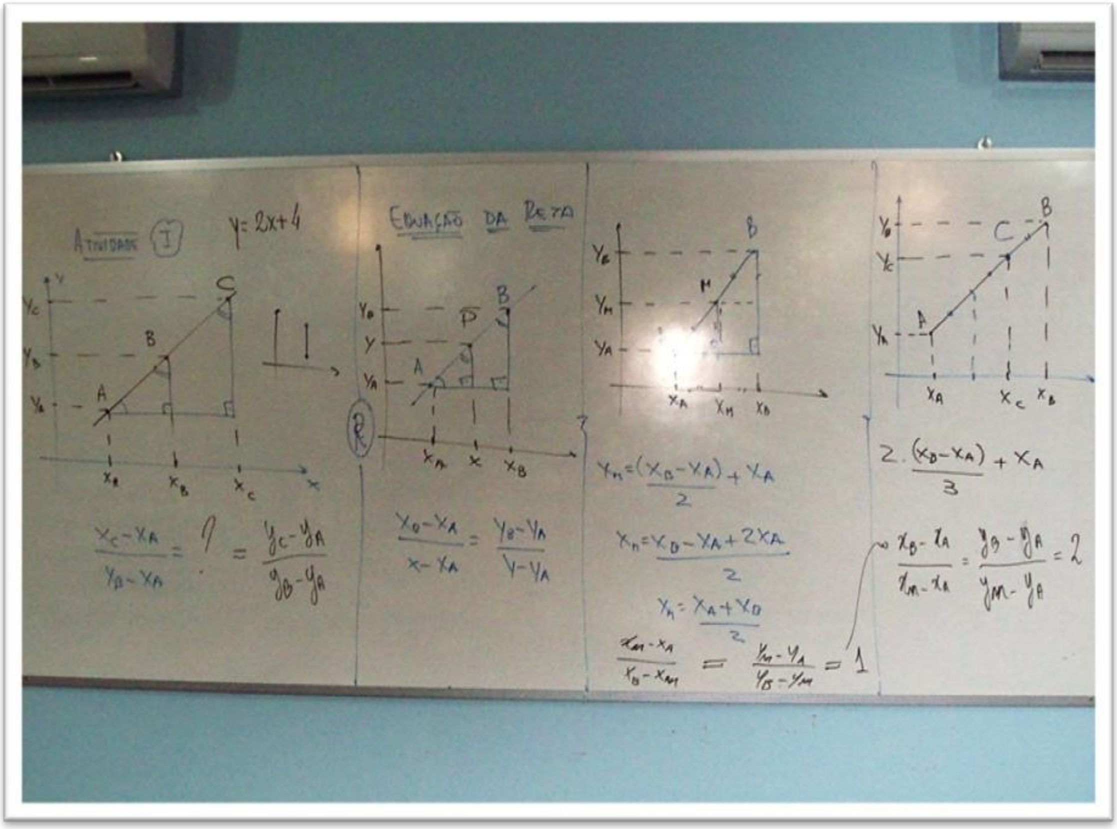
Figura 12 – Ponto médio



Fonte: Andrade, 2012, p. 146

Aplicando o Teorema de Tales, $\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MB}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_1\,M_1}}}{\overline{\mathrm{M_1B_1}}} \longrightarrow 1 = \frac{x_{M} - x_1}{x_2 - x_M}$, daí que $\mathbf{x_M} = \frac{\boldsymbol{x_1 + x_2}}{\mathbf{2}}$, da mesma forma que $\frac{\overline{\mathrm{AM}}}{\overline{\mathrm{MB}}} = \frac{\overline{\mathrm{A_2\,M_2}}}{\overline{\mathrm{M_2B_2}}} \longrightarrow 1 = \frac{y_{M} - y_1}{y_2 - y_M}$, portanto $\boldsymbol{Y_{\mathrm{M}}} = \frac{\boldsymbol{y_1 + y_2}}{\mathbf{2}}$**,** e assim seguindo o mesmo raciocínio os outros tipos de tarefas poderiam ser trabalhados, como na foto abaixo em que os professores a partir da negociação, expressam a OM resultante dos estudos:

Figura 13 – OM proposta pela Comunidade para o estudo da equação da reta



Fonte: Andrade, 2012, p. 147

Essa OM expressa a funcionalidade e a potencialidade dos Tipos de Tarefas Fundamentais eleitas pela Comunidade, sendo a localização de pontos no plano, a distância entre dois pontos e as tarefas relativas ao Teorema de Tales como objetos de articulação entre os temas desse setor.

A OD relativa a essa OM aconteceu seguindo as determinações iniciais, a partir da proposição de tarefas matemáticas para que os alunos enfrentassem, movimentando os conhecimentos anteriores de tal maneira a articular o novo com o velho e sempre em negociações com seus pares.

O professor V, em relato à Comunidade, se disse satisfeito e de certa forma surpreso com a capacidade que os alunos demonstraram na construção das respostas às tarefas propostas. Ele percebeu que em vez de ele apresentar ou chegar aos modelos que possibilitariam o fazer rotineiro para esses tipos de tarefas, os próprios alunos, em consequência do trabalho no enfrentamento das tarefas e questionamentos provocadores do professor sobre elas, chegam a esse modelo.

Essas experiências, relatadas pelo Professor V, a partir de organizações praxeológicas feitas pela Comunidade, segundo sua intencionalidade é expressa a movimentação de um conjunto de tipos de tarefas, as tarefas fundamentais que estruturam o modelo epistemológico, mostram-se como os primeiros pilares de uma obra a ser realizada pela e para a Comunidade.

A experiência revela que a OM/OD até então estabelecida atendeu as intencionalidades da Comunidade, tendo em vista que iniciamos com uma OMP que girava em torno dos tipos de tarefas localização de pontos no sistema de coordenadas e cálculo da distância entre dois pontos, que, articuladas com tarefas relativas ao Teorema de Tales, permitiram o trabalho da técnica que faz dessa organização um conjunto de OMP, e assim se configurando paulatinamente em uma OMLRC.

Estabelecido esse fazer de articulações para o terceiro tipo de tarefa que tínhamos elegido como fundamental, no caso determinar a equação da reta, as OM/ OD em sequência atendiam sempre esse objetivo de integrações e articulações entre esses e novos tipos, como no caso anterior, evidenciando uma razão de ser de cada tema da Geometria Analítica e até de setores dentro da área geometria.

Foram incluídas nessa nova organização as práticas anteriormente confrontadas no seio da Comunidade, apresentadas nesta pesquisa, dentre outras as atividades da prática do professor G, relativas à utilização da Geometria Sintética e da Geometria Analítica para a resolução de problemas da geometria, o tipo de tarefa de determinar a distância entre um ponto e uma reta, da prática do professor Andrade.

A tarefa de construir organizações praxeológicas para a GAP, assumida pela Comunidade, mostra-se árdua e complexa, com contratempos às vezes decorrentes de conflitos das relações pessoais com as novas relações institucionais com saberes nas organizações didáticas, embora realizadas por pessoas que são sujeitos dessa mesma instituição, aqui claramente vivida pelo professor V. Mas, a compreensão de poder fazer suas organizações segundo suas intencionalidade parece ser suficientemente forte, estimulador como pode nos fazer crer o professor V, que também trabalha com turmas de preparação específica para vestibular (cursinho) em outras instituições escolares, quando manifestou sua satisfação em fazer parte da Comunidade: "*Em outros ambientes de trabalho não tenho oportunidades de compartilhar o meu fazer e além de tudo aprender com os colegas".*

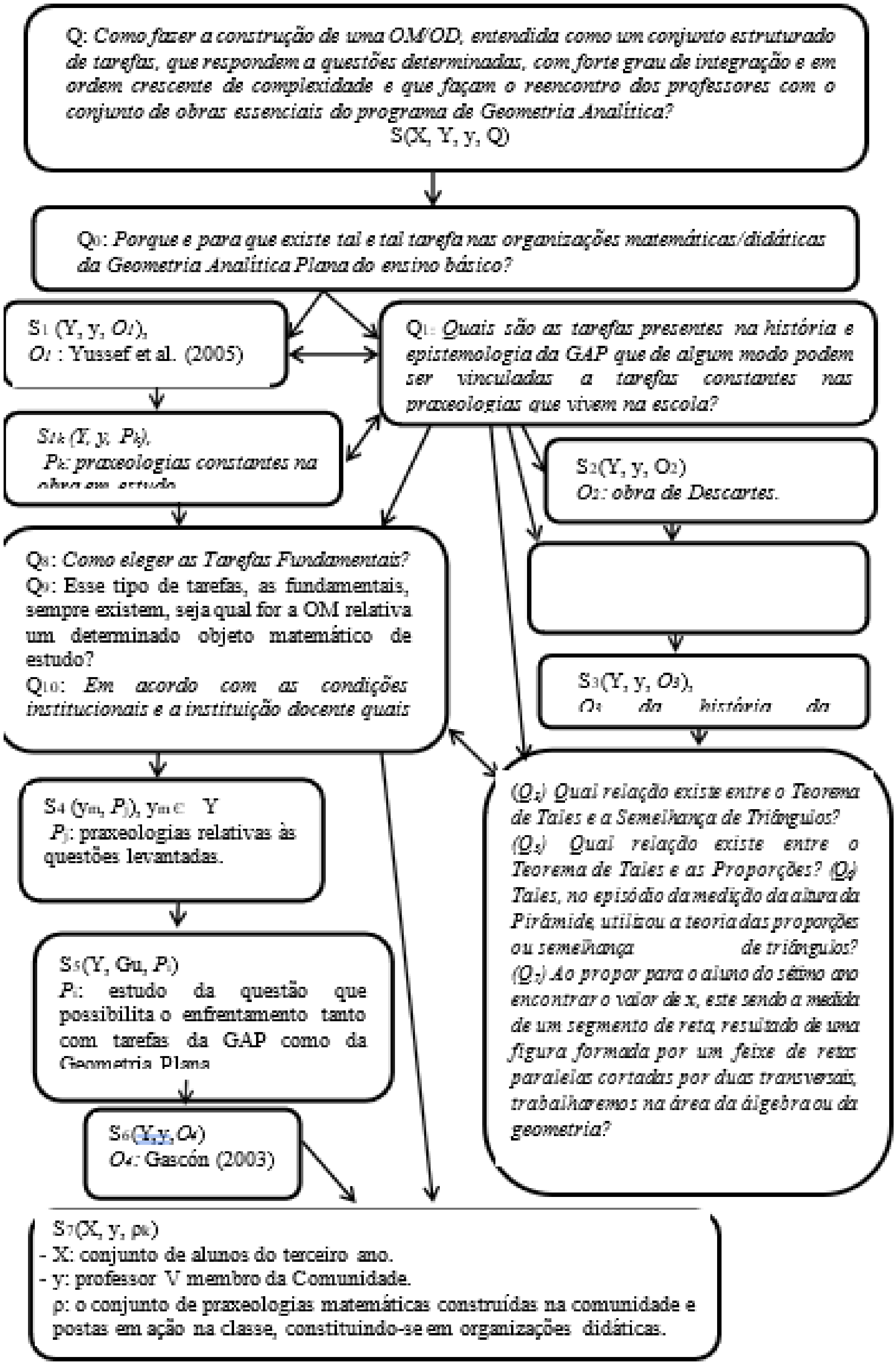
Seguindo, relata que, como tínhamos identificado no estudo histórico e epistemológico, já utilizava o Teorema de Tales como tema que articula outros temas da Geometria Analítica, como distância entre dois pontos e equação da reta etc., porém só após o estudo e a troca de conhecimentos com os colegas é que tomou consciência da verdadeira importância do Teorema de Tales para o estudo da Geometria Analítica: *"Pois agora consigo articular não só os temas propostos para o ensino da Geometria Analítica como também as tarefas propostas em cada tema e vejo essas articulações como a possibilidade do aluno justificar o seu fazer"* (Professor V).

A fala do professor V nos parece deixar claro a Comunidade como constituidora de meios para construção de práticas docentes relativas aos saberes matemáticos escolares e, sobretudo, que o meio para essa construção se dá nos estudos dos textos didáticos, de obras matemáticas, de história e epistemologia das matemáticas e, não menos importante, da e na interação das práticas, nos estudos das praxeologias matemáticas e didáticas que vivem, em seus modos de vida, em seus condicionamentos e restrições, na instituição.

No entanto, a constituição desse meio exige um norte de questões fortes, que questionem o saber culturalmente instituído pela escola, com seus subordinamentos aos níveis superiores de codeterminação didática, como problemático para o ensino; mas isso só e possível por meio de dispositivos que permitam interpretar e desenvolver praxeologias matemáticas e didáticas como a TAD.

A partir dos recursos interpretativos e metodológicos da TAD, é possível vislumbrar caminhos, entre eles o PEP aliado à noção de tarefa fundamental, que aqui se mostrou de modo enfático como o dispositivo didático constituidor de meios para responder a questões problemáticas sobre uma organização matemático- didática e também como um percurso a ser vivido para a formação de professores, como mostraremos a seguir, ao apresentarmos a constituição do PEP com seus desdobramentos e mudança de meios.

Figura 14 – Constituição do PEP vivenciado na Comunidade



Fonte: Andrade, 2012, p. 150

Em decorrência desse PEP, a Comunidade expõe as seguintes respostas que descrevem as respostas do percurso:

Quadro 8 – O Percurso de Estudo e Pesquisas

Percurso de Estudos e Pesquisas	
Quanto à Formação	**Quanto à problemática**
Tarefas que os professores reconhecem como suas: - Construir OM e OD para atender sua intenção didática. - Reconhecem o problema praxeológico do professor; o quê, de, e como ensinar? - Reconhecem a importância da articulação com outras disciplinas, no caso Desenho. - Necessária reformulação tanto no conteúdo de ensino como na metodologia da disciplina Desenho Geométrico. - Construção da OD de referência para o ensino do Desenho Geométrico, tomando por base a articulação entre os setores da geometria em uma perspectiva do horizonte do conteúdo ao longo da educação básica. - Necessidade do resgate de conhecimentos anteriores para reconhecer o novo, seja qual for o aluno ou a escola, pode ser que uns mais outros menos, mas todos possuem conhecimentos anteriores que podem ser mobilizados na perspectiva do estudo de novos conhecimentos. - A Comunidade assume que resolver situações problemáticas é mobilizar um conjunto de tarefas que respondem a questões determinadas.	**No estudo das obras institucionalizadas:** - O fazer docente gira em torno do Tipo de Tarefa, obedecendo a uma estrutura rígida de tipos tarefas marcadamente isoladas, destituída de qualquer trabalho da técnica que possibilite a instituição de uma OMLRC. - A Comunidade outorga o selo de legitimidade à resposta por nos apresentadas, sendo os Tipos de Tarefas Fundamentais: Localizar pontos no plano; Calcular a distância entre dois pontos dados e Encontrar a equação do segmento de reta. - O Teorema de Tales transversaliza o ensino básico, ele pode ser colocado como tarefa/tema que articula outros temas, setores e áreas, e de acordo com sua função na OM/OD, pode assumir o papel de tarefa, de técnica ou de tecnologia/teoria.
Necessidade de estudo das tarefas a partir: - das OM e OD disponíveis nas instituições; - da história e epistemologia da matemática; - do compartilhamento de práticas.	**Tarefas que a Comunidade acorda que atendem a noção de Tarefas Fundamentais na GAP:** - localização de pontos no plano; - determinar a distância entre dois pontos; - escrever a equação da reta; - determinar a medida de um segmento a partir de outros segmentos.

Fonte: Andrade, 2012, p. 151

A noção de tarefa no PEP produz grande quantidade de respostas aos problemas concretos da profissão, ao tempo que se constitui como percurso de formação para revelar tarefas para a atividade docente. E ainda, este acontecimento nos parece ter estabelecido uma nova prática para o ensino da Geometria Analítica a partir de OM/ OD, utilizando um dispositivo didático denominado de Tarefas Fundamentais, como detonador de um dispositivo metodológico o PEP em uma Comunidade de práticas.

12.5 Considerações finais

Em nossas investigações vivenciamos a dialética entre a pessoa e a instituição, que se dá no confronto da relação do docente com o saber matemático que deve estar em conformidade com as relações institucionais para as posições que o docente ocupa nessas instituições, e que se manifestam quando da construção/reconstrução de praxeologias.

A complexidade que permeia a eleição das Tarefas e, entre elas, as Fundamentais que estruturam a organização matemática, se impõe claramente não só por poder requerer o contexto matemático histórico e epistemológico como também pela presença de influências que condicionam as escolhas; entre elas, o currículo oficial, as ferramentas didáticas disponíveis, os livros-textos adotados pela escola como obras institucionais de estudo e, sobretudo, pelas práticas docentes que vivem na instituição e, portanto delineiam as relações institucionais com os objetos matemáticos em jogo em uma instituição escolar.

Tais condições conformam, chegando inclusive a limitar as reconstruções das OM e OD, e, em nosso caso, a partir das Tarefas Fundamentais, exigem mudanças de práticas docentes que somente são possíveis com construções de novas relações dos docentes com o saber em jogo, tendo em conta a dialética pessoal-institucional que exacerba os conflitos entre as relações do docente com o saber no fazer e pensar que os condicionam e limitam suas atividades de construir um novo sujeitamento para si e para a instituição.

Nesse caminhar, as praxeologias mostram-se como obras nunca prontas e acabadas, mas antes de tudo como construções de pessoas que vivem e ocupam posições no seio de uma instituição. Isso implica que a relação institucional, vista como a relação dessas pessoas com um dado objeto matemático, se determina na dinâmica dos interesses e intenções delas e lhes dá forma e sentido.

As necessidades institucionais de novas práticas exigem que as pessoas desenvolvam novas relações pessoais com os objetos, o que somente pode acontecer no estudo de e para a construção de organizações matemáticas dos professores, que momentaneamente deixam de ser os difusores de praxeologias dominantes e assumem o papel institucional de criadores de novas praxeologias no processo de transposição didática.

Certamente, nos parece, o problema praxeológico docente se mostra como o de construção de organizações didáticas e parece se impor inicialmente de modo solitário quando o professor procura responder às questões advindas do confronto das praxeologias matemáticas com suas praxeologias didáticas, que demandam reconstruções dessas praxeologias matemáticas para o ensino da matemática.

A resposta, a nova praxeologia, realiza-se na movimentação de seu equipamento praxeológico, nos confrontos de praxeologias até então vivenciadas, inclusive as nunca ensinadas que às vezes se mostram estratégicas para atender a questionamentos que podem vir a constituir mudanças praxeológicas substanciais.

As práticas docentes nesse sentido se configuram como domínio privilegiado de formação, pois seria nesse domínio que tomariam corpo as questões às quais o professor deve buscar respostas possíveis que visem a superar o modelo de que os professores devem em primeiro lugar aprender as teorias da educação e da matemática para em seguida as aplicarem.

A superação desse modelo passaria então pela atitude do professor de assumir um fazer na perspectiva da dialética entre os questionamentos que surgem na prática docente e as respostas que ele pode fazer emergir com os dispositivos didáticos de que dispõe. Mas, quando os questionamentos são potencializados de tal maneira que se caracterizem como um questionamento forte, como o de propor novas tarefas, ou de novas organizações de tarefas, que requeiram o desencadear de outras tarefas que quando enfrentadas por uma ou mais técnicas provoquem a reconstrução de OM e OD, e evidenciem uma, ou mais, razão de ser do estudo do objeto matemático em jogo, o problema se revela em magnitude que ganha dimensões institucionais.

Vejamos, primeiro é preciso ter em conta que a construção de uma organização praxeológica não se faz livremente, pois esse fazer está subordinado a condições e restrições impostas pela instituição, no mínimo por atores da instituição que defendem as praxeologias até então dominantes, como as de nível da pedagógica que exigem certa subordinação à infraestrutura didática como as dos livros-textos adotados pela escola, do tempo didático a ser dispendido para o saber, das ferramentas didáticas disponíveis, e outras condições e restrições decorrentes de outros níveis de codeterminação didática, como os programas curriculares estabelecidos pelas secretarias de educação que não estão subordinados diretamente ao professor, mas que implicam em jeitos de pensar e manipular os objetos matemáticos para o ensino.

Segundo, que a subordinação às condições e restrições institucionais faz revelar a dimensão ecológica das praxeologias, caracterizada pela dinâmica de vida intra e interinstitucional; ou seja, as praxeologias construídas em uma instituição são reconstruídas em outras instituições a partir de questões distintas de sua origem e, tal como na instituição de origem, afetam e são afetadas pelas praxeologias que vivem com ela nas instituições, alterando as condições de vida dela e das outras. Isso revela mais uma face da complexidade da problemática da desarticulação que não depende de um professor solitário em particular, mas que certamente aponta a importância de práticas docentes em diferentes posições inter e intra instituições como um dos caminhos para prover as respostas praxeológicas, matemáticas e didáticas, como preconiza a TAD.

Assim, sob essa compreensão, a construção de praxeologias se configura em uma prática estratégica para um percurso de formação de professores, uma vez que pode evidenciar o problema da desarticulação do currículo como um problema docente, não do professor, mas da profissão de professor, que deve ser respondido coletivamente mediante a elaboração de recursos praxeológicos técnicos e teóricos apropriados.

O estudo acima, como observamos em nossas análises, não é simples. Exige não somente investigações no contexto institucional dos elementos matemáticos e didáticos, a infraestrutura matemática e didática disponível que possibilite o ensino da disciplina e de necessários recursos teóricos apropriados, em nosso caso, o encontro com a TAD.

O encontro com a TAD se tornou necessário como ferramenta de análise das praxeologias matemáticas e também de desenvolvimento, exprimindo o jeito de pensar e fazer praxeologias que faz emergir a problemática da desarticulação em sua complexidade à medida que avança em seu enfrentamento. Tal encontro leva os professores a se darem conta de que a infraestrutura matemática imposta não atende, em geral, as diversas e numerosas restrições existentes em todos os níveis que eles têm que atuar e que acabam em conformar o exercício de sua profissão e, como em consequência, revela a necessidade de dispositivos de formação que possam suprir as necessidades profissionais e institucionais.

Assim, em nossa pesquisa, o encontro com professores se deu em uma comunidade de práticas, que se configurou inicialmente como o dispositivo didático para a reconstrução de OM/OD, como fruto de questionamentos da infraestrutura matemática e didática da instituição que compõe a unidade escolar a partir do confronto das práticas dos professores que integram essa comunidade.

Paulatinamente, o encontro da comunidade de práticas ganhou ares de um Percurso de Formação de Professores a partir do Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) instaurado inicialmente pela questão sobre a reestruturação organizacional das tarefas de Geometria Analítica que permitissem um fazer de complexidade crescente.

De outro modo, o PEP se constituiu como um percurso de formação dos professores à medida que objetivava questionar o EP institucional, das práticas que viviam na instituição, a partir das necessidades praxeológicas ali criadas, evocadas no estudo das questões que derivavam uma das outras e que certamente se encontravam no seio do exercício da profissão daqueles professores.

As respostas materializadas por reformulações desse EP foram construídas na dialética pessoal-institucional à medida que se revelavam as condições e restrições que conformavam as práticas institucionais e encaminhavam como poderia ser uma nova prática com a geometria analítica, em suas relações de convívio com outras praxeologias matemáticas relativas a outros objetos matemáticos e com outras de outra disciplina, como o Desenho Geométrico. Tal dispositivo, se não mudou as praxeologias matemáticas relativas a outras áreas e setores, apontou caminhos de relações que permitiriam tal fazer de mudança, o imbricado habitat com seus nichos que promoveria a vida dessas novas praxeologias, de modo a melhor atender as restrições de currículo, de tempo didático, de avaliação unificada dos alunos pela instituição etc.

Em resumo, o PEP no seio da comunidade de práticas, mostrou-se como um dispositivo metodológico positivamente diferenciado para formação continuada de professores no efetivo exercício da docência:

1) Por fazer revelar (e como enfrentar) o problema da desarticulação como da profissão docente.

2) Por revelar a Dimensão escolar dos objetos matemáticos.

3) Por revelar as funcionalidades das Tarefas.

4) Por promover e fomentar a geração de questões a partir das práticas docentes: as Tarefas Fundamentais.

Houve uma preocupação com o tipo de tarefa que proporcionaria a entrada no processo de estudos, e observando a potencialidade que as tarefas têm em articular e justificar outras tarefas que poderiam de alguma forma servir como um dispositivo de entrada e convergência das etapas que ocorrem nos processos de estudos, isto nos conduziu à noção da Tarefa Fundamental, como a tarefa que exerce posição de destaque tanto no sentido da análise das OM e OD como no fazer docente de desenvolvimento de novas praxeologias. Essa noção é tomada no sentido de permitir responder ao seguinte tipo de questão:

Que fazer docente poderia revelar, de algum modo, o papel das tarefas em jogo nas praxeologias matemáticas e que se constitua em uma das condições necessárias para fazer revelar o problema praxeológico ao professor como um produto de intenção didática e, em sentido mais amplo, o horizonte curricular das praxeologias matemáticas e didáticas?

Nesse sentido, a formulação de questão tecnológica relevante e matemática (razão de ser) constituem um tipo de tarefas docentes para consecução da transposição didática interna, institucional, e se caracteriza como de complexidade crescente à medida que se vislumbrar como um caminhar de uma organização pontual em direção a torná-la local, regional ou global, se impondo assim como uma tarefa que não pode ser enfrentada por um professor solitário.

Exigem equipamentos praxeológicos de diferentes posições na instituição, ensino fundamental menor, maior, médio e até mesmo superior, pois o horizonte praxeológico curricular sobre um objeto matemático atende a diferentes modelos epistemológicos de referências (dependente da posição, é às vezes conflitante) que exigem o conhecimento de diferentes práticas com o objeto na instituição em jogo.

Essas tarefas docentes são, portanto da profissão docente, as que o professor tem de enfrentar no exercício da profissão e, como tal, exigem o enfrentamento colaborativo que pode ser proporcionado, como em nossa pesquisa, por uma comunidade de práticas institucionalizada no seio de uma instituição docente por meio de recursos tecnológicos apropriados como a TAD, que se constituiu em obra primeira de estudo pela Comunidade.

A noção de Tarefas Fundamentais está estreitamente imbricada com um modelo Epistemológico que, senão o define é certo que o traduz, expressa sua estrutura em consonância com a intencionalidade do professor, por exemplo, de propiciar um olhar para o currículo como uma obra em que as personagens conversem entre si de tal maneira que proporcione uma atividade matemática de progressiva complexidade, de forma articulada e integrada que objetive um fazer matemático rápido, simples e seguro.

Entretanto, a busca de tarefas com o papel articulador não é livre e encontra- se envolta a diferentes condições, algumas conhecidas *a priori* e outras que se revelam no percurso de busca. Em nossa investigação, parece claro que o percurso de busca estava inicialmente condicionado às seguintes condições:

- a "liberdade" institucional para (re)construções das OM e OD para a prática docente;
- a "liberdade" de reconstrução de OM e OD que tenham a capacidade de antecipar ou resgatar obras matemáticas, desde que sejam obras que se vão estudar ou que já se estudaram;
- a obrigatoriedade de cumprir integralmente o programa estabelecido para uma dada posição do currículo escolar na carga horária prevista;
- a obrigatoriedade de realizar a avaliação, tendo parte dela comum com todas as classes da mesma série de estudos;

- a obrigatoriedade de cumprir a preparação específica para os exames de avaliação nacional (ENEM) e vestibulares etc.

Entre essas condições, a primeira é favorável ao percurso, já que institucionalmente o professor está livre para reconstruir OM/OD. Tal liberdade decorre de uma necessidade institucional tendo em conta a ausência de livros-textos que atendam o programa de ensino de matemática por cada etapa/ano que tem consequências ao nível de codeterminação didática da disciplina. Isso se traduz na escola por:

- obrigatoriedade de reuniões dos professores para tratar de assuntos didáticos, incluídas no horário de trabalho;
- questionamentos dos professores relativos às OM e OD presentes como propostas nos livros didáticos utilizados na escola.

As reuniões e questionamentos de professores que revelam o problema praxeológico do professor que é traduzido pela segunda e demais condições que é expressa de modo mais preciso. Reconstruir OM/OD resgatando as obras estudadas ou a estudar; ou seja, o condicionamento do currículo de matemática da escola, no tempo da escola, com OD que atendam os exames nacionais de avaliação.

Mas, no percurso da busca outras condições se revelam, entre elas, e em nosso caso, as obras, aqui entendidas como os livros de história e epistemologia da GAP, as organizações matemáticas da escola, e as praxeologias matemáticas e didáticas dos professores da Comunidade. Condicionam a busca à medida que codeterminam também as respostas buscadas.

Em nossa investigação, fica claro que a busca é condicionada de modo forte pelas praxeologias matemáticas e didáticas da Comunidade. Isso é especialmente evidente quando a Comunidade encaminha como proposta de OM/OD para Escola, onde ocorreu a parte empírica da pesquisa, a partir de praxeologias desenvolvidas e vividas por professores da Comunidade.

O encontro com a obra de Descartes é superficial e esta é investigada no sentido de fazer revelar uma possível tarefa que também vivesse na escola e pudesse ser usada como ferramenta de articulação.

A GAP, como método para resolução de problemas de geometria sintética até então não resolvidos não se faz revelar aos membros da Comunidade por esse estudo que se evidencia pelos questionamentos da Comunidade sobre as relações entre GAP e a Geometria Sintética.

É no sistema didático construído a partir desse questionamento, que se reduz ao estudo de uma praxeologia didática de um membro da Comunidade, que a resposta, a GAP como método, é legitimada.

Como se pode notar, o percurso não é previsível, não sabemos o que pode ocorrer. Poderíamos ter as mesmas obras, as mesmas praxeologias dominantes da escola, mas o confronto das práticas dos professores, sob condições não muito distintas, pode acabar por encaminhar modelos epistemológicos distintos e em consequência tipos de tarefas fundamentais diferentes.

Se for certo que não se pode prever o percurso de busca, é certo também que o percurso de busca de tarefas fundamentais permite traduzir um modelo epistemológico, que pode ser construído nessa busca, que venha dar resposta ao problema praxeológico da profissão docente como mostra a investigação.

É certo também que no percurso de busca os professores ganhem consciência de problemáticas da profissão e busquem dispositivos adequados, os sistemas didáticos, que os ajudem a construir respostas. Embora não sejam certos quais questionamentos, e quando, podem ocorrer no percurso.

É essa compreensão de nossa pesquisa, sob o suporte da TAD, sobre o percurso de formação docente em Matemática a partir da noção de Tarefas Fundamentais para a construção e elaboração de praxeologias. De outro modo, que a noção de tarefas fundamentais se constitui em dispositivo didático de deflagração e desenvolvimento de busca que constitui um PEP como dispositivo metodológico para formação continuada de professores no enfretamento do problema praxeológico do professor, em elaborar praxeologias matemáticas e didáticas.

Referências

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **Geometria analítica plana**: praxeologias matemáticas o ensino médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas) — Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2007.

ANDRADE, Roberto Carlos Dantas. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores**: o caso da geometria, 2012. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, 2012.

BIANCHINI, **Edwaldo. Matemática**, v 4. Moderna, São Paulo, 2006

BOSCH, M., C. FONSECA y J. GASCÓN, Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares, **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 24, núms. 2-3, p. 205-250, 2004.

BOSCH, M. GARCIA, J.; GASCÓN, J. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoria antropológica de lo didáctico. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa** (RELIME), México, v. 18, n. 2, p. 37-74, 2006.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. **LAS PRÁCTICAS DOCENTES DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS** *XIème École d'Été de Didactique des Mathématiques* que se celebró en Agosto de 2001.

_________. **La praxeología local como unidad de análisis de los procesos didácticos**. 2004. Disponível em: <http://www.ugr.es/ ~jgodino/*siidm/madrid*>. Acesso em: 12 out. 2010.

BOSCH, M.; GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria**.** In: GONZÁLEZ, M. J.; GONZÁLEZ, M. T.; MURILLO, J. (ed.) **Investigación en Educación Matemática XIII**. 2009. p. 89-113). Disponível em: http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/actas/Actas13SEIEM/SEIEMXIII.pdf

BOYER, C. **História da Matemática**. Tradução: Elza F. Gomide. Edgar Blucher. São Paulo, 1974.

CHEVALLARD, Yves. **La transposition didactique.** Grenoble. La Pensée Sauvage Éditions, 1991.

________. **L`analyse des pratiques enseignantes en théorie anthopologique du didactique**, Recherches en didactiques des mathématiques. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265, 1999.

______________. Journal du seminaire tad/idd: Theorie Anthropologique du didactique & Ingenierie Didactique du Developpementn, Séance 7 – Vendredi 11 juin 2010, **L'organisation de la recherche**. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr>. Acesso em: jan. 2011.

_______________. Aspectos problemáticos de la formación docente. In: Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, 26. Huesca, 2001a. **Anais…** Universidade de Zaragoza, Espanha, 2001a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 23 out. 2011.

_________. **La TAD face au professeur de mathématiques,** Toulouse, 29 abr. 2009a. Disponível em: < http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso: em: 8 out. 2010.

_________. **Didactique et formation des enseignants,** Poitiers**,** 13 maio 2009b. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/>. Acesso em: 8 out. 2010.

_________. **La notion de PER**: problèmes et avancées. Toulouse, 2009c. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_ article=161>. Acesso em: 8 out. 2010.

__________. Conceitos Fundamentais da Didática: as perspectivas trazidas por uma abordagem antropológica. In: BRUN, J. **Didáctica Das Matemáticas**. Tradução de Maria José Figueredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. (original de 1992).

______. **Organiser l'étude**. 1. Structures & fonctions, Cours à la XI École d‟été de Didactique des Mathématiques, pendiente de publicación, 2001b.

______. **Organiser l'étude**. 3. Écologie&régulation. Actes de la XI école d‟été de didactique. Grenoble: La PenséeSauvage, p. 41-56, 2002.

CHEVALLARD, Yves *et al.* Estudar matemáticas: o elo entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001a.

CHEVALLARD, Yves; BOSCH, Mariana; GASCÓN, Josep. **Estudar matemáticas:** o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem. Tradução: Daisy Vaz de Moraes. Porto Alegre: Artmed, 2001.

CIRADE, G. **Devenir professeur de mathématiques**: entre problèmes de la profession et formation en IUFM. Les mathématiques comme problème professionnel. 2006. 453fl. Tese (Doutorado em Didática da Matemática) - Université de Provence, 2006. Disponível em: <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00120709>. Acesso em: 20 ago. 2007.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2005.

DESCARTES, R. **The geometry of Rene Descartes with a facs simile of the first edition,** 1637. Trad.: David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.1954.

EVES, Howard. **Introdução à história da Matemática**. Tradução: Higino A. Domingues. São Paulo: Unicamp, 2004.

FONSECA, C. **Discontinuidades matemáticas y didácticas entre la secundaria y la universidad**. 2004. Tese (Doutorado em set/2004) — Universitat de Vigo, Espanha, 2004**.**

GARCIA, F. J. **La modelización como instrumento de articulación de la matemática escolar**. De la proporcionalidad a las relaciones funcionales. 2005. Tese (Doutorado em abril/2005) - Departamento de Didáctica de las Ciencias, Universidad de Jaén, 2005.

GASCÓN, J. Incidencia del modelo epistemológico de las matemáticas sobre las prácticas docentes. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)**, v. 4, n. 2; p.129-159, 2001.

GASCÓN, J. Del Problem Solving a los Recorridos de Estudio e Investigación. Crónica del viaje colectivo de una comunidad científica. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**, n. 22, p. 9-35, 2010.

GASCÓN, J. Las prácticas docentes del profesor de matemáticas. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática (UNIÓN)**, n. 14 -2, p. 203-231, 2011

GASCÓN, J. Geometría sintética en la ESO y analítica en el Bachillerato. ¿Dos mundos completamente separados? **Suma**, v. 39, p. 13-25, 2002.

GUEDJ, Denis. **O teorema do papagaio**. Tradução: Eduardo Brandão. São Paulo: Companhia das Letras, 2008.

SMITH, David Eugene e LATHAM, Marcia L. **The geometry of Rene Descartes with a facs simile of the first edition,** 1637. Trad.: David Eugene Smith e Marcia L. Latham. New York: Dover Publications, Inc.1954.

STRUIK, D. **História concisa das Matemáticas**. Lisboa: Gradativa, 1989.

YOUSSEF, Antônio Nicolau et al. **Matemática**: ensino médio, volume único. São Paulo: Scipione, 2005.

13- GEDIM: Reflexões e avanços nas abordagens teórico-metodológicas em Educação Matemática

Saul Rodrigo da Costa Barreto
Deusarino Oliveira Almeida Júnior

Introdução

A pesquisa acadêmica, em sua essência, é um trabalho colaborativo que se beneficia enormemente da combinação e da interconexão de ideias. Neste contexto, os grupos de pesquisas desempenham um papel fundamental, agindo como meio de estimular a inovação e o progresso de um campo de pesquisa. O Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM), com seu enfoque na Educação Matemática, é um exemplo representativo dessa dinâmica, demonstrando como a colaboração e a expertise coletiva podem enriquecer significativamente o campo acadêmico.

No cerne da Educação Matemática, encontramos uma confluência de várias escolas de pensamentos, cada uma contribuindo com suas perspectivas únicas e metodologias inovadoras. Uma influência particularmente notável na região Amazônica é a da escola francesa de Educação Matemática.

A área de pesquisa conhecida como Didática da Matemática (equivalente a Educação Matemática no Brasil), com raízes na França, encontrou adeptos ao redor do mundo, inclusive no Brasil. Durante os anos 1990, muitos acadêmicos brasileiros completaram doutorados na França em Didática da Matemática. Após retornarem ao Brasil, formaram grupos de estudo e se juntaram a programas de pós-graduação, contribuindo para o desenvolvimento epistemológico deste campo. Desde essa época, o Brasil viu um aumento significativo nas pesquisas e na produção acadêmica relacionadas à Didática da Matemática (Bittar *et al.*, 2015).

A presença e o impacto da escola francesa na região norte do Brasil, impulsionados em parte pelas atividades e pesquisas do GEDIM, refletem uma interseção cultural e acadêmica significativa. Este encontro de mundos - cultural e científico, onde a tradição didática francesa se entrelaça com os contextos educacionais e culturais da Amazônia, cria um terreno fértil para abordagens inovadoras e adaptativas na Educação Matemática. O GEDIM, neste cenário, não apenas adota essas influências, mas também as adapta e as expande, levando em consideração as realidades locais e as necessidades educacionais específicas da região.

Ao explorar as contribuições do GEDIM, é inegável reconhecer como o grupo integra e molda essas influências externas, ao mesmo tempo em que contribui para o diálogo global sobre a Educação Matemática. Este capítulo visa, portanto, não apenas destacar os avanços teórico-metodológicos realizados pelo GEDIM, mas também refletir sobre como essas conquistas se enquadram e influenciam o panorama mais amplo da Educação Matemática, tanto no contexto amazônico quanto no global.

Nesse cenário, o desenvolvimento e expansão do GEDIM, se deram a partir da dedicação de professores doutores como Renato Borges Guerra, José Messildo Viana Nunes, Saddo Ag Almouloud, José Carlos Pereira, Roberto Carlos Dantas Andrade e Reginaldo da Silva tem sido inestimável. Estes eminentes acadêmicos não só estabeleceram as bases sólidas para o crescimento do grupo, mas também foram cruciais para elevação do padrão de pesquisa e inovação dentro do campo da Educação Matemática na Universidade Federal do Pará (UFPA).

Dessa forma, concordamos com Cyrino (2018, p. 7) quando discorre que

> Em alguns PPGEM (Programas de Pós-Graduação em Educação Matemática), além da estrutura curricular constituída, na maioria das vezes de disciplinas, observamos a presença de grupos de estudo e pesquisa que têm como objetivo colocar em debate a Educação Matemática, as políticas públicas que envolvem a Educação Matemática, as práticas pedagógicas, a formação de professores, a investigação em Educação Matemática, dentre outros temas, para além de discutir as escolhas teórico-metodológicas, a estrutura e o desenvolvimento de suas dissertações ou teses.

A orientação e coautoria de dissertações de mestrado e teses de doutorado por esses professores têm sido uma referência para o desenvolvimento acadêmico e profissional de inúmeros estudantes. Suas supervisões não se limitam apenas ao rigor acadêmico, mas também à aplicação prática e à relevância no contexto educacional real. Eles têm desempenhado um papel crucial na formação de uma nova geração de educadores e pesquisadores, contribuindo no desenvolvimento de competências necessárias para enfrentar os desafios da educação contemporânea.

Além disso, as publicações resultantes dessas orientações têm contribuído significativamente para a literatura acadêmica em Educação Matemática. Estas publicações não apenas reforçam o prestígio da UFPA como um centro de excelência acadêmica, mas também exercem um impacto significativo na educação básica e superior no Pará. O trabalho desses professores e seus orientandos transcende as fronteiras da universidade, inserindo-se nas salas de aula de escolas e instituições de ensino superior (IES), onde fundamentam novas práticas pedagógicas.

Sobre a atuação dos professores no aprofundamento das discussões e reflexões socializadas nos grupos de estudo e pesquisa, concordamos com Nóvoa (2002, p. 29) que

> É preciso ir além dos "discursos de superfície" e procurar uma compreensão mais profunda dos fenómenos educativos. Estudar. Conhecer. Investigar. Avaliar. Caso contrário, continuaremos reféns da demagogia e da ignorância. As mudanças nas escolas estão, por vezes, tão próximas que provocam um efeito de cegueira. Só conseguiremos sair da penumbra através de uma reflexão coletiva, informada e crítica.

Dessa forma, a contribuição desses professores na formação de educadores representa uma parcela relevante na busca da melhoria da qualidade da educação no Pará. Eles contribuem para o desenvolvimento do campo da Educação Matemática e ajudam a formar profissionais que atuam na linha de frente da educação, aplicando teorias e práticas inovadoras para enriquecer a experiência do ensino e da aprendizagem dos alunos.

Este capítulo busca não apenas celebrar suas realizações, mas também refletir sobre como essas contribuições têm sido fundamentais para o avanço da educação no estado do Pará e para a formação de uma base sólida para futuras gerações de educadores e acadêmicos.

Nesse sentido, a relevância do GEDIM é ressaltada de forma significativa na tese de doutorado de Barreto (2023), realizada no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da UFPA. Esta tese exemplifica a aplicação prática e a profundidade teórica que caracterizam as pesquisas influenciadas pelo GEDIM, contribuindo substancialmente para a compreensão e desenvolvimento de Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) no âmbito da Teoria Antropológica do Didático (TAD).

A pesquisa de Barreto (2023), uma investigação qualitativa de natureza bibliográfica, aborda o dispositivo didático-metodológico – PEP – no ensino e aprendizagem da Matemática, uma temática central na missão do GEDIM. As questões investigadas na tese, focadas nas condições e restrições do uso do PEP, bem como nos avanços e perspectivas desta abordagem metodológica, refletem a contínua busca do GEDIM por inovações e melhorias no ensino de Matemática.

Ao analisar teses de doutorado no Brasil entre 2011 e 2021 que utilizaram o dispositivo PEP, a tese de Barreto (2023) destaca-se pelo embasamento na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1991) que oferece uma estrutura completa para entender e avaliar o PEP, demonstrando a combinação entre teoria e prática, que enfatizam uma característica fundamental nas pesquisas do GEDIM.

Os resultados da pesquisa de Barreto, que incluem quadros detalhados do estado da arte e categorizações dos tipos de PEP, exemplificam as influências das pesquisas acadêmicas realizadas no GEDIM. Estes achados não só delineiam um panorama do PEP no Brasil, mas também ilustram como as intervenções didáticas e adidáticas, estruturadas através do PEP, podem enriquecer o processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Portanto, um grupo de estudo e pesquisa é fundamental na formação e amadurecimento acadêmico de pesquisadores a fim de alcançar a construção de novos conhecimentos. Dessa maneira, na composição desses grupos é necessário contar com a expertise e *know-hall* de pesquisadores relevantes da área de conhecimento, atributos que estão presentes no GEDIM. Em concordância, a tese de Barreto (2023), se destaca como um exemplo da influência e importância do GEDIM no campo da Educação Matemática. Ela não apenas reflete a dedicação do grupo à excelência acadêmica e inovação pedagógica, mas também ressalta o seu papel vital na formação de pesquisadores e educadores que podem contribuir para a melhoria da Educação Matemática contemporânea.

13.1 Contribuições do GEDIM na Educação Matemática: a importância de grupos de pesquisa para a investigação

A essência dos grupos de pesquisa, como o GEDIM, reside na colaboração e na combinação de diversas habilidades e perspectivas para explorar complexidades que vão além do alcance de um único pesquisador. Esses grupos funcionam como núcleos de inovação e descoberta, onde ideias são trocadas, teorias são desenvolvidas e testadas, e novos conhecimentos são gerados.

A importância de grupos de pesquisa na academia é multifacetada. Primeiramente, eles proporcionam um ambiente fértil para o compartilhamento de conhecimentos e experiências. Essa interação contínua e a colaboração entre membros com diferentes perspectivas promovem uma abordagem mais holística e diversificada para a pesquisa. No contexto brasileiro, grupos como o GEDIM se destacam por impulsionar avanços significativos na Educação Matemática, demonstrando o valor dessa colaboração. Segundo Santana *et al.* (2011, p. 52), um grupo de pesquisa em Educação Matemática,

> [...] tem como finalidade principal congregar interessados em Matemática e Educação que queiram discutir, refletir e analisar as questões referentes à formação e prática docente; incentivar a pesquisa e as produções científicas na área, bem como aprofundar processos de reflexão sobre a formação continuada de professores de Matemática.

Além disso, grupos de pesquisa desempenham um papel vital no desenvolvimento de jovens acadêmicos. Eles oferecem oportunidades para estudantes de pós-graduação e pesquisadores em início de carreira trabalharem ao lado de acadêmicos experientes, permitindo-lhes amadurecer academicamente e desenvolver habilidades de pesquisa. Essa dinâmica é evidente no Brasil, onde grupos de pesquisa têm contribuído significativamente para a formação de uma nova geração de acadêmicos e profissionais.

A relevância desses grupos também se estende à sua capacidade de influenciar políticas e práticas educacionais. Por meio de suas pesquisas, esses grupos fornecem evidências empíricas e *insights* teóricos que podem influenciar decisões políticas e práticas pedagógicas, impactando a educação em diversos níveis.

Enfatizamos que a contribuição dos grupos de pesquisa à comunidade científica é ampliada pela sua capacidade de formar redes de conhecimentos interconectadas. Essas redes transcendem instituições e fronteiras, facilitando o intercâmbio de ideias e a colaboração em projetos de pesquisa.

Dessa forma, grupos de pesquisa como o GEDIM são fundamentais para o avanço da pesquisa acadêmica. Eles não apenas promovem a colaboração interdisciplinar e a inovação, mas também desempenham um papel crucial na formação de acadêmicos, na influência sobre a política educacional e na construção de redes de conhecimento que se estendem para além dos limites geográficos e disciplinares.

13.2 Desenvolvimento das reuniões e trabalho do GEDIM ao longo dos anos

O GEDIM caracteriza-se por sua abordagem dinâmica e adaptativa, refletida nas reuniões semanais realizadas todas as quintas-feiras, das 9h às 12h. Esses encontros, que ocorrem tanto de forma presencial quanto remota, são essenciais para manter a coesão do grupo e fomentar o avanço contínuo da pesquisa em Educação Matemática.

Antes da pandemia de COVID-19, as reuniões do GEDIM eram exclusivamente presenciais. Contudo, com o início da pandemia em 2020 e 2021, o grupo adaptou-se rapidamente ao formato virtual, realizando suas reuniões no turno da tarde. Esta mudança não apenas permitiu a continuidade das atividades do grupo durante um período desafiador, mas também preparou o caminho para uma abordagem mais flexível e inclusiva. Em 2022, no período pós-pandemia, as reuniões retornaram ao formato presencial matutino, mas mantendo a opção remota para acomodar membros que não poderiam estar fisicamente presentes, transformando assim os encontros do GEDIM em experiências híbridas.

Um aspecto notável do GEDIM é a diversidade geográfica de seus membros, que inclui participantes de várias partes do Brasil e até do exterior. Membros residindo em locais como Belém-PA, Curitiba-PR, São Paulo-SP e até mesmo de outros países como o Peru, integram-se semanalmente às discussões, enriquecendo o grupo com suas perspectivas e experiências. Essa diversidade reflete o alcance e a influência do GEDIM, transcendendo barreiras geográficas e contribuindo para o ensino de Matemática em várias instituições educacionais.

Nas reuniões, são discutidos temas variados da pesquisa acadêmica, principalmente associados às didáticas das Matemáticas e às teorias da didática francesa. A Teoria Antropológica do Didático (TAD), juntamente com outras teorias como a Teoria das Situações Didáticas (TSD), a Teoria da Transposição Didática (TTD) e a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), formam o cerne das discussões. O foco especial na TAD e no Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) demonstra o compromisso do GEDIM com abordagens pedagógicas inovadoras e eficazes, que são fundamentais para o desenvolvimento da Educação Matemática.

Este panorama das reuniões e do trabalho do GEDIM ao longo dos anos ressalta a importância da continuidade, da adaptação e da colaboração internacional no avanço da pesquisa em Educação Matemática.

13.3 Os pilares da didática francesa: TTD, TCC, TSD e TAD nas pesquisas do GEDIM

No cerne da pesquisa em Educação Matemática conduzida pelo GEDIM estão as teorias fundamentais da tradição didática francesa: a TTD, a TCC, a TSD e, em especial, a TAD. Essas teorias, desenvolvidas por eminentes educadores e pesquisadores franceses, fornecem um arcabouço robusto para a análise e o desenvolvimento da Educação Matemática.

A TTD, criada por Yves Chevallard, aborda o processo pelo qual o conhecimento matemático é transformado ao ser transmitido da comunidade matemática para o ambiente educacional. Essa teoria enfatiza a necessidade de uma adaptação cuidadosa do conteúdo matemático para torná-lo acessível e relevante para os alunos.

A TCC, desenvolvida por Gérard Vergnaud, concentra-se na estruturação e no desenvolvimento de conceitos matemáticos na mente dos alunos. Ela propõe que o aprendizado ocorre em campos conceituais, que são conjuntos de situações que demandam a mesma categoria de operações mentais.

A TSD, formulada por Guy Brousseau, examina a relação entre o aluno, o professor e o saber matemático, enfocando as situações didáticas como meio de promover o aprendizado autônomo dos alunos.

A TAD, também de autoria de Yves Chevallard, é uma das principais teorias estudadas no GEDIM. Ela oferece uma abordagem abrangente para entender o ensino e a aprendizagem da Matemática, focando nas relações praxeológicas do saber.

Dentro do GEDIM, a TAD e o dispositivo didático metodológico PEP são atualmente os principais focos de pesquisas, contribuindo consideravelmente para a formação de professores. O PEP, integrado dentro da estrutura da TAD, proporciona uma metodologia inovadora para explorar conceitos matemáticos, permitindo que os alunos construam ativamente o conhecimento por meio da investigação e da resolução de problemas.

As pesquisas realizadas por seus membros com base nestas teorias são particularmente relevantes para a Educação Matemática. Elas não apenas refletem a aplicação dessas teorias em contextos específicos, mas também contribuem para o desenvolvimento e a adaptação de práticas pedagógicas que atendem às necessidades educacionais da região amazônica.

Por meio da incorporação destes pilares da didática francesa em suas pesquisas, o GEDIM se destaca como um grupo que produz pesquisas relevantes para a sociedade, influenciando profundamente a formação de professores e a prática pedagógica na Educação Matemática.

13.4. Perspectivas futuras: divulgação e difusão das pesquisas do GEDIM

As contribuições do GEDIM na educação matemática se estendem para além dos limites acadêmicos tradicionais, abrangendo diversas plataformas e meios de comunicação. O grupo tem se empenhado não só na realização de pesquisas relevantes, mas também na ampla divulgação e difusão desses estudos.

As produções acadêmicas do GEDIM, que incluem artigos publicados em periódicos especializados e trabalhos acadêmicos como dissertações e teses, encontram-se armazenadas nos repositórios da Universidade Federal do Pará (UFPA) e da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). Além disso, o grupo tem um compromisso contínuo com a acessibilidade e a visibilidade de suas pesquisas, mantendo um site dedicado (http://www.gedimufpa.com.br/) onde essas produções estão disponíveis. Esta plataforma online não só facilita o acesso às pesquisas desenvolvidas pelo grupo, mas também serve como referência para acadêmicos, educadores e estudantes interessados na área de Educação Matemática.

Sobre as produções em Educação Matemática, concordamos com Oliveira *et al.* (2021, p. 1196), quando diz que

> A Educação Matemática concebe a relação entre educação e Matemática, portanto, deve ser entendida como uma prática social que envolve as relações humanas. A produção de conhecimentos decorre da interação dos sujeitos com o meio no qual estão inseridos, estando inclusas pesquisas científicas que promovem a comprovação e a socialização de novos conhecimentos.

Olhando para o futuro, o GEDIM almeja expandir ainda mais seus horizontes de divulgação, planejando marcar presença ativa nas redes sociais. Este movimento em direção a plataformas digitais mais dinâmicas e interativas tem o potencial de aumentar significativamente o alcance das pesquisas do GEDIM, fomentando discussões mais amplas e engajando um público mais diversificado em questões relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática.

A importância dessa estratégia de divulgação e difusão não pode ser subestimada. Ao tornar suas pesquisas mais acessíveis e promover o diálogo aberto em plataformas digitais, o GEDIM não só aumenta o impacto de seu trabalho, mas também contribui para o avanço contínuo da Educação Matemática como um campo dinâmico e em constante evolução. Essa abordagem progressista garante que as contribuições não se limitem ao ambiente acadêmico, mas permeiem todos os níveis da educação, influenciando práticas pedagógicas e políticas educacionais.

Dessa maneira, as perspectivas futuras para a divulgação e difusão das pesquisas do GEDIM são promissoras e fundamentais para o crescimento contínuo do grupo. Elas representam um passo importante na missão de enriquecer o campo da Educação Matemática.

13.5 A contribuição dos líderes do GEDIM na formação de professores

A atuação dos professores líderes do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) – Professores Doutores Renato Borges Guerra, José Messildo Viana Nunes, Saddo Ag Almouloud e José Carlos Pereira, foi decisiva para o surgimento e reconhecimento do grupo de pesquisa e atualmente tem sido fundamentais na formação inicial e contínua de professores. Esses líderes, com suas vastas experiências e conhecimentos especializados, têm desempenhado papéis que vão além da sala de aula, estendendo-se à orientação, organização, produção e mentoria no campo da pesquisa educacional.

Um dos aspectos mais significativos do trabalho desses professores é a orientação de pesquisas de pós-graduação. Por meio de suas contribuições, têm guiado estudantes de mestrado e doutorado no desenvolvimento de pesquisas relevantes no campo da Educação Matemática, em consonância com (Ferreira; Furtado; Silveira, 2009, p. 171) que admitem que

> [...] o ponto central do sistema de Pós-Graduação (PG) reside na orientação. Complexa, diversificada e por vezes difícil de ser definida, a relação orientador-orientando é não apenas extremamente importante para o desempenho de uma PG, mas absolutamente fundamental enquanto parte integrante do processo. Passando por uma gama de pré-condições, da competência à empatia, ela se prende boa parte do sucesso ou insucesso de um pós-graduando, com implicações que podem ser igualmente significativas para seu orientador e para o próprio Programa a que ambos pertencem. Humildade profissional, disposição e compreensão mútuas perpassam a relação.

Essas orientações não se limitam apenas à transmissão de conhecimento acadêmico, também envolvem a formação de pensadores críticos e educadores competentes, capazes de investigar propostas para enfrentar os desafios contemporâneos da Educação Matemática. Envolvem inclusive o aconselhamento e o apoio contínuo aos pesquisadores em formação, orientando-os a desenvolver estudos que cooperem significativamente no avanço da área da Educação.

Além disso, esses líderes do GEDIM desempenham um papel essencial no estímulo à participação nas atividades semanais do grupo, na socialização das pesquisas em andamento, na organização de eventos acadêmicos, seminários e workshops, criando oportunidades para o diálogo, engajamento, troca de ideias e a disseminação de novos conhecimentos. Esta abordagem colaborativa contribui significativamente para a construção de uma comunidade acadêmica consistente e interconectada no campo da Educação.

Na produção acadêmica, os líderes do GEDIM têm contribuído com relevantes publicações em periódicos qualificados, produções de livros e capítulos de livros, enriquecendo o campo da Educação Matemática. A difusão das pesquisas desenvolvidas no âmbito da TAD e nas suas articulações com outras teorias não só contribuem para elevar o padrão acadêmico na área, mas também fornecem recursos significativos para professores em processo formativo ou em atuação profissional docente.

O verdadeiro trabalho de um professor pesquisador em um grupo de pesquisa como o GEDIM em uma universidade é multifacetado e impactante. Ele abrange a liderança intelectual, a inovação na pesquisa, a contribuição para a política educacional e a formação de uma nova geração de educadores. Esses líderes do GEDIM exemplificam esse papel, demonstrando como a pesquisa acadêmica pode ser integrada na prática educativa e como pode influenciar positivamente a educação matemática em diversos contextos.

13.6 As produções dos membros do GEDIM e as influências na Educação Matemática

As produções acadêmicas geradas pelos membros do GEDIM constituem uma referência em estudos desenvolvidos no âmbito da TAD e indicam influências da Didática Francesa na Educação Matemática no norte do Brasil. O grupo tem disseminado suas pesquisas nos níveis de mestrado e doutorado do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM–IEMCI). A repercussão das pesquisas desenvolvidas é evidenciada por meio de publicações em periódicos e em eventos tanto nacionais quanto internacionais, incluindo a publicação de livros relacionados às temáticas investigadas pelo grupo. Segundo Barreto (2023),

> De acordo com nosso contexto de pós-graduação na Universidade Federal do Pará – UFPA, especificamente, no Instituto de Educação Matemática e Científica – IEMCI, no bojo do Grupo de Estudo e Pesquisa em Didáticas das Matemáticas – GEDIM, podemos dizer que o grupo está na vanguarda de pesquisas no campo da Educação Matemática, bem como é referência nos estudos da Teoria Antropológica do Didático (TAD) e do dispositivo didático-metodológico Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP). Assim, podemos citar como evidência o número de Teses encontradas nesta pesquisa que usam o PEP, pois se trata especificamente de pesquisadores membros do GEDIM.

As produções do GEDIM abrangem uma ampla gama de pesquisas, dissertações, teses, artigos e materiais didáticos, têm um papel fundamental na formação de futuros professores e pesquisadores, impactando significativamente tanto a educação básica quanto a superior.

O trabalho do GEDIM é caracterizado por sua profundidade teórica e aplicabilidade prática em atividade de estudos e pesquisa, possibilitando caminhos para a formação docente e aprimoramento das práticas pedagógicas inerentes ao ensino e a aprendizagem. Nesse sentido, as pesquisas desenvolvidas pelos membros do grupo são fundamentadas em reflexões teóricas no campo Antropológico-Didático e buscam explorar possibilidades metodológicas de ensino e de aprendizagem que atendam aos desafios contemporâneos na educação matemática.

Essas abordagens são especialmente relevantes para a formação de professores, pois podem fornecer caminhos para aprofundar conhecimentos profissionais docentes específicos e disponibilizar um dispositivo didático metodológico adequados para o ensino e aprendizagem de Matemática. Ao se engajarem nesses estudos, pesquisadores, acadêmicos em formação e futuros educadores podem adquirir uma base sólida para questionar, analisar e aprimorar as metodologias educacionais, tornando-se agentes de mudança nas salas de aula.

As influências dos professores precursores do GEDIM são evidenciadas nas produções desenvolvidas no grupo, à medida que seus legados teóricos e metodológicos permeiam cada produção individual e coletiva, inspirando novas gerações de pesquisadores a continuar explorando e expandindo os horizontes da Educação Matemática. Esses precursores estabeleceram os alicerces sobre os quais o GEDIM constrói suas pesquisas, garantindo que as contribuições do grupo sejam tanto um reflexo da indispensável produção acadêmica quanto um avanço rumo a novas descobertas e inovações.

As produções do GEDIM, portanto, são mais do que simples contribuições acadêmicas, elas representam um encadeamento entre teoria e prática, que fundamenta a formação de educadores e influencia diretamente a qualidade do ensino nas salas de aula de educação básica e superior. Ao integrar pesquisa rigorosa com aplicação prática, o GEDIM desempenha um relevante papel no avanço da Educação Matemática e na formação de uma nova geração de professores e pesquisadores.

13.7 Perspectivas futuras de pesquisas do GEDIM em artigos, dissertações e teses

As linhas de pesquisa adotadas pelo Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEDIM) refletem um compromisso contínuo com a construção de novos conhecimentos e sua relevância no campo da Educação Matemática. Atualmente, o grupo se concentra principalmente em duas áreas: "Didática e Formação Docente" e "Abordagens Metodológicas na Perspectiva do Ensino de Matemática". Estas áreas não apenas compreendem um vasto leque de temas, mas também estão em constante evolução, adaptando-se às mudanças e desafios do cenário educacional contemporâneo.

Com vistas ao futuro, o GEDIM almeja explorar novas direções de pesquisa que incorporem as tecnologias digitais avançadas e a inteligência artificial no contexto do ensino de Matemática. Esta abordagem tem o potencial de transformar significativamente a maneira como a Matemática é ensinada e aprendida, oferecendo aos alunos experiências de aprendizagem mais interativas, personalizadas e eficazes. A incorporação de ferramentas tecnológicas avançadas, como softwares educacionais, plataformas de aprendizagem adaptativa e sistemas de inteligência artificial no âmbito da TAD, pode enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem no âmbito da Formação docente e de novas abordagens metodológicas no ensino de Matemática.

Além disso, o GEDIM pretende continuar sua tradição de produzir e publicar pesquisas de alta qualidade em periódicos qualificados. Estes artigos abordarão uma variedade de temas relacionados ao ensino e à aprendizagem da Matemática, refletindo tanto as pesquisas teóricas quanto as aplicações práticas. A publicação em periódicos renomados assegura que as descobertas e inovações do grupo sejam compartilhadas com a comunidade acadêmica, contribuindo assim para o avanço do conhecimento no campo da Educação Matemática.

A perspectiva futura do GEDIM também inclui a orientação de dissertações de mestrado e teses de doutorado que investigam essas novas áreas de pesquisa. Ao orientar os estudantes de pós-graduação por temas emergentes da atualidade, o GEDIM não só contribui para a formação da próxima geração de educadores e pesquisadores, mas também assegura que suas pesquisas estejam na vanguarda das pesquisas educacionais.

Em síntese, as perspectivas futuras do GEDIM para a pesquisa em Educação Matemática são condizentes a essência do que se espera de um grupo de pesquisa: contribuir com a construção de novos conhecimentos na área, a partir das investigações de questões atuais. Ainda há muito para pesquisar. A diversidade de pesquisas iniciadas a partir das discussões teóricas proporcionadas no grupo, representam uma valiosa fonte de possibilidade nas áreas da Didática, da formação docente e de novas abordagens metodológicas para o ensino de Matemática". Essa multiplicidade de abordagens e perspectivas enriquece o campo da Educação Matemática e pode permitir uma compreensão mais abrangente e aprofundada das complexidades envolvidas no ensino e aprendizagem da Matemática.

13.8 Contribuições do GEDIM na tese de Barreto (2023): prelúdio da tese de Barreto (2023)

A concepção da tese de Barreto (2023) tem suas raízes nas interações e discussões enriquecedoras no bojo do GEDIM. Dentro do ambiente estimulante e colaborativo do grupo, nasceu a ideia dessa pesquisa ambiciosa, que mais tarde se materializaria em uma tese de doutorado. O cerne das discussões que inspiraram Barreto estava centrado na TAD e no dispositivo didático metodológico PEP elementos chave no campo da Didática da Matemática.

A referida tese de Barreto foi orientada pelo Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes e coorientada pelo Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, ambos líderes proeminentes do GEDIM e pesquisadores renomados no campo da Educação Matemática. Sob a orientação desses acadêmicos experientes, Barreto, que já possuía uma trajetória de cerca de 18 anos como professor de Matemática, conseguiu unir sua experiência prática em sala de aula com os ricos conhecimentos teóricos oferecidos pelo GEDIM.

O foco de Barreto, tanto em sua carreira docente quanto na tese, sempre esteve voltado para a dinâmica da sala de aula, uma perspectiva que enriquece significativamente sua pesquisa. Com a orientação e o apoio do GEDIM, ele analisou diferentes tipos de teses que utilizaram o PEP no Brasil, oferecendo uma análise abrangente e crítica de como este dispositivo tem sido empregado na Educação Matemática.

A tese de Barreto é um reflexo da importância dos encontros e discussões proporcionadas no GEDIM. As ideias e conceitos debatidos nessas reuniões não apenas inspiraram sua pesquisa, mas também reforçaram a importância do PEP como uma ferramenta didática metodológica. Ao mesmo tempo mostrou o papel fundamental dos orientadores na moldagem de pesquisas teoricamente sólidas e socialmente relevantes, especialmente no que diz respeito às complexidades do ensino da Matemática em sala de aula.

13.9 A influência do GEDIM na pesquisa de Barreto (2023)

A pesquisa desenvolvida por Barreto em sua tese de doutorado de 2023 é enraizada na trajetória acadêmica do GEDIM na UFPA. Uma nuance notável dessa influência é a inclusão e análise de 13 teses publicadas por membros do GEDIM, todas elas originárias do âmbito da UFPA. Essas teses não apenas forneceram um alicerce teórico e metodológico sólido para sua pesquisa, mas também destacaram o caminho já percorrido por outros pesquisadores integrantes do grupo.

O GEDIM, com suas reuniões regulares e debates acadêmicos intensos, serviu como um impulsionador para a evolução da pesquisa de Barreto. Foram nas reuniões do grupo que aconteceram a maior parte das discussões críticas relacionadas à construção de sua pesquisa. Esses encontros semanais não eram apenas sessões de debates; eles se transformaram em fóruns de aprendizado colaborativo e análise crítica, onde Barreto pôde aprimorar suas ideias e metodologias com o apoio e a orientação de acadêmicos experientes.

Além disso, eventos relevantes que acontecem no GEDIM, como o Seminário Avançado I, desempenharam um papel crucial no desenvolvimento da tese. Nestes eventos, Barreto teve a oportunidade de apresentar suas ideias iniciais, receber *feedback* valioso e refinar suas abordagens teóricas e metodológicas. Este processo culminou em momentos cruciais de sua jornada acadêmica no doutoramento - a qualificação e a defesa da tese - que também foram fortemente influenciados pelas discussões e pelo aprendizado obtidos nas reuniões do GEDIM.

A referida pesquisa, portanto, é mais do que um produto de pesquisa individual; representa a importância do ambiente colaborativo e intelectualmente estimulante do GEDIM. As discussões e as orientações obtidas dentro do grupo não apenas enriqueceram sua pesquisa, mas também exemplificaram como um grupo de pesquisa dinâmico e engajado pode ter um impacto profundo na trajetória acadêmica de seus membros, moldando pesquisas significativas que podem contribuir de forma valiosa para o campo da Educação Matemática.

13.10 A pesquisa de Barreto (2023): Investigação do PEP na Educação Matemática Brasileira

A tese de doutorado de Barreto (2023) representa um marco significativo na pesquisa sobre a Educação Matemática no Brasil, com um enfoque particular na TAD e no dispositivo didático metodológico PEP. A pesquisa de Barreto investigou de forma minuciosa as teses publicadas no Brasil entre 2011 e 2021 que utilizam o PEP.

O objetivo central da pesquisa de Barreto foi realizar uma caracterização detalhada dos PEP desenvolvidos nas teses brasileiras, visando criar categorias distintas de PEP. Este trabalho meticuloso não apenas forneceu uma visão abrangente de como o PEP tem sido empregado nas pesquisas acadêmicas no Brasil, mas ofereceu uma estrutura para entender as diferentes abordagens e aplicações desse dispositivo no ensino de Matemática.

Um aspecto notável da pesquisa de Barreto é o destaque dado às teses que utilizaram o PEP no estado do Pará, as quais foram conduzidas por membros do GEDIM. Essa ênfase sublinha o papel vital do grupo na promoção e no desenvolvimento do PEP na região, demonstrando sua relevância no avanço da pesquisa em Educação Matemática na Amazônia.

Além disso, a tese de Andrade (2012) recebe atenção especial na pesquisa de Barreto, por ser a primeira tese no Brasil a desenvolver um PEP. Este marco inicial na utilização do PEP no Brasil estabelece um ponto de referência importante para a pesquisa desenvolvida, pois evidenciou as origens e a evolução desse dispositivo no contexto educacional brasileiro.

Dessa maneira, a tese de Barreto (2023) é uma contribuição para a pesquisa em Educação Matemática, especialmente no que se refere ao uso do PEP no Brasil. Seu trabalho reflete uma análise profunda das diversas aplicações do PEP, destacando as contribuições significativas dos membros do GEDIM e estabelecendo uma categorização de PEP como bases para futuras pesquisas.

13.11 Resultados alcançados por Barreto (2023): Uma análise detalhada do PEP

A tese de Barreto (2023) marca um importante avanço no entendimento do PEP na educação matemática brasileira. Os resultados alcançados, em grande parte, são fruto das discussões enriquecedoras no GEDIM e da análise meticulosa de teses selecionadas a partir de elementos de uma revisão sistemática. Esta investigação detalhada permitiu construir uma compreensão abrangente das principais características do PEP, resultando em uma categorização inédita dos PEP desenvolvidos no Brasil.

Nesse sentido, os resultados mais notáveis da pesquisa de Barreto referem-se a classificação do PEP em diferentes tipos, como PEP Aberto, Semiaberto e Fechado. Esta classificação ajuda a compreender as diversas maneiras como o PEP pode ser estruturado e implementado em contextos educacionais variados. Além disso, a pesquisa detalha a composição dos sistemas do PEP, incluindo sistemas principais e auxiliares, e explora o ponto de partida dos PEP, identificando os gatilhos que iniciam o processo de investigação e aprendizagem.

Outros aspectos analisados incluem a dinâmica de surgimento e desdobramento da questão Q, a base de muitos PEP, e a construção da resposta $R^{\heartsuit}$, que envolve processos de estudo, desconstrução, questionamento e reconstrução de $R^{\Diamond}$, bem como a análise de obras relevantes. Barreto (2023) também examina as particularidades das funções de produção no PEP, como cronogênese, mesogênese e topogênese, e os princípios estruturantes do PEP, juntamente com as dialéticas correspondentes.

A análise realizada foi crucial para revelar as condições e restrições das intervenções didática e adidática por meio do PEP. As descobertas contribuíram para a formação de um panorama detalhado do PEP no Brasil, auxiliando na categorização dos tipos de PEP. Estas categorias, que emergiram dos PEP analisados e das proposições baseadas em pesquisas e discussões do GEDIM, incluem:

- PEP Raiz, Fechado, Aberto, Semiaberto;
- Micro PEP, Nano PEP;
- PEP à distância, PEP híbrido;
- PEPO (Percurso de Estudo e Pesquisa Orientado);
- PEP para a formação profissional, formação profissional docente e formação do formador de docentes.

Essas categorizações refletem não apenas as diversas aplicações do PEP, mas também a experiência de quase duas décadas de Barreto no ensino da educação básica. Assim, a tese de Barreto (2023) estabelece um marco na pesquisa em Didática da Matemática, evidenciando a riqueza e a complexidade do PEP como ferramenta didática e metodológica e contribuindo para um entendimento mais profundo de sua aplicação e eficácia no ensino de Matemática.

13.12 Considerações finais

Este capítulo apresentou uma análise das diversas contribuições do GEDIM e seus membros no avanço no campo da Educação Matemática, enfatizando em três seções, tópicos que abordam aspectos relevantes da atuação do grupo na formação docente e seu impacto significativo no campo da Educação Matemática.

Inicialmente, discutimos a relevância dos grupos de pesquisa para o avanço da ciência, destacando a atuação do GEDIM na formação inicial dos pesquisadores e futuros professores oportunizando aprofundamento de questões teóricas associadas aos três pilares da Didática Francesa. Analisamos como as reuniões e trabalhos desenvolvidos pelo grupo ao longo dos anos, especialmente em relação à Teoria Antropológica do Didático (TAD) e ao Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), têm moldado parte do cenário da Educação Matemática no Brasil.

Em seguida, ressaltamos as perspectivas futuras de pesquisas do GEDIM, contemplando as linhas de pesquisa do grupo e as inovações planejadas para incorporar novas tecnologias e abordagens pedagógicas. As contribuições dos professores líderes do GEDIM na formação de professores e na orientação de pesquisas também foram examinadas, sublinhando o papel fundamental destes acadêmicos na mentoria e no desenvolvimento profissional dos futuros educadores.

Abordamos ainda a tese de Barreto (2023), destacando como sua pesquisa foi influenciada e moldada pelas discussões e orientações dentro do GEDIM. Analisamos os resultados obtidos por Barreto, que incluem a categorização e análise das aplicações do PEP em teses brasileiras, enfatizando as contribuições e inovações nesta área.

Ao refletirmos acerca dos avanços nas abordagens teórico-metodológicos em Educação, frisamos a relevância do GEDIM na formação de professores até a influência na pesquisa acadêmica. Além disso, destacamos o empenho dos líderes do grupo em buscar diálogo com outros grupos de pesquisas nas reuniões do GEDIM. A diversidade de perspectivas enriquece as discussões e favorecem articulações teóricas significativas para lidar com as complexidades inerentes ao campo da educação matemática. Essas ações, refletem um compromisso contínuo com a produção de novos conhecimentos para avanço da área, influenciando positivamente a prática pedagógica e a pesquisa acadêmica.

Referências

ANDRADE, R. C. D. **A noção de tarefa fundamental como dispositivo didático para um percurso de formação de professores:** o caso da geometria analítica. 2012. 174 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas, Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2012.

BARRETO, Saul Rodrigo da Costa. **Percurso de estudo e pesquisa:** condições e restrições reveladas pelas teses defendidas no Brasil na área da educação matemática de 2011 a 2021. Orientador: Prof. Dr. José Messildo Viana Nunes. 2023. 239 f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas) - Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e

Científica, Belém, 2023. Disponível em: https://repositorio.ufpa.br/jspui/handle/2011/15968. Acesso em:.27/11/2023.

BITTAR, M. *et al.* **Proposta de criação do GT Didática da Matemática**. 2015. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/files/solicitacao_gt14.pdf. Acesso em: 21 nov. 2023.

CHEVALLARD, Y. (1991) *La transposition didactique. Du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage, Grenoble (2ª edición).

CYRINO, M. C. C. T. **Grupos de Estudo e Pesquisa e o Movimento de Constituição da Identidade Profissional de Professores que Ensinam Matemática e de Investigadores**. *REnCiMa*, v. 9, n. 6, p. 1-17, 2018.

FERREIRA, Lydia Masako; FURTADO, Fabianne; SILVEIRA, Tiago Santos. **Relação Orientador-Orientando: o conhecimento multiplicador**. Acta Cirúrgica Brasileira, São Paulo, v. 24, n. 3, p. 170-172, 2009. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S010286502009000300001&script=sci_arttext&tlng=pt>. Acesso em: 29 nov. 2016.

NÓVOA, A. **Os professores e o "novo" espaço público da educação**. In A. Nóvoa (Ed.), Formação de professores e trabalho pedagógico Lisboa: Educa. 2002, pp. 9-29.

OLIVEIRA, C. O. *et al.* **Tecnologias no ensino e na formação de professores em discussão**. In: André Luis de Oliveira. (org.). Tornando-se formadores (as) de professores (as) de Ciências da natureza e matemática: reflexões teórico-práticas. Maringá: Eduem, 2021. Cap.8, p. 145-162.

SANTANA, Flávia Cristina de Macêdo *et al.* **Grupo de Estudo e Pesquisa em Matemática e Educação:** novos caminhos para o desenvolvimento profissional. **REMATEC**, v. 6, n. 8, p. 51-55, 2011

14- GEDIM Statistic: Experiência exitosa do Grupo de Estudos e Pesquisa da Didática da Matemática

Vera Debora Maciel Vilhena
José Messildo Viana Nunes
Jacqueline Agnes da Silveira Santos
Silvia Caroline Salgado Pena
Matheus Raphael Lopes Dinelli

Introdução

Sendo a Universidade promotora de diálogo, em Grupos de Pesquisas, que contribui com as novas perspectivas da base educacional em nosso País, O grupo de Estudo e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM) é um forte pilar para a formação acadêmica do Instituto de Educação Matemática Cientifica (IEMCI/UFPA) e tem proporcionado uma base sólida para crescimento das pesquisas e estudos que envolvem a Didática da matemática na Universidade Federal do Pará construindo um espaço para a pesquisa e para o estudo das diversas teorias que buscam compreender e indicar as razões de ser para o ensino de objetos da matemática nas escolas e universidades, com vistas à melhoria do ensino e da aprendizagem da matemática.

É neste solo fértil para o conhecimento e busca pelo desafio na melhoria da educação estatística na comunidade educacional que nasceu o grupo GEDIM STATISTIC, com a missão de contribuir para o desenvolvimento de uma postura investigativa, reflexiva e crítica de estudantes (de todos os níveis educacionais) e bem como demais cidadãos da comunidade local, com temáticas relacionadas às práticas educacionais para o desenvolvimento do pensamento, raciocínio e letramento estatístico, a partir do questionamento do mundo. (Santos *et al.*, 2022).

Segundo Chevallard (2009) a escola deve ensinar não somente os conteúdos curriculares, mas, sobretudo formar cidadãos capazes de resolver problemas vivos a partir do encadeamento de questões que revelam a razão de ser do processo de estudo de forma proativa numa perspectiva que o autor denomina de *questionamento do mundo*. Tal perspectiva se impõe como um novo paradigma para se contrapor ao paradigma de visita as obras em que aceita-se as organizações matemático-didáticas presentes em livros, documentos oficiais e práticas de ensino sem maiores questionamentos dos saberes ou objetos do conhecimento.

Um dos focos do questionamento é a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), documento que serve de referência para a construção dos currículos escolares, indicando, em sua estrutura, as habilidades seguem uma progressão de construção cognitiva, a fim de contemplar a complexidade de competências a serem alcançadas, como por exemplo:

> [...] explicar a realidade, continuar aprendendo e colaborar para a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva. [...] Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. [...] Argumentar com base em fatos, dados e informações confiáveis, para formular, negociar e defender ideias, pontos de vista e decisões comuns (BRASIL, 2018. p. 9).

Braz, Batisti e Cavalcante (2022), em outras palavras, podem mencionar que esse documento aborda campos de experiência para etapa da Educação Infantil, os quais são desenvolvidos pelas crianças com intervenção direta do professor. Já no que diz respeito às etapas do Ensino Fundamental, o desenvolvimento de habilidades está pautado na transição de níveis, considerando o desenvolvimento de noções, ainda no ciclo de alfabetização posteriormente, no Ensino Médio, desenvolvem-se capacidades que implicam em um raciocínio mais complexo.

A Base Nacional Comum Curricular, também traz na unidade temática Estatística e Probabilidade que:

> Todos os cidadãos precisam desenvolver habilidades para coletar, organizar, representar, interpretar e analisar dados em uma variedade de contextos, de maneira a fazer julgamentos bem fundamentados e tomar as decisões adequadas. Isso inclui raciocinar e utilizar conceitos, representações e índices estatísticos para descrever, explicar e predizer fenômenos (BRASIL, 2018, p. 272).

Para além do que o documento apresenta a forma de abordagem e a diversificação dos contextos em que são trabalhados devem promover uma Educação Estatística desde os anos iniciais na Educação Básica numa perspectiva proativa em relação às informações postas no dia a dia. Nesse sentido, temos os desafios para enfrentar desde os anos iniciais Educação Fundamental referente ao currículo de Matemática, que se tornou uma problemática para muitos professores que na sua maioria não tiveram esse assunto na sua formação inicial:

> A Educação Estatística é necessária, e existem documentos, como a BNCC, que corroboram sua importância. O que percebemos em nossa trajetória acadêmica e científica em prol da Educação Estatística é a carência de formação de professores para proporcionar o desenvolvimento do Pensamento, o Raciocínio e do Letramento Estatística. (BRAZ; BATISTI; CAVALCANTE, 2022, p. 150).

Diante dessa problemática o grupo GEDIM STATISTIC tem no seu principal foco de atuação abordar nas suas atividades conceitos, fatos e procedimentos presentes em muitas situações problemas, da vida cotidiana, das ciências e tecnologias que contemple essa carência na educação básica nos anos iniciais na área da Educação Estatística, pois os grupos de ensino e pesquisa são peças fundamentais para esse fim. Para esse fim, como mencionado a seguir.

> Os grupos de pesquisa representam uma instância importante e estratégica para o desenvolvimento e consolidação da pesquisa institucional, bem como, para qualificar a inserção da universidade na realidade social e no atendimento às demandas que envolvem a produção do conhecimento científico e tecnológico. A pesquisa vai além da investigação; é um instrumento que proporciona aos acadêmicos a possibilidade de tornar-se um profissional autônomo, crítico e criativo, contribuindo para sua formação. Ao desenvolver atividade de pesquisa, o aluno passa a ser protagonista e corresponsável por sua aprendizagem, em que o educador ocupa um papel de facilitador desse processo. Assim, a introdução do estudante na iniciação científica, através do exercício da pesquisa, pode despertar para o gosto pela investigação. (KRUG *et al.*, 2011).

Para alcançar o objetivo o grupo vem nesses quatro anos de existências promovendo para a comunidade acadêmica, palestras com temas pertinentes da área, minicursos e oficinas com uso do material concreto a tecnologia, e, divulgando pesquisas em artigos científicos, livros e capítulos de livros, todos com ênfase no desenvolvimento das três competências para o ensino de estatística: Letramento, Pensamento e Raciocínio, a partir do questionamento do mundo, que será mencionado nos resultados e discussões desse texto.

Antes do grupo GEDIM STATISTIC, atuar na Comunidade Educacional procurou saber por meio de pesquisas, como os assuntos de Educação Estatística estavam sendo abordado na formação inicial e continuado de professores da Educação Básica.

14.1 A importância da Educação Estatística na formação inicial de professores da educação básica

Pesquisas e documentos de orientações curriculares nas últimas décadas (BRASIL, 2008 a 2019) têm sugerido que professores, ao ensinar Estatística devam possibilitar aos alunos a: formulação de problemas a serem investigados; realização de coleta, organização e representação de dados; utilização de medidas estatísticas adequadas para analisar dados; elaboração e avaliação de previsões; resolução de problemas que envolvam raciocínio, pensamento e Letramento Estatísticos; compreensão da inter-relação entre Probabilidade e Estatística.

Desta forma, defendemos que os conceitos estatísticos devem ser trabalhados desde a formação inicial de professores (LOPES, 2008). Lopes (2010, p. 48) enfatiza que "a Estatística e a probabilidade, ainda não tem sido prioridade na escola, nem nos programas de formação inicial e continuada de professores que ensinam matemática". Ademais, a valorização do ensino de Estatística e o diálogo com a Matemática parecem ainda não ocorrer na nossa realidade escolar e nos cursos de formação de professores, pois os formandos chegam ao final da licenciatura sem condições para trabalhar a Estatística em sala de aula (COSTA; NACARATO, 2011, p. 07).

Segundo Sousa *et al.* (2013), trabalhar com Probabilidade e Estatística desde os anos iniciais da escolarização é de suma importância para que as crianças, a partir de seu conhecimento de mundo e dos saberes referentes a essas duas áreas, sejam capazes de generalizar resultados e aplicá-los em situações reais, conscientes da incerteza presente nelas.

Diante disso, Souza (2016) destaca a importância de ensinar e aprender estatística por meio da investigação, da simulação e de projetos com temas reais. Tais processos demandam conhecimento prévio e experiência por parte dos professores, uma vez que as questões postas pelos estudantes são difíceis de prever, o que dificulta o gerenciamento da aula. Para o autor, é fundamental que os professores estejam acostumados a lidar com essa abordagem desde sua formação inicial. No entanto, os cursos de formação inicial de professores raramente contemplam disciplinas de Estatística e Probabilidade.

Em relação aos cursos de formação de Professores dos Anos Iniciais, em sua maioria deles, existem poucas disciplinas de Estatística em sua matriz curricular. O que há são disciplinas relacionadas à Matemática para os anos iniciais do Ensino Fundamental que abordam os conceitos estatísticos (CAZORLA, 2015). E quando a formação estatística é realizada, o mesmo ocorre de uma perspectiva a concentrar-se em aspectos procedimentais do cálculo (SOUZA, 2014).

Para explicitar essa situação, pesquisas apontam que no Brasil os cursos de Pedagogia não apresentam disciplinas que contemplam os conteúdos de Estatística e Probabilidade como foi notadamente constatada nos estudos de Cazorla (2015). Na pesquisa da autora:

> Duas disciplinas aparecem ligadas a estes cursos: Estatística Educacional (indicadores educacionais) e Estatística Aplicada à Educação, enquanto ferramenta de tratamento de dados e noções de inferência estatística. Observa-se que nenhuma dessas disciplinas contempla a Didática da Estatística, o que também não fica explicito na disciplina de Metodologia de Ensino da Matemática. Observa-se, ainda, que os alunos dos cursos de Pedagogia mostram resistência à Matemática e Estatística, em alguns cursos as disciplinas de Estatísticas foram extintas (CAZORLA, 2015, p. 01).

O que foi evidenciado na pesquisa da autora é uma realidade dentro do contexto dos Cursos de Pedagogia no país, pois diante da notória veiculação das informações estatísticas nas mais diversas situações do nosso cotidiano, torna-se inviável negar ao aluno da Educação Básica o acesso a esse conhecimento (SILVA, 2016, p. 44).

A pesquisa também corrobora que as poucas disciplinas existentes, ainda são desconexas com as questões didático-pedagógicas colaborando ainda para o distanciamento dos alunos à Matemática (SILVA e SOUZA, 2019). É evidente que muitos professores dos anos iniciais têm dificuldade em ensinar Matemática devido à ausência desses conteúdos, sobretudo, de Estatística durante seu processo formativo relativo à didática da Estatística (BATANERO *et al.*, 2011).

Tal formação requer que os futuros professores de Matemática construam conhecimentos estatísticos e probabilísticos que "[...] lhes permitam pensar estatisticamente e probabilisticamente e aprenderem como promover o desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico de seus futuros alunos" (LOPES, 2013, p. 912).

> Assim, torna-se relevante que o curso de formação de professores de Matemática promova propostas relacionadas à resolução de problemas, a simulações e experimentos, as quais possibilitem ao docente construir conhecimentos, conforme estabelece "relações com informações adquiridas e com o domínio de diferentes linguagens e formas de expressão" (LOPES, 2008, p. 71).

Segundo Lopes (2008), o conhecimento profissional didático deverá incorporar o domínio de conceitos, representações, procedimentos, resolução de problemas, habilidades de exploração e investigação. Necessita que o docente tenha boa relação com a Matemática, gosto e disponibilidade, para se envolver em preparação das aulas, para refletir sobre os redirecionamentos no decorrer das aulas e durante momentos de formação e trabalho colaborativo.

Para Schreiber e Porciúncula (2019, p. 223), os conceitos estatísticos e probabilísticos eles estão presentes no currículo escolar brasileiro e, por conseguinte, no desenvolvimento profissional do professor de matemática, visto que sobre este recai a responsabilidade pelo Ensino de Estatística na Educação Básica, embora exista essa obrigatoriedade.

A partir das argumentações dos autores supracitados inferimos que os professores precisam possuir conhecimentos sobre a matéria que ensinam, conheçam o conteúdo em profundidade, sendo capazes de organizá-lo mentalmente, de forma a estabelecer inúmeras inter-relações, relacionem esse conteúdo ao ensino e à aprendizagem, em um processo de interação com os alunos, considerando o desenvolvimento cognitivo dos mesmos e, também, dominem o contexto, tendo clareza do local em que ensinam e a quem ensinam.

O elemento central do conhecimento profissional do professor é, sem dúvida, o didático do conteúdo, porém não é o suficiente. Faz se necessária uma combinação adequada entre o conhecimento sobre o conteúdo matemático a ser ensinado e o conhecimento pedagógico e didático de como ensiná-lo (LOPES, 2008, p. 10).

Considerando o exposto o Grupo continuou a sua formação a respeitos quais os conhecimentos estatísticos e as competências estatísticas que os professores devem desenvolver:

14.1.1 Tipos de conhecimentos estatísticos

Para Burgess (2009), os currículos escolares estão cada vez mais defendendo que as estatísticas sejam ensinadas através de investigações. Embora a importância do conhecimento do professor seja reconhecida, pouco se sabe que tipos de conhecimento do professor são necessários para o ensino de estatística na escola do nível primário.

Dessa forma Burgess sentiu a necessidade de pesquisar acerca dos "Tipos de conhecimentos estatísticos do professor usado na sala de aula primária" apoiou-se em algumas pesquisas de Wild e Pfannkuch (1999); Hill, *et al.* (2004); Ball *et al.* (2005). Esses estudos forneceram um bom ponto de partida para o autor examinar o conteúdo do conhecimento estatístico como promulgado no ensino em sala de aula. Com base nesses conhecimentos Burgess na sua pesquisa descreve uma estrutura conceitual em forma de matriz, conforme o Quadro 01, utilizado para examinar por meio de investigação o conhecimento do professor em relação à estatística.

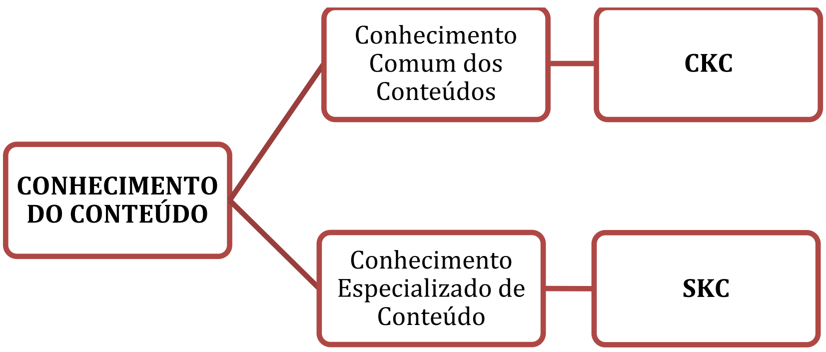
Quadro 01 – Matriz dos conhecimentos estatísticos para o ensino de Estatística.

		Conhecimento Estatistico para o Ensino			
		Conhecimento de Conteúdo		Conteúdo Pedagógico do conhecimento	
		Conhecimento Comum dos Conteúdos (CKC)	Conhecimento Especializado de Conteúdo (SKC)	Conhecimento de Conteúdo e aluno(KCS)	Conhecimento de Conteúdo e Ensino (KCT)
Pensando	Necessidade de dados				
	Transnumeração				
	Variação				
	Raciocínio com modelos				
	Integração de Estatística e Contextual				
Investigativo ciclo					
Interrogativo ciclo					
Disposições					

Fonte: Burgess (2009, p. 6).

As colunas da matriz referem-se aos tipos de conhecimentos que são importantes no ensino de Estatística relacionados com tipos de pensamentos estatísticos. Duas subcategorias de conhecimento de conteúdo são esclarecidas por Ball, Thames e Phelps (2005) como mostra a Figura 1.

Figura 1 – Subcategorias de conhecimento de conteúdo



Fonte: Autores (2022), baseado em Ball *et al.* (2005, p. 08)

a) Conhecimento Comum dos Conteúdos (CKC):

Conforme descrito por Ball, Thames e Phelps (2005, apud Burgess, 2009, p.7), o conhecimento comum de conteúdo refere-se ao que a pessoa educada sabe e pode fazer; não é específico para o professor. Eles descrevem isso como incluindo a capacidade de reconhecer respostas erradas, localizar definições imprecisas nos livros didáticos, usar notação matemática corretamente e faça o trabalho atribuído aos alunos.

Segundo Burgess (2009):

> Um professor teria conhecimento comum de conteúdo: ciclo interrogativo se fosse evidente que possibilidades em relação aos dados foram consideradas e ponderadas, com algumas possibilidades sendo posteriormente descartados, mas outros aceitos como úteis. Envolver-se com dados e ser envolvido em 'debater' com ele seria evidência de tal conhecimento. Da mesma forma, desenvolver perguntas que os dados possam responder é um aspecto do conhecimento comum de conteúdo: ciclo interrogativo. Professores que haviam mergulhado em um conjunto de dados antes de usá-lo no ensino, para que eles soubessem de algumas das coisas que podem ser encontradas nos dados, estaria mostrando conhecimento comum de conteúdo: ciclo interrogativo. Tais professores estejam preparados para saber o que seus alunos podem encontrar nos dados e que conclusões podem ser extraídas desses dados (BURGESS, 2009, p. 10).

O autor cita um exemplo do CKC: A professora Linda discutiu como os dados podem ser tratados com um tipo de pergunta de resposta aberta em uma pesquisa ou censo. Ela havia considerado, na fase de investigação de problemas, como as respostas de uma pergunta do tipo de resposta aberta representariam um desafio na etapa de análise. Isso indicava claramente que Linda tinha algum conhecimento das fases do ciclo investigativo. Conseguiu manter a consciência de uma fase posterior do ciclo (análise) ao lidar com um estágio inicial (planejamento da coleta de dados) e como as decisões nesse estágio inicial pode ter impacto nos estágios posteriores.

b) Conhecimento especializado de conteúdo (SKC):

De acordo com Martins *et al.* (2017) é o conhecimento que permite a um educador, por exemplo, promover a compreensão dos processos e representações estatística. Para Burgess (2009) ter o SKC é ser capaz de avaliar a explicação de um aluno com base em dados estatísticos e no conhecimento do contexto sob investigação. Que considera sua classificação em dois aspectos: integração de conhecimentos estatísticos e contextuais.

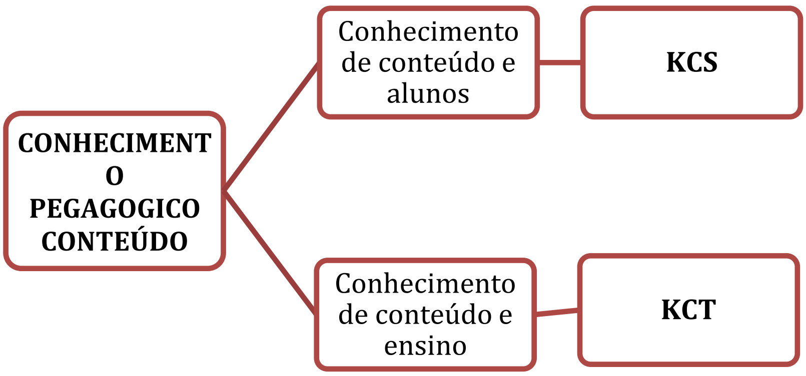
Por exemplo: Houve várias situações em que o professor preparou os alunos para coletar dados. Questões de coleta de dados foram sugeridas, como, "Qual é a sua posição na família, mais nova, intermediária ou mais velha?" Quando os alunos ao considerar a pergunta antes da coleta de dados, perguntou-se a Professora Linda: Isso conta se você tiver meio-irmão ou irmã? E se sua irmã ou irmão morreu? E se o seu irmão ou irmã não estiver morando em casa? O que você colocaria se fosse filho único? Cada uma dessas perguntas e outras envolvendo a definição de família foi inesperada pela Professora Linda. Ela teve que decidir 'no local' como responder a cada pergunta dos alunos. Ela era necessária ponderar as questões estatísticas relacionadas à resposta a uma pergunta de coleta de dados com a questão contextual de interpretação de "família". Suas respostas indicaram que ela era capaz de fazê-lo de forma satisfatória e, portanto, eram evidências de que possuía conhecimento especializado de conteúdo: integração de estatísticas e contextuais.

Burgess (2009) explícita o professor ao pensar em sugestões para o que poderia ser investigado em um conjunto de dados, precisa ser capaz de avaliar a adequação do problema / questão e se ele precisa ser refinado para ser utilizável e adequado, em relação à análise subsequente. Ou seja, quando um professor precisa considerar se uma sugestão de um aluno é viável para investigar dentro desses dados, o professor requer conhecimento especializado de conteúdo (SKC): ciclo interrogativo. Além disso, envolve determinar se a maneira sugerida pelo aluno de manipular e classificar os dados seria útil para permitir que a interpretação posterior dos resultados em relação à questão em questão.

O conhecimento do conteúdo e dos alunos inclui a capacidade de antecipar erros dos alunos e concepções errôneas comuns, interpretar o pensamento incompleto dos alunos, e prever o que os alunos provavelmente farão com tarefas específicas e o que acharão interessantes ou desafiador. O conhecimento do conteúdo e do ensino lida com a capacidade do professor de sequenciar o conteúdo da instrução, reconheça as vantagens e desvantagens instrucionais de diferentes representações e ponderar as questões matemáticas ao responder ao romance dos alunos abordagens.

Ball *et al.* (2005) também subdividem a categoria de pedagogia conhecimento de conteúdo em dois componentes, como mostra a Figura 2.

Figura 2 – Subcategoria de pedagogia segundo Ball *et al.* (2005, p.10)



Fonte: Autores (2022), baseado em Ball *et al.* (2005, p. 10)

Porém, o conhecimento de conteúdo e dos alunos, e conhecimento de conteúdo e ensino. Essas duas partes do conhecimento do professor reúnem aspectos conhecimento de conteúdo especificamente relacionado ao trabalho do professor, mas diferentes do conhecimento especializado em conteúdo.

c) Conhecimento de conteúdo e dos alunos (KCS):

Para Burgess (2009) os aspectos do conhecimento de conteúdo e alunos são o conhecimento de onde os alunos podem encontrar problemas ou desafios específicos em uma investigação, e se os alunos acharão uma investigação interessante ou difícil. Já os elementos desses conhecimentos são como os alunos lidariam com o desenvolvimento de perguntas apropriadas para investigar os dados e até que ponto eles podem se envolver com os dados e estiverem preparados para questionar e considerar várias possibilidades.

Por exemplo: Um professor previu que os alunos poderiam ter um problema em saber como interpretar uma dada questão de cobrança, teve que considerar como ele lidaria com esse problema em potencial dentro de uma fase inicial do ciclo investigativo. A fase de análise de uma investigação foi prevista para apresentar desafios para os alunos em relação a eles decidirem sobre o formulário para apresentar os dados. Alguns professores sabiam que os alunos seriam desafiados dentro do ciclo investigativo passando da fase de análise para o desenho de conclusões ou a resposta a perguntas que formaram a base da investigação. Essa conscientização significava que aqueles professores pensavam sobre como lidar com as dificuldades dos alunos.

Considerando que as perguntas dos alunos da Professora Linda relacionadas à questão dos dados de posição na família (como discutido anteriormente) foram inesperados, um dos professores previu as possíveis dificuldades para seus alunos e antecipou suas perguntas, perguntando à classe como cada criança de uma família de quatro filhos pode responder à pergunta: "Você é o mais novo, o meio ou o mais velho da família?" incentivou os alunos a pensar sobre a questão dos dados (a estatística) em associação com seus conhecimentos de famílias particulares (o contextual). Isso ajudou os alunos a entenderem que a estatística não é realizada "no vácuo", removida de problemas reais, mas lida com números que ter um contexto (Delmas, 2004, p. 02).

d) Conhecimento de conteúdo e do ensino (KCT):

Para Burgess (2009) é o conhecimento da capacidade de planejar uma sequência de ensino apropriada relacionada à transnumeração de dados, a entender quais representações provavelmente ajudarão ou dificultarão o desenvolvimento das habilidades dos alunos decidir, do ponto de vista estatístico, como responder à pergunta de um aluno, são todos os aspectos do conhecimento de conteúdo e ensino. O principal componente do conhecimento de conteúdo e ensino é a variação. Ou seja, como estruturar o ensino para entender a variação?

Diante disso, como um professor deve estruturar o ensino para incentivar o pensamento estatístico dos alunos em relação raciocinarem com modelos. Para o autor esta questão está no cerne da categoria de conhecimento do professor de conhecimento de conteúdo e ensino: raciocínio com modelos. Um professor com bons conhecimentos em Essa categoria teria considerado várias abordagens para ensinar esse aspecto, poderia justificar uma abordagem particular adotada e talvez por que outras abordagens foram rejeitadas e poderiam considerar quaisquer problemas estatísticos que possam surgir das declarações ou explicações dos alunos.

O autor conclui que saber como incentivar os alunos a considerarem a relevância do conhecimento contextual em a relação com a investigação estatística realizada é parte do conhecimento de um professor sobre conteúdo e ensino: integração estatística e contextual. As situações descritas acima para conhecimento especializado de conteúdo: integração de estatísticas e contextos (em relação à definição de casos familiares e incomuns) exigia que o professor pensasse antes de responder a cada consulta do aluno, até que ponto essas interpretações de "família" podem afetar a confiabilidade de os dados obtidos. O autor exemplifica: - Professora Linda comentou: Todo mundo tem sua própria definição do que é uma família. Então eu decidi que as crianças poderiam, se elas queriam incluir seus meios-irmãos e irmãs. Ser capaz de incentivar os alunos a pensarem em cada fase da investigação e considerar como essas fases se vincula (isto é, para lidar com as partes sem perder de vista o conjunto) são componentes do conhecimento do conteúdo e dos alunos.

A estrutura provou ser uma ferramenta útil para identificar aspectos do conhecimento dos professores em relação a pensamento estatístico. Esses aspectos foram obtidos a partir de episódios em sala de aula ou entrevistas com os professores que reexaminaram esses episódios. Geralmente, dentro de uma célula da estrutura, verificou-se que há uma diversidade de conhecimentos pertinentes ao pensamento estatístico. Consequentemente, a evidência do conhecimento do professor como relacionado ao pensamento estatístico de uma célula não implica conhecimento completo e completo para esses aspectos em relação ao conhecimento desejável associado à lição. Neste trabalho usaremos esses conceitos para nossa análise em relação ao conhecimento de Noções de Estatística durante a realização das atividades propostas.

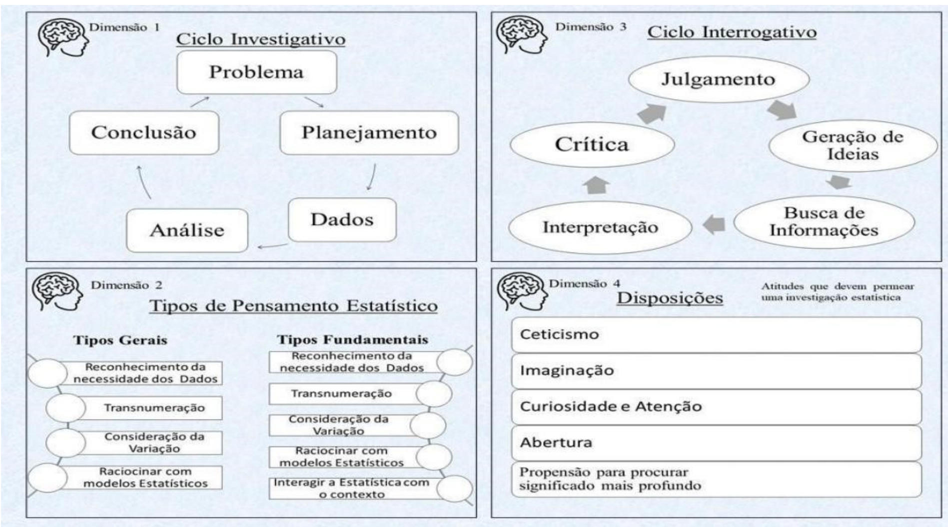
14.1.2 As três competências Estatística

Delmas (2002) enfatiza que a literacia estatística pode ser vista como o entendimento e a interpretação da informação estatística apresentada, o raciocínio estatístico representa a habilidade para trabalhar com as ferramentas e os conceitos aprendidos e o pensamento estatístico leva a uma compreensão global da dimensão do problema, permitindo ao aluno questionar espontaneamente a realidade observada por meio da Estatística.

Não há uma hierarquia entre essas capacidades, mas de certa forma há uma relação intrínseca entre elas. Delmas (2002) propõe duas interpretações para a relação entre elas. Na primeira, cada competência tem um domínio independente das demais, ao mesmo tempo em que existem interseções parciais entre dois domínios e uma parte de interseção das três competências. Se essa perspectiva está correta, é possível desenvolver uma competência independentemente das outras, ao mesmo tempo em que devem existir atividades que enfatizam as três capacidades simultaneamente.

Partimos nosso estudo acerca do Pensamento Estatístico, segundo Pfannkuch e Wild (2004) “[...] compreender a variação é determinante para pensar estatisticamente”. Os pesquisadores apontam “uma estrutura quadridimensional para o Pensamento Estatístico na investigação empírica” (PFANNKUCH; WILD, 2004, p. 19), como mostrado na Figura 3.

Figura 3 – Dimensões do Pensamento Estatístico



Fonte: Braz, Batisti e Cavalcante (2022), adaptado de Wild e Pfannkuch (1999)

Segundo os autores Braz, Batisti e Cavalcante (2022, p. 158), essa dimensão do Pensamento Estatístico seguindo a sequência constatada pelos pesquisadores iniciou pelo

Ciclo Investigativo, o qual se refere à ação e aos pensamentos criados durante a investigação estatística.

> Ao definir seu modelo PPDAC (Problema, Planejamento, Dados, Análise e Conclusão), os estudiosos consideraram a onipresença da variação na vida cotidiana como uma realidade observável, em um sistema de fluxo constante para qualquer ação. Há na segunda dimensão, nos tipos de pensamento, Pfannkuch e Wild (2004) nos apresentam uma explicação objetiva sobre sua distições. Aos tipos gerais, atribuíram pensamentos que são caracterizados pela antecipação do problema, planejamento, compreensão de contexto, representação da realidade e, principalmente, por métodos utilizados na resolução de problemas. Ademais, conforme exposto na Figura 3, os pensamentos fundamentais são considerados aqueles inerentemente estatísticos, com conhecimentos específicos (PFANNKUCH; WILD, 2004). O Ciclo Interrogativo é a terceira dimensão apresentada e se caracteriza por ser um pensamento genérico, recursivo e em constante busca pela resolução de problemas. Como quarta dimensão, temos as disposições que envolvem comportamentos atitudinais, para alcançar a criticidade perante as informações (PFANNKUCH; WILD, 2004, p. 19).

Essas quatro dimensões mostram que o desenvolvimento do pensamento estatístico é mais relevante do que conceitos matematicamente calculados (MOORE, 1997). Segundo Perin e Campos (2020):

> Refletir sobre as quatro dimensões do pensamento estatístico e os elementos de cada dimensão nos permite entendê-los, bem como as estratégias mentais utilizadas por um indivíduo durante a realização de uma pesquisa empírica. Quando o pensamento estatístico é valorizado, as interpretações prevalecem sobre os cálculos e os conceitos são sempre trabalhados no sentido do por que fazer. O como fazer decorre da necessidade de precisar fazer (PERIN; CAMPOS, 2020, p. 7).

Os autores enfatizam, para que essas competências possam ser mais bem desenvolvidas, o professor deve criar um ambiente no qual os alunos se insiram em uma prática investigativa, em que: trabalhem com temas de seu interesse; estejam em contato com dados que tenham relevância para um determinado contexto; trabalhem com diversidade de variáveis; tenham vivência com a geração e análise dos dados; trabalhem em grupos de forma a favorecer a troca de significado entre os pares; usem a tecnologia de forma a favorecer o entendimento de conceitos; sejam avaliados constantemente pelas relações e julgamentos que estabelecem para um conjunto de dados e não apenas pela aplicação de fórmulas.

Seguindo os estudos para o Raciocínio Estatístico, o raciocínio estatístico define o modo com que os indivíduos raciocinam com as ideias estatísticas e dão sentido à informação estatística. Tem subjacente a compreensão conceitual e a conexão de importantes ideias, como variação, distribuição, centro, dispersão, associação e amostragem ou a combinação de ideias sobre dados e incerteza que conduzem à realização de inferência (PFANNKUCH, 2018).

Para que os alunos possam desenvolver essa competência, as tarefas em sala de aula devem ser preparadas com o objetivo de levá-los ao desenvolvimento de ideias estatísticas centrais. É necessário que elas levem ao aprofundamento da compreensão conceitual em Estatística, ao invés da aprendizagem de procedimentos e representações específicas. Algumas dessas ideias centrais, segundo Biehler *et al*. (2018), são:

- **Dados**: o objetivo é perceber a necessidade dos dados para tirar conclusões e fazer avaliações. Aspectos ligados à obtenção dos dados que sejam válidos devem ser também contemplados.

- **Distribuição:** a ideia é levar os alunos a ter uma visão global dos dados de modo a desenvolverem a noção de distribuição.

- **Variabilidade e centro:** deve-se incentivar a conjugação da análise de medidas de tendência central com a dispersão dos dados, medida, por exemplo, pela amplitude da amostra e pela amplitude interquartis.

- **Amostragem**, inferência e probabilidade: saber como as amostras estão relacionadas com a população e o que pode ser inferido com base em uma amostra, levando os alunos a compreenderem que as decisões se baseiam em amostras.

Segundo Perin e Campos (2020), essa competência, portanto, valoriza a análise dos dados, a capacidade de raciocinar sobre eles e usá-los de modo efetivo e crítico na tomada de decisões. Dessa forma, ela contrasta com uso de fórmulas que requerem cálculos morosos, repetitivos e sem significado para os alunos. O raciocínio estatístico concerne ao trabalho com as ferramentas estatísticas, não direcionado somente a operar com elas, mas atento aos seus significados mais profundos. Trata-se da capacidade de interligar as ideias associadas a ferramentas estatísticas, de tomar ciência do seu sentido, da mensagem subjacente e, principalmente no contexto em que são utilizadas.

Já o letramento Estatístico, segundo Gal (2002, p. 2-3, tradução: Braz, Batisti e Cavalcante, 2022): ainda apresenta dois elementos considerados iminentes ao Letramento Estatístico. São eles:

> a) Capacidade da pessoa para interpretar e avaliar criticamente informação estatística, os argumentos relacionados aos dados ou aos fenômenos estocásticos, que podem ser encontrados em diversos contextos e, quando relevante, b) Capacidade da pessoa para discutir ou comunicar suas reações para essas informações estatísticas, como sua compreensão acerca do significado da informação, suas opiniões sobre as implicações desta informação ou suas considerações acerca da aceitação das conclusões dadas.

Além dos cincos requisitos básicos que a Gal (2002), propõe para o desenvolvimento do letramento Estatístico. Que estão ilustrados na Figura 4.

Figura 4 – Requisitos para o Letramento Estatístico segundo Iddo Gal

Fonte: Braz, Batisti e Cavalcante (2022) Adaptado de Gal (2002)

De acordo com Gal (2004), essas habilidades não devem ser tratadas isoladamente e elas estão correlacionadas entre si, com uma série de conhecimentos estatísticos e com atitudes que devem ser desenvolvidas e valorizadas nos estudantes. Para o autor, ir além desses conhecimentos, os educadores devem estimular atitudes de diálogo de discussão. De valorização dos estudantes e de suas ideias e interpretações, quando confrontados com mensagens do mundo real que contém elementos e argumentos estatísticos em si.

Por sua vez Burgess (2009, p. 2, tradução nossa) assevera que “os termos de alfabetização (literacia) estatística, raciocínio e pensamento, e eles estão sendo usados com crescente frequência”. Segundo Gal (2002, p.10) para que uma pessoa seja considerada letrada estatisticamente, é necessário demonstrar “familiaridade com os termos e conceitos básicos relacionados às representações gráficas e tabulares”.

Por meio desse panorama sobre o ensino da Educação Estatística na Educação Básica o grupo GEDIM STATISTIC busca proporcionar formação para o desenvolvimento do letramento Estatístico. Nesse sentido, o objetivo deste capítulo é trazer reflexões teóricas-práticas de ações empreendidas pelo GEDIM STATISTIC. No ponto de partida foi realizados encontros de formações, cursos, oficinas, palestras etc. Que serão detalhados nos próximos itens.

14.2 Metodologia

Adotamos procedimentos metodológicos de relato de experiência. Segundo Vasconcelos (2022, p. 11):

> Relato de experiência é um tipo de texto acadêmico onde **o** autor descreve e reflete sobre uma experiência ou vivência profissional, seja ela exitosa ou não. O objetivo é que esse relato possa contribuir à discussão, troca ou proposição de ideias na sua área de atuação. À primeira vista, o relato de experiência pode parecer uma simples descrição, realizada após a observação de um grupo, só que não é exatamente isso. A descrição é uma parte importante do relato de experiência, mas o texto não acaba por aí. Além da descrição, o texto deve estabelecer reflexões embasadas na experiência relatada e em um aparato teórico. Isto é, na literatura acadêmica já existente e consolidada sobre o tema tratado. Portanto, o relato de experiência é um texto de caráter narrativo, descritivo e reflexivo.

Assim relatamos a experiência do Grupo GEDIM-STATISTIC, primeiro grupo de Educação Estatística da Amazônia Brasileira com sede na Universidade Federal do Pará no município de Belém, Pará (PA), Brasil. Para discutir especificamente questões de prática de pesquisa e de ensino de estatística o GEDIM-STATISTIC é composto por profissionais estatísticos, matemáticos, contadores e pedagogos, professores e/ou pesquisadores e alunos da graduação e de pós-graduação.

O GEDIM-STATISTIC para o desenvolvimento de suas atividades faz uso de métodos e procedimentos da Ciência Estatística, uso de materiais pedagógicos adaptados de materiais reciclados para construção de gráficos e tabelas e uso da tecnologia da informação (canal no YouTube, página na internet, WhatsApp, aplicativos de videoconferência, entre outros), bem como estudo da Base Nacional Comum Curricular - BNCC e estudo de produções acadêmicas de autores nacionais e internacionais na área de Educação Estatística

14.3 Resultados e discussões

14.3.1 A trajetória histórica do GEDIM STATISTIC

As políticas educacionais são diretrizes que orientam o funcionamento da educação em um determinado país ou região e elas são definidas pelo poder público, com base em princípios e valores sociais. A internacionalização das políticas educacionais é um processo que está moldando o futuro da educação em todo o mundo.

Para Palú e Petry (2020) “já não é possível a identificação de políticas públicas genuinamente nacionais, pois, assim como no âmbito econômico, [...] as políticas públicas educacionais sofrem um processo de homogeneização, de fabricação e de difusão global". No Brasil, a internacionalização das políticas educacionais tem sido um processo gradual, mas significativo. O país tem aderido a uma série de iniciativas internacionais, como o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA) e a Estratégia 2023 da OCDE para Educação.

Em meio a esse cenário que o GEDIM STATÍSTIC, vinculado ao IEMCI/UFPA, inicialmente subgrupo do GEDIM, foi criado em 2019, iniciando suas atividades no mesmo ano, diante de uma problemática que surgiu em uma turma da graduação do curso da Licenciatura Integrada em Educação em Ciências e Matemática[93]. Sua certificação foi a partir do ano de 2022 e teve sua autonomia como primeiro grupo de Estudo e Pesquisa em Educação Estatística da Região Amazônica Brasileira (SANTOS *et al.*, 2022).

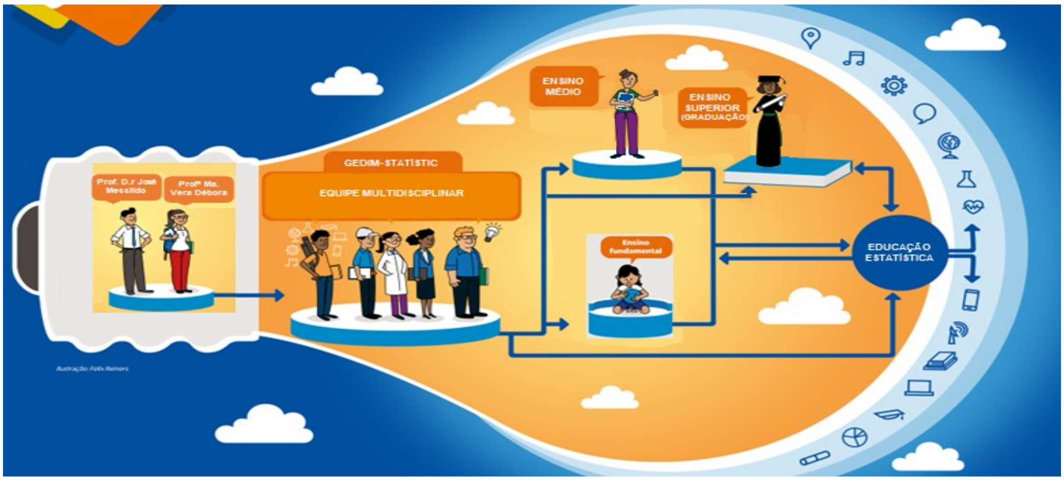
A Amazônia Brasileira, a região abriga uma vasta biodiversidade e recursos naturais, tornando essencial entender e monitorar dados ambientais. Por meio da estatística, podemos analisar padrões climáticos, mudanças na vegetação e impactos das atividades humanas, contribuindo para a gestão sustentável. Além disso, a Amazônia enfrenta desafios socioeconômicos, como acesso limitado à educação e saúde em algumas áreas. A coleta e análise de dados estatísticos podem identificar lacunas nessas áreas e orientar políticas públicas para melhorar a qualidade de vida das comunidades locais.

> Enquanto o Brasil já superou em grande medida o desafio da baixa oferta da educação básica – com números próximos à totalidade de crianças matriculadas no ensino fundamental e taxas crescentes de matrículas na educação infantil e no ensino médio –, a Amazônia Legal, ainda enfrenta dificuldades de acesso educacional, particularmente na educação infantil e no ensino médio. (CRUZ, 2021, p. 6).

Neste aspecto que surge o GEDIM STATISTIC, O grupo foi idealizado pela, então, mestranda Vera Débora Maciel Vilhena, que em conversa com seu orientador, Prof. Dr. José Messildo Viana, amadureceu a ideia que em 2019, após reunir um grupo multidisciplinar de pesquisadores e/ou professores, se materializou no GEDIM-STATÍSTIC (Figura 5).

[93] Curso de Licenciatura Integrada em Educação em Ciências, Matemática e Linguagens do IEMCI/UFPA é formar professores para o trabalho educativo profícuo e diferenciado nos anos iniciais da Educação Básica (1ª a 5ª anos e 1ª e 2ª etapas da Educação de Jovens e Adultos). https://ascom.ufpa.br/index.php/cursos-da-ufpa/546-licenciatura-integrada-em-educacao-em-ciencias-matematica-e-linguagem

Figura 5: A trajetória do GEDIM STATISTIC



Fonte: SANTOS *et al*. (2022), adaptado de https://observatorioept.org.br/conteudos/percurso-da-formacao-no-brasil

O caminho traçado para a atuação do grupo era que por meio da educação estatística se ter condições de compreender e interpretar o volume de informações produzidas pela globalização (Figura 5), como mostrado no topo da lâmpada, com as quais somos cotidianamente bombardeados impactando e sendo impactados por ela. O grupo se propôs a atuar em todos os anos escolaridades, sendo por meio da formação de professores, sendo por atuação diretamente nas turmas em escolas públicas municipais, e estaduais e nas universidades locais.

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018) uma das suas habilidades para além da formação geral:

> Considerar a realidade local, os anseios da comunidade escolar e os recursos físicos, materiais e humanos das redes e instituições escolares de forma a propiciar aos estudantes possibilidades efetivas para construir e desenvolver seus projetos de vida e se integrar de forma consciente e autônoma na vida cidadã e no mundo do trabalho. Para tanto, os itinerários devem a apropriação de procedimentos cognitivos e o uso de metodologias que favoreçam o protagonismo juvenil (BRASIL, 2028, p. 478).

E assim o Grupo GEDIM STATISTIC busca atender as habilidades do Documento por meio da Educação Estatística. Para tal, busca-se o desenvolvimento das habilidades de solução para problemas e análises de dados, possibilitando o desenvolvimento do pensamento, raciocínio e letramento estatístico, que ajuda todos a entenderem a vida além da sala de aula.

E suas reuniões são realizadas no Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA), a universidade está situada na Amazônia Legal, território que abrange aproximadamente 5.217.423 quilômetros quadrados, dados IBGE de 2022. Essa área engloba nove estados brasileiros, Acre, Amapá, Amazonas, Maranhão, Mato Grosso, Pará, Rondônia, Roraima e Tocantins. Representa aproximadamente 59% do território brasileiro. Essa região abrange uma área significativa do país e desempenha um papel importante em termos de biodiversidade, recursos naturais e regulação climática.

Nesses quatro anos de existência, tivemos muitos encontros coletivos, trocas de experiências, leituras, atividades e comunicação ativa entre todos os integrantes do Grupo, no planejamento e na organização dos encontros, assim como na realização do Projeto GEDIM vai á Escola. A seguir mostraremos as atividades que foram realizadas do Grupo.

14.3.2 Atividades do grupo GEDIM STATISTIC

No período de 2021 a 2023 o GEDIM-STATISTIC promoveu palestras, debates, mesas redondas, oficinas, e cursos com a participação de professores e/ou pesquisadores nas áreas de Educação Estatística, conforme conteúdo dos Quadros 2 e 3:

No primeiro semestre de 2020, os encontros e atividades do Grupo GEDIM STATISTIC eram na modalidade presencial, em uma sala do Instituto de Educação Matemática e Científica da Universidade Federal do Pará. Mas devido a pandemia o grupo adotou a modalidade de encontros remotos, como forma de dar continuidade aos seus objetivos. Dessa forma os ciclos de palestras ministradas virtualmente por professores e/ou pesquisadores referências na área de Educação Estatística foram de 2021 a 2023, com diversos temas (Quadros 2).

Segundo Santos *et al*. (2022, p.8), as Palestras foram momentos de estudo que possibilitaram o aprendizado e/ou aprofundamento de temas como o letramento estatístico; bem como contribuíram para a criação do canal do grupo em uma das maiores plataforma mundial de compartilhamento de vídeos, o que nos trouxe, dentre outros ganhos, a oportunidade de compartilhar esses saberes produzidos com os internautas que tenham interesse nesse.

Quadro 2. Ciclo de Palestras e Mesas Redondas promovidas pelo GEDIM STATISTIC

TEMAS DAS PALESTRAS	PESQUISADORES CONVIDADOS
Letramento Estatístico I	Profa. Dra. Irene Cazorla
Letramento Estatístico e Letramento Financeiro: Uma reflexão sobre suas possíveis articulações	Profa. Dra. Cileda Coutinho
Educação Financeira Escolar: Desafios e Possibilidades	Prof. Dr. Marco Rodrigo da Silva Assis
Educação Financeira no Ensino Fundamental I	Prof. Dr. Alexandre Damasceno
As três competências da Educação Estatística: letramento, pensamento e raciocínio estatístico.	Prof. Dr. Cassio Cristiano Giordano
Educação Financeira e Estatística: estudo de estruturas de letramento e pensamento	Prof. Me. Franco Deyvis Lima
Letramento Estatístico II	Profa. Dra. Irene Cazorla
Dos Estatísticos, Estatísticas.	Profa. Dra. Dóris Satie M. Fontes
Projetos de aprendizagem na perspectiva da Neurociência Cognitiva (Educação Estatística)	Profa. Dra. Suzi Samá
Educação Estatística na Formação de Professores	Profa. Dra. Celi Lopes
Educação Estatística - Teoria e Prática em Ambiente de Modelagem Matemática	Prof. Dr. Celso Campos
Estatística no Ensino Fundamental	Profa. Dra. Gilda Guimarães
Letramento Estatístico II	Profa. Dra. Irene Cazorla
Educação Estatística e Educação Financeira	Profa. Dra. Cileda Coutinho; Prof. Dr. Cassio Giordano; Prof. Dr. Alexandre Damasceno; Prof. Dr. Marcos Assis
A organização Didática na Perspectiva da Educação Estatística na formação inicial de Professores	Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud
Papel do Letramento Estatístico frente aos desafios do novo Ensino Médio	Profa. Dra. Mauren Porciúncula, Profa. Dra. Irene Cazorla e Prof. Dr. Leandro Diniz.
Sentido Estocástico: Consideração no novo Currículo Espanhol de Matemática	Profa. Dra. Carmen Batanero

Fonte: Autores (2023)

Com o retorno presencial no ano de 2023 à UFPA, a Liderança do Grupo Gedim Statistic teve a ideia de fazer um estudo de extensão Gedim Statistic vai a Escola, com o objetivo de levar o Ensino de Estatística para comunidade educacional (Escolas e Universidades) para professores em Formação inicial e continuada e Alunos da Educação Básica, foram realizadas 12 oficinas alguns assuntos abordados sobre questionamento do mundo para se trabalhar o ensino de Educação Estatístico e os módulos I e II Curso Análise da Estatística Implicativa ministrado pelo Professor Doutor Saddo Ag Amouloud, como mostrada (Quadro 3).

Quadro 3. Ciclo de Oficinas e Cursos promovidos pelo GEDIM-STATISTIC

<table>
<tr><th>OFICINAS E CURSOS</th><th>MINISTRANTES</th></tr>
<tr><td>Oficina na Graduação: Noções de Estatística com uso de material concreto na formação inicial de professores</td><td rowspan="8">GEDIM-STATISTIC</td></tr>
<tr><td>Oficina na semana do Calouro: Noções de Estatística na Educação Básica com uso do material Concreto</td></tr>
<tr><td>Oficina no Planetário: Aprendendo Estatística de forma dinâmica e pensativa - do uso de material concreto à tecnologia</td></tr>
<tr><td>Oficina: Estatística divertida no clube de Ciências</td></tr>
<tr><td>Oficina na Escola Souza Franco: Estatística na Educação Básica com uso do Material Concreto</td></tr>
<tr><td>Oficina Educação Estatística na formação inicial de professores</td></tr>
<tr><td>Curso de Extensão na formação continuada de professores</td></tr>
<tr><td>Oficina Graduação: Noções de Estatística na Educação Básica com uso de material concreto e a Tecnologia</td></tr>
<tr><td>Curso: Noções de Estatística na Modelagem Matemática</td><td>Profa. Ms. Vera Debora e Prof. Me. Ady Wallace; Apoio: Matheus, João Victor e Maykon</td></tr>
<tr><td>Curso: Análise da Estatística Implicativa – ASI (I e II)</td><td>Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud</td></tr>
<tr><td>Oficina: Noções de Estatística com uso do Material concreto a partir do Questionamento do Mundo</td><td>Profª Ma. Debora Vilhena e Profº Me. Jorge Williams</td></tr>
<tr><td>Oficina: Noções de Estatística com uso de material concreto</td><td>Profª Ma. Debora Vilhena e Profª Ma. Silvia Pena</td></tr>
</table>

Fonte: Os autores (2023)

Em uma das oficinas no ano de 2023 o grupo GEDIM-STATISTIC realizou com os Alunos do Clube de Ciências com tema *Noções de Estatística com uso do Material concreto* durante uma ação do Projeto *Gedim Statistic vai á Escola*, realizado dia 30/09 de 2023 (Figura 6). A atividade tinha como tema *o Açaí*[94].

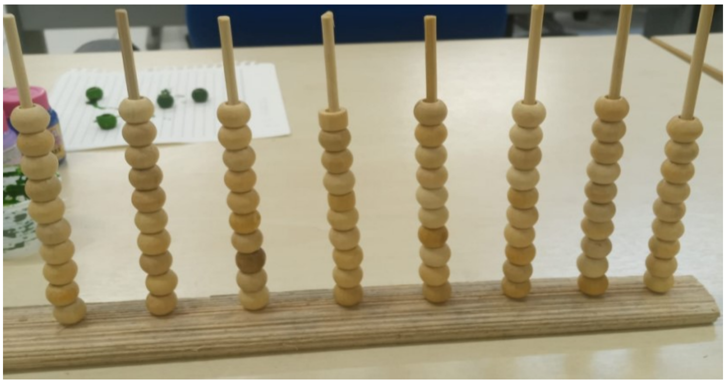
O Clube de Ciências da UFPA (CCIUFPA) é um espaço não formal de Educação Científica, pertencente ao Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI), em que os estudantes dos cursos de licenciatura, ao ingressarem como estagiários, podem viver uma experiência de antecipação à docência, envolvendo a abordagem do "Ensino de Ciências por Investigação". Em suma, para os graduandos o Clube de Ciências se configura como um laboratório didático/pedagógico, onde esses graduandos, além da

[94] O *açaí*, também conhecido como juçara, assai ou açaí-do-pará, é um fruto que cresce nas palmeiras da região amazônica na América do Sul, atualmente sendo considerado um superalimento por ser uma fonte calórica, rica em antioxidantes e nutrientes com poder anti-inflamatório. Este fruto é parecido com a uva de cor roxa e o nome científico é *Euterpe oleácea (*NAYOUNG Kim *et al*., 2016).

experiência de antecipação à docência, iniciam-se cientificamente na área do ensino de ciências, matemáticas e linguagens. Já para os estudantes da Educação Básica, o espaço oportuniza a possibilidade de uma iniciação científica infanto-juvenil e, consequentemente, a popularização da Ciência estruturalmente, e este espaço é composto por nove turmas em média de vinte e cinco alunos.

Na oficina os alunos coletaram, organizaram, analisaram e representaram os dados no material regional concreto, confeccionado pelos membros do Grupo GEDIM STATISTISC como mostrado na Figura 6.

Figura 6 – Foto do Gráfico de material concreto produzido pelo grupo Gedim Statistic, Belém – 2023.



Fonte: Acervo do Grupo Gedim Statistic

Para construção do gráfico foram utilizados materiais regionais de Belém do Pará como: Vara de Miriti - Base do Gráfico; Pau de churrasco - Colunas do Gráfico; Caroço de Açaí- Contas do Gráfico, representado na Figura 7.

Figura 7 – Foto do material concreto para produção do Gráfico utilizado na oficina pelo grupo GEDIM STATISTIC, Belém – 2023.

Fonte: Acervo do Grupo GEDIM STATISTIC

A seguir mostraremos os Resultados da pesquisa com alunos do Clube de Ciências, a pesquisa teve como tema: O *Açaí*. Que objetivou estudar noções de estatística com uso de material concreto, para anos iniciais do Ensino Fundamental da Educação Básica. Ênfase no desenvolvimento das três competências para o ensino de estatística: Letramento, Pensamento e Raciocínio, a partir do questionamento do mundo.

De uma amostra de 20 participantes que assistiram e depois comentaram sobre o vídeo - *A importância ambiental e econômica do Açaí foi formada* cinco grupos para responderem a pergunta: - *Quais os alimentos que combinam com o açaí?* Cada grupo organizou, analisou e representaram os dados em material concreto, que foi confeccionado pelos membros do Grupo GEDIM STATISTIC. A seguir os resultados da pesquisa.

14.3.3 Resultado de uma das ações do grupo GEDIM STATISTIC

As aulas ocorrem em um sábado, das 08h00min às 11h00min da manhã, no campus universitário Estadual do Pará (UEPA). A turma ficou sob a responsabilidade de dez estagiários por grupo de estudantes, os quais são acompanhados e orientados por um grupo de professores vinculados ao IEMCI/UFPA.

Na oficina participaram vinte estudantes da Educação Básica, que vão do 5º ano até o 7º ano do Ensino Fundamental (Tabela 1).

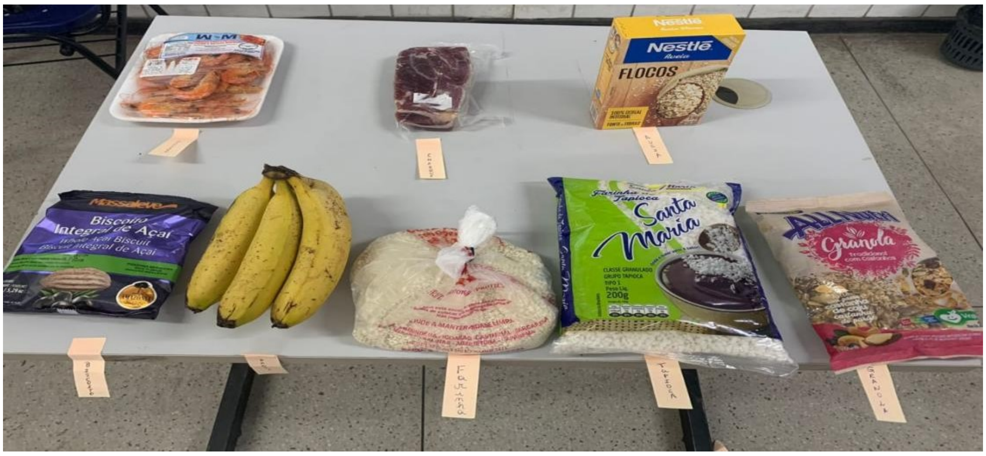
Tabela 1 - Quantitativo e percentual do nível de escolaridade dos participantes da pesquisa o Açaí realizada no Clube de Ciências da Universidade Federal do Pará, 2023.

ANO DE ESCOLARIDADE	QUANTIDADE	PERCENTUAL (%)
Quinto Ano	7	35
Sexto Ano	8	40
Sétimo Ano	5	25
Total	20	100

Fonte: Estudantes que participaram da pesquisa O AÇAÍ realizada no Clube de Ciências (2023).

Em relação à procedência dos participantes a maioria reside na Região Metropolitana de Belém. A seguir o resultado sobre a pergunta *Quais os alimentos que combinam com o açaí?* Foi apresentado, então, um contexto para favorecer a participação dos alunos na busca de respostas a pergunta, assim os integrantes do grupo GEDIM STATISTIC levaram produtos Figura 8, que possam combinar com o açaí, para ficarem em exposição durante a atividade.

Figura 8: Fotos dos alimentos que pode ser combinado com açaí.



Fonte: Acervo do Gedim Statistic (2023)

Dos 20 alunos que responderam a pergunta, 100% disseram que gostam de algum tipo de comida com Açaí. Mas com diferentes tipos de comidas como mostrado a Tabela 2.

Tabela 2 - Quantitativos de alimentos preferidos com açaí, dos Alunos do Clube de Ciências UEPA/UFPA.

ALIMENTOS	QUANTIDADE	PERCENTUAL (%)
Peixe	18	19
Açúcar	13	14
Farinha de Tapioca	13	14
Farinha D'água	11	11
Charque	9	9
Frango	9	9
Mortadela	7	7
Calabresa	6	6
Camarão	5	5
Picadinho	5	5
Total	**96**	**100**

Fonte: Alunos do Clube de Ciências da UEPA (2023)

O Peixe foi o tipo de comida individual com maior preferência pelos alunos do Clube de Ciências, que teve 18 citações dos 20 participantes, totalizando um índice de19%. Seguido de dois tipos que houve empate nas preferências, a açúcar e a farinha de tapioca com 14 alunos, totalizando os dois um índice de 28%. Mas houve algumas preferências diferenciadas como: ovos, carne, caranguejo, churrasco, bife, flocos, linguiça etc. que não estão na tabela, mas foram citados pelos alunos. Mas esse resultado só foi possível porque o Açaí é um tipo de fruto regional de Belém do Pará, todos os alunos da atividade conhecem e gostam de tomar seu suco e está no dia a dia deles, e isso contribuiu para que os alunos respondessem a pergunta, e também vem corroborar com o que diz o Lopes (2005, p.89): “O ensino e aprendizagem da Estatística deve partir de uma abordagem conceitual, inserida em situações cotidiana e significativas para os estudantes, dos quais emergem os conceitos estatísticos”.

E sobre a importância das competências Estatística, Wodewotzki (2022) ressalta que no contexto de ensino e aprendizagem da Estatística se associam a uma educação voltada para a formação de uma cidadania crítica. Nesta perspectiva, que o Grupo GEDIM STATISTIC pretendeu devolver a criticidade dos participantes da pesquisa, se baseamos em dados reais, coletados pelos próprios alunos.

Para realização das atividades adotaremos uma das dimensões do Pensamento Estatístico, o clico investigativo, Segundo Wild e Pfannkuch (1999) o qual se refere à ação aos pensamentos criados durante a investigação estatística. Ao definir seu modelo PPDAC (Problema, Planejamento, Dados, Análise e Conclusão), os estudiosos consideraram a onipresença da variação na vida cotidiana como uma realidade observável, em um sistema de fluxo constante para qualquer ação.

Etapa 1: Coleta dos dados

Durante a coleta de dados em grupo os Alunos foram registrando o que cada membro do grupo gosta de comer com açaí. Nessa etapa vimos de forma bem clara o que os autores Pfannkuch e Wild (2004) consideram fundamentais para o pensamento estatístico o reconhecimento da necessidade de dados: muitas situações reais não podem ser examinadas sem a obtenção e a análise de dados recolhidos apropriadamente. A obtenção adequada dos dados é um requisito básico para um julgamento correto sobre situação real.

E foi exatamente isso que os alunos fizeram, recolheram todos os tipos de comida preferida de cada membro do grupo, e analisaram os dados como mostrado nas Figuras 9, 10, 11 e 12.

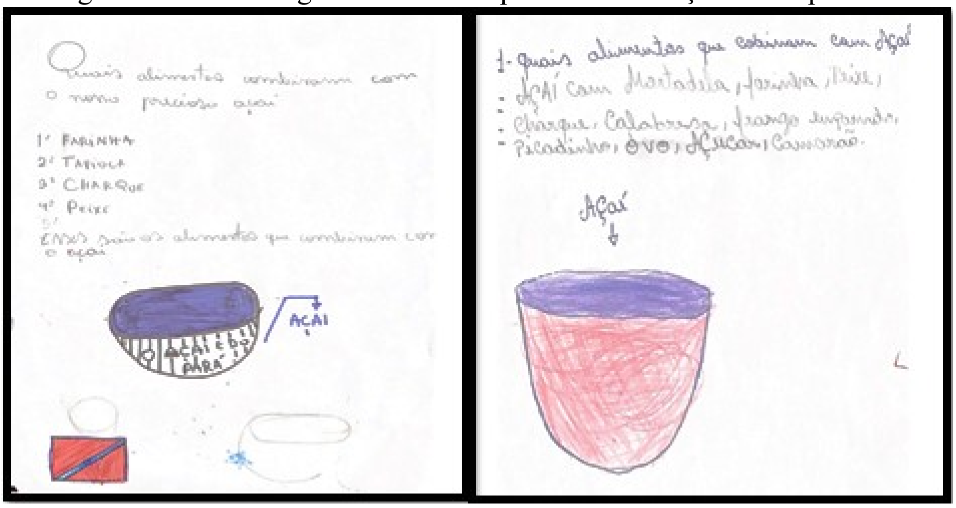
Figura 9 – Registro da comida preferida com açaí do Grupo1

Fonte: Alunos do Clube de Ciências (2023)

Figura 10– Registro da comida preferida com açaí do Grupo 2

Fonte: Alunos do Clube de Ciências (2023)

Figuras 11 e 12 – Registro da comida preferida com açaí do Grupo 2 e 3



Fonte: Alunos do Clube de Ciências (2023)

Etapa 2: Organização dos dados no material concreto

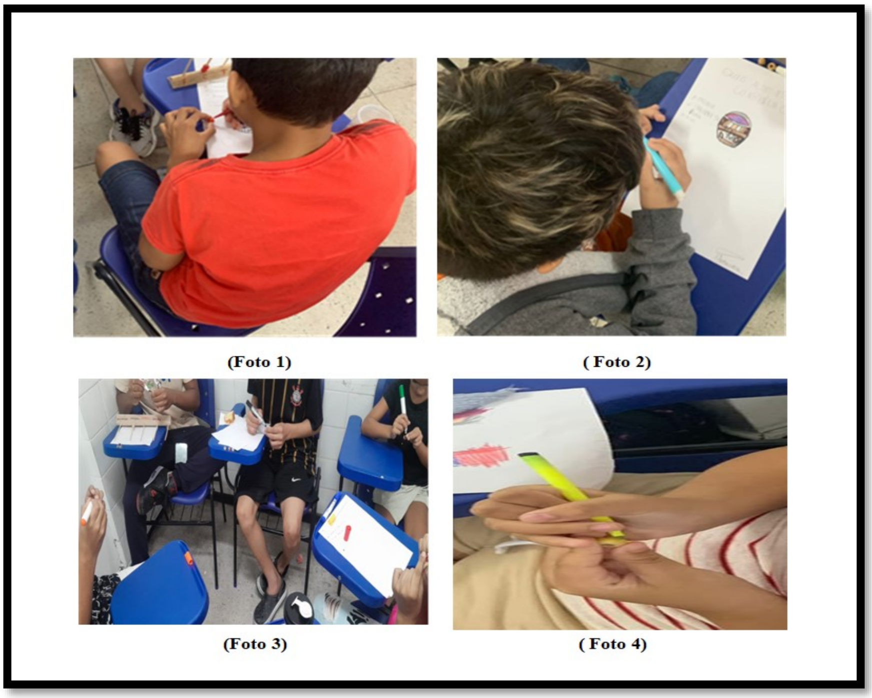
Depois das coletas de dados, os alunos pintaram os caroços de açaí para organizarem os dados no gráfico concreto. Como mostrado na Figura 7.

Essa etapa segundo Pfannkuch e Wild (2004, p. 03) e Chamada de Transnumeração que significa:

> Mudança de registros de representação para possibilitar o entendimento do problema. Esse tipo de pensamento ocorre quando (i) são encontradas medidas que designam qualidades ou característica de uma situação real; (ii) mudar de representação os dados brutos são transformados em gráficos e tabelas; e (iii) os significados e os julgamentos são comunicados de modo a serem corretamente compreendidos por outros.

E foi nesse sentido que os alunos seguiram, transformaram os dados brutos em gráfico com material concretos, cada caroço de açaí foi pintado de acordo com cada tipo de comida preferida dos membros do grupo.

Figura 13- Fotos 1, 2, 3 e 4 de cada grupo fazendo a atividade em equipe na sala de aula da UEPA- Belém/Pará.



Fonte: Acervo do GEDIM STATISTIC (2023)

Etapa 3: Representação e apresentação dos dados

Assim que montaram o gráfico com os resultados coletados, cada grupo apresentou seu resultado e depois fizeram uma exposição dos gráficos como mostra a Figura 8.

Essa etapa refere-se a um pensamento sobre o comportamento global dos dados. Segundo os autores Pfannkuch e Wild (2004), pode ser acessado por meio de um estudo de série temporal, por uma regressão, ou simplesmente por uma análise de um gráfico que represente os dados reais. No caso da apresentação da atividade com Alunos do Clube de Ciências eles apresentaram os resultados da pesquisa no gráfico concreto, analisando quais foram os tipos de comida que combinam com açaí, com maior e menor índice de preferência dos alunos.

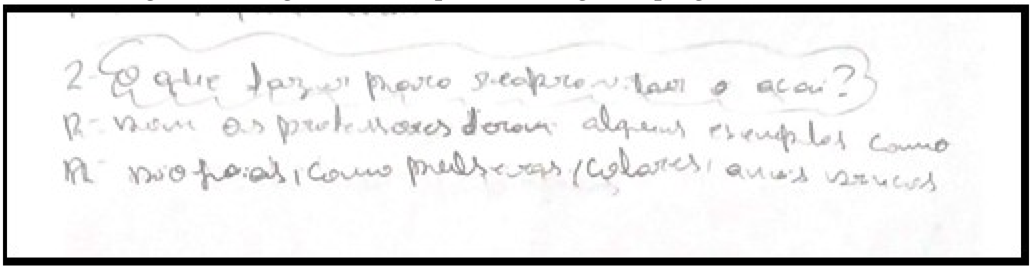
Figura 14 – Exposição dos resultados da pesquisa da comida preferida com açaí dos alunos do clube de ciências, representados em Gráfico com material concreto.

Fonte: Acervo do GEDIM STATISTIC (2023)

Etapa 4: Tomada de decisão

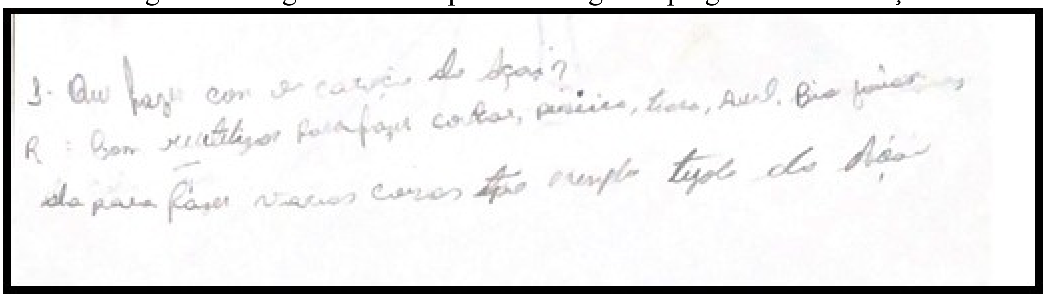
Segunda pergunta se trata da tomada de decisão: *Para não ser descartado o caroço do açaí no lixo o que podemos fazer?* Dois grupos responderam: que podemos fazer biojoias, pulseiras, colares, tijolos, adubo e outros serviços. Como mostrado nas Figuras 15 e 16

Figura 15: Registro das respostas da segunda pergunta sobre o Açaí



Fonte: Alunos do Clube de Ciências (2023)

Figura 16: Registros das respostas da segunda pergunta sobre o Açaí



Fonte: Alunos do Clube de Ciências (2023)

Essa etapa da tomada de decisão é fundamental em uma pesquisa, porque é nela que o aluno ler além dos dados, ou seja, para leitura além dos dados - o estudante é capaz realizar previsão ou inferência a partir dos dados do gráfico e de outras informações que não estejam diretamente apresentadas nele, exigindo um nível cognitivo alto, pois ele faz uso de conhecimentos e experiências prévias.

As respostas dos grupos corroboram com a Rumsey (2002, p. 02) a literacia também é um componente relacionado com a Educação para cidadania. Segundo a autora, ``para os alunos se tornarem bons cidadãos estatísticos, eles devem entender o suficiente para consumir as informações que permeiam nossa vida diariamente, sendo capazes de pensar criticamente sobre essas informações, de modo a tomar boas decisões com base nelas". A seguir apresentaremos outra atividade que o GEDIM STATISTIC promoveu no ano de 2023.

Atividade 2: Curso Análise Estatístico Implicativo - ASI

Outra atividade que destacamos é sobre o Curso de extensão Módulo I e II Figura 17 e 18. Ministrado pelo Professor Saddo intitulado *Análise Estatístico Implicativo.*

Figuras 17 e 18: Cartaz do Curso ASI I e II Módulo IEMCI/UFPA. Belém – Pará, 2023

Fonte: Autores (2023)

O Curso teve como objetivo o principal debater as potencialidades, a pertinência bem como a importância da realização de análises estatísticas de dados multidimensionais (análise hierárquica de similaridade, análise implicativa) nas investigações da Educação Matemática e em investigações em Educação de um modo mais abrangente. Estão previstas para o desenvolvimento do trabalho três momentos: 1. Debates e reflexões sobre as fases fundamentais de uma análise de dados multidimensionais; 3. (instrumentos de coleta de dados, organização e exploração, instrumentos de tratamentos, interpretação, levando em conta a questão e os objetivos da pesquisa); 2. Processo de construção de questionários - Prática do software CHIC.

Esse Curso se Justifica, segundo o Professor Dr. Saddo Ag Almouloud, que muitas vezes, o pesquisador encontra dificuldades em analisar e interpretar os fenômenos revelados em sua investigação. Os dados recolhidos necessitam de tratamento bem como de interpretação no âmbito da pesquisa. Na posse dos dados, o pesquisador em geral, pode encontrar:

1. Dificuldades para inferir dos dados explicações para os fenômenos revelados na pesquisa;
2. Discrepância entre o conjunto de procedimentos observados (as análises a posteriori apontam) e os procedimentos previstos a priori. Como analisar esse fato?;
3. Dificuldades de analisar os dados obtidos por meio de observação visual e por meio de gravação das sequências didáticas, dados esses fornecidos cronologicamente do que foi dito publicamente no curso.;
4. Dificuldade para estabelecer inter-relações entre os dados e para visualizar tais conexões. Para analisar qualitativamente informações, com o intuito de tomar decisões que se apoiam numa certa estabilidade e pertinência de respostas, precisamos, muitas vezes, recorrer às análises estatísticas de dados multidimensionais. Essas análises permitem;
5. Sintetizar e estruturar os dados multidimensionais a fim de identificar as variáveis estatísticas (e/ou didáticas), os fatores em jogo, suas relações, sua hierarquia etc.;
6. Evidenciar a dinâmica dos comportamentos de alunos ou professores em situação de resolução de problemas.

O Professor também ressalta que Régis GRAS e seu grupo de pesquisa, desde 1979, procuram, entre outros assuntos, colocar à disposição dos pesquisadores (em matemática, em psicologia, em biologia, em educação, etc.) ferramentas estatísticas (a análise implicativa, a hierarquia implicativa) que permitem evidenciar a dinâmica dos comportamentos de sujeitos (alunos, por exemplos) em situação de resolução de problemas, inicialmente no caso da educação matemática e posteriormente em outras áreas relacionadas às ciências humanas. A análise implicativa, como todos os métodos de análise estatística de dados multidimensionais, permite visualizar, organizar, construir modelos e explicar fenômenos associados aos dados.

O Curso foi realizado em quatro momentos no primeiro modulo e em três momentos no segundo módulo como demonstrado no Quadro 4 e 5:

- Etapas do I Módulo do curso ASI

Quadro 4 – Momentos do Curso ASI do I Modulo IEMCI/UFPA – Belém/Pará

QUANTIDADE DE DIAS			
PRIMEIRO DIA	**SEGUNDO**	**TERCEIRO**	**QUARTO**
Fundamentos da análise estatística de similaridade	Fundamentos da Análise Estatística Implicativa	Oficina sobre CHIC	Oficinas sobre CHIC

Fonte: Os autores

- Etapas do I Módulo do curso ASI

Quadro 5 – Momentos do Curso ASI do I Modulo IEMCI/UFPA – Belém/Pará

QUANTIDADE DE DIAS		
PRIMEIRO DIA	**SEGUNDO**	**TERCEIRO**
Fundamentos para o processo de construção questionário	Organização e codificação de dados (construção da planilha Excel .csv.	Tratamento de dados por CHIC – Análise de categoria CHIC

Fonte: Os autores

Foram capacitados no curso ASI, 66 no I Módulo, e 39 no II Módulo, totalizando 105 participantes certificados.

14.4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso objetivo neste capítulo foi trazer reflexões teóricas-práticas de ações empreendidas pelo GEDIM STATISTIC. O enredo se deu em torno da busca de práticas de ensino e aprendizagem da Estatística, nos diversos níveis de ensino, que envolvam, motivem e incitem os alunos em um processo de construção de conhecimentos, tendo para isso um ambiente pedagógico que priorize a investigação, a descoberta, a reflexão, a validação de hipóteses, o preparo de relatórios e até mesmo a comunicação oral dos resultados alcançado Wodewotzki (2022). É mister também a valorização do uso da tecnologia, na medida em que esta possibilite cálculos e simulações, mas deixando claro aos alunos que a análise dos dados, o entendimento, as interpretações e tomada de decisão são atribuições deles. E com base nessa compreensão o grupo vem desenvolvendo em 2023, o projeto GEDIM STATISTIC VAI À ESCOLA.

Essas ideias foram desenvolvidas com crianças do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental, com os jovens, adultos e idosos do EJAI, bem como o grupo atuou na Formação Inicial e Continuada de Professores dos anos iniciais. A experiência exitosa de mais de quatro anos de atuação em algumas escolas públicas e no IEMCI/UFPA na Região Metropolitana, nos levaram a compreensão da necessidade ir além, de chegar às escolas ribeirinhas do Estado do Pará. As discussões para aperfeiçoamento da utilização de ambiente computacional e material concreto como ferramentas para estudos e representações de gráficos e analises de conjuntos de dados, para que os alunos consigam desenvolver melhor seus conhecimentos estatísticos são presenças constantes nas oficinas do grupo.

Espera-se com essa atuação do grupo também estimular pesquisas em Educação Estatística junto aos professores em atividade nos anos iniciais e aqueles que estão em formação para atuarem na referida área.

Para os próximos anos, o grupo pretende intensificar sua trajetória de promoção do ensino e da aprendizagem da Estatística, da Probabilidade e da Combinatória, buscando aprimorar as três competências estatísticas: o letramento, o raciocínio e o pensamento, tanto de estudantes quanto de professores que ensinam matemática. Um livro a respeito das atividades que o grupo realizou se encontra em fase final de produção. Como parte dos impactos das ações didático-pedagógicas do grupo ressalta-se o recebimento do III Fórum do GT12 que ocorrerá em 2025 em Belém/Pará/Amazônia/Brasil.

Referências

BALL, D. L.; THAMES, M. H.; PHELPS, G. **Articulating domains of mathematical knowledge for teaching**. Retrieved May 13, 2005.

BATANERO, C.; DÍAS, C. (Orgs.). **Estadística com proyectos**. 1 ed. Granada: Universidad de Granada, 2011.

BIEHLER, Rolf; FRISCHEMEIER, Daniel; READING, Chris; SHAUGHNESSY, Michael. Reasoning about data. In: BEN-ZVI, Dani; MAKAR, Katie; GARFIEL, Joan. (Org.) **International Handbook of Research in Statistics Education. Gewerbestrasse: Springer International,** 2018, p. 138-186.

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular (BNCC). **Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME**, 2018.

BRAZ, G.; BATISTI, I. e CAVALCANTE, H. **Projeto de Aprendizagem Estatístico como estratégia para desenvolver o Pensamento, o Raciocínio e o Letramento EstatístiSPcos**. (orgs.) Porciúncula, Mauren; Schreiber, Karla Priscila; Giodano, Cassio. Letramento Multimídia Estatístico: uma interação entre a pesquisa acadêmica e a realidade escolar dos Anos Finais do Ensino Fundamental, Taubaté: Editora Akademy, 2022. Ed. Akademy, Taubaté/SP, 2022.

BURGESS, T. (2009) **Conhecimento e Estatísticas do Professor: que tipos de conhecimento são usados na sala de aula primária.** Te Entusiasta de Matemática: Vol.6: Nº 1, Artigo 2. Disponível em: htps: //scholarworks. umt.edu/tme/vol6/iss1/2. Acesso em: 23 abr. 2022.

CAZORLA, I. M. O Ensino de Estatística no Brasil. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. http://www.sbem.com.br/gt_12/arquivos/cazorla.htm. Acessado: 28/02/2024.

CHEVALLARD, Y. **La notion de PER: problèmes et avancées**, 2009. Disponible en: http://yves.chevallard.free.fr/

COSTA, A.; NACARATO, A.M. **A Estocástica na Formação do Professor de Matemática: percepções de professores e de formadores**. Bolema. Rio Claro, v. 24, p. 367-386, 2011.

CRUZ, T.; PORTELLA, J. **A Educação na Amazônia Legal Diagnóstico e Pontos Críticos**, 2021. Recuperado de https://amazonia2030.org.br/educacao-na-amazonia-legal/ . Acesso em: 05 dez. 2022

DELMAS, R. C. Statistical Literacy, Reasoning, and Thinking: A Commentary. **Journal of Statistics Education**, Raleigh, v. 10, n. 2, p. 1-11, julho de 2002.

GAL, I. Adult's Statistical Literacy: meanings, components, responsabilities. **International Statistical Review**, The Hague, v. 70, n. 1, p. 1-51, abril de 2002.

GAL, I. Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. *In*: JONES, G.A. (Org.). **Exploring probability in school:** Challenges for teaching and learning. 1 ed. New York: Springer, 2004, p. 43-70.

HILL, H. C.; SCHILLING, S; BALL, D. L. Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. **Elementary School Journal**, v. 105, n. 1, p. 11-30, 2004.

KRUG SBF, ASSUNÇÃO A.N, WEIGLET LD, SEHNEM L, ALVES LMS, FALLER LA, et al. **Relatório do grupo de estudos e pesquisa em saúde** - GEPS.Santa Cruz so Sul (RS) Universidade de Santa Cruz do Sul; 2011.

LOPES, C. E. **O Ensino de Estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores.** Cad. Cedes, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008. Disponível em: http://www.cedes.unicamp.br. Acesso em 03/01/2024

LOPES, C. E. Educação estatística no curso de licenciatura em matemática. **Boletim de Educação Matemática**. Rio Claro, v. 27, n. 47, p. 901-915, dezembro 2013.

LOPES, C. E. Os desafios para Educação Estatística no currículo de Matemática, in: LOPES, C. E., COUTINHO, C. Q. S. e ALMOULOUD, S. **A. Estudos e reflexões em Educação Estatística**. Campinas: Mercado de Letras, pp. 47-63, 2010.

MARTINS, F., DUQUE I., PINHO L., COELHO, A. e VALE, V. (2017). **Educação Pré-Escolar e Literacia Estatístic**a. Viseu: Psicosoma. file:///C:/Users/verad/Downloads/Dialnet-OConhecimentoEstatisticoParaEnsinarDeUmaProfessora-7304936.pdf - acessado em 18/02/2024

MOORE, D.S. (Org.). **The Basic Practice of Statistics.** 2 ed. New York: W. H. Freeman and Company, 1997.

PALÚ, J.; PETRY, O. J. Neoliberalismo, globalização e neoconservadorismo: cenários e ofensivas contra a Educação Básica pública brasileira. Práxis Educativa, Ponta Grossa, v. 15, e2015317, p. 1-21, 2020 Disponível em: https://www.revistas2.uepg.br/index.php /praxiseducativa. Acesso em 05.12.2023.

PERIN, A. P. CAMPOS, C. R. Interfaces entre Modelagem Matemática, Raciocínio e Pensamento Estatístico. Dossiê — **Modelagem Matemática e Resolução de Problemas**, Revista: Educação Matemática e Debate, p. 01-14, Jun., 2020. ISSN 2526-6136

PFANNKUCH, M. Maxine. Reimagining curriculum approaches. In: BEN-ZVI, Dani; MAKAR, Katie; GARFIEL, Joan. (Ed.). International Handbook of Research in Statistics Education. Gewerbestrasse: Springer International, 2018, p. 384-406.

PFANNKUCH, M.; WILD, C. Towards an Understanding of Statistical Thinking. *In*: BEN-ZVI, Dani; GARFIELD, J.B. (Orgs.). **The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking.** 1 ed. Amsterdã: Kluwer Academic Publishers, 2004, p. 17-46.

RUMSEY, D. J. Statistical Literacy as a Goal for Introductory Statistics Courses. **Journal of Statistics Education**. Raleigh, v. 10, n. 3, p. 1-12, 2002.

SANTOS, J. A. DOS S.; VILHENA, V. D. M; PENA, S. C. S.; e NUNES, J. M. V. Relato de Experiência – **a trajetória pioneira do GEDIM STATÍSTIC na difusão de Educação Estatística.** Revista Baiana de Educação Matemática, v. 03, n. 01, p. 01-18, 2022.

SCHREIBER, K. P.; PORCIÚNCULA, M. **Conhecimentos docentes para ensinar Estatística**: olhar do professor sobre os estudantes e as estratégias pedagógicas; Zetetiké, Campinas, SP, v. 29, p. 1-25, 2019.

SILVA, M. F. **Estudo da aprendizagem sobre variabilidade estatística: umaexperiência de formação com futuros professores dos anos iniciais da Educação Básica,** 2016. 147 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, 2016

SILVA, S.A. E SOUZA, S. F. (2019) Perspectivas para o ensino e a aprendizagem de Estatística e Probabilidade. In: Lopes, C. E. , Porciúncula, M. e Samá, S. (org.) **Possibilidade Didáticas para o Desenvolvimento do Letramento Estatístico na Educação Básica**. 1ª ed. Campinas, SP; Editora: Mercado de Letras, 2019. p. 91-124. (Coleção Educação Estatística).

SOUZA, L. de O. *et al.* A ação pedagógica e o desenvolvimento profissional de professores em Educação Estocástica. In: COUTINHO, C. de Q. S. (org.) **Discussões sobre o ensino e a aprendizagem da probabilidade e da estatística na escola básica**. 1ª ed. Campinas: Mercado de Letras, pp. 121-142, 2013. (Coleção Educação Estatística).

VASCONCELOS, I. **Relato de Experiência**: o que é e como escrever com exemplo, outubro, de 2022. https://www.tuacarreira.com/relato-de-experiencia/ acessado em: 19.03.2024

WILD, C. J.; PFANNKUCH, M. **Statistical thinking in empirical enquiry. International Statistical Review**, The Hague, The Netherlands, v. 67, n. 3, p. 223-265, dezembro 1999.

WODEWOTZKI, M. L. L. História da Educação Estatística Brasileira: pesquisas e pesquisadores. In: Giordano, C. C. e Kistemann Junior, M. A. (org.). **Profa. Dra. Maria Lúcia Lorenzetti Wodewotzki e sua trajetória de vida**: constituindo-se professora e pesquisadora em Educação Estatística. Vol. 2, p. 193-210, São Paulo/ SP Editora Akademy, 2022.

15- Transposição didática interna pluricultural: o ensino das matemáticas transversalizado pelos saberes étnico-raciais

Reginaldo da Silva
Mariana Angelin Lobato Cardoso
José Messildo Viana Nunes

Introdução

O trabalho docente do professor de matemáticas no processo de Transposição Didática Interna (TDI) é condicionado por variáveis institucionais e epistemológicas que interferem na construção e gestão das Organizações Matemático-Didáticas. Ter consciência das variáveis que conformam os *miliuex*[95] do professor no ensino e aprendizagem, corrobora para apropriação de um determinado objeto matemático.

A relação que o professor deve estabelecer com o saber a ensinar é uma variável que não pode ser desconsiderada, caso contrário, as consequências para o aprendizado podem ser muito danosas. A relação supracitada não pode ser vista apenas no aspecto de conceitos e definições do objeto de estudo, mas deve considerar os criadores, o contexto de criação e os processos de criação, a fim de não causar a degradação do saber e a consequentemente desvalorização das civilizações que contribuíram e contribuem com a construção do saber, como é o caso da cultura africana que é invisibilizada pelo eurocentrismo.

No processo de transposição didática é necessário ficar vigilante a despersonalização, descontextualização e a descincretização do saber matemático a ser

[95] Tudo que está no entorno do professor no momento da preparação da classe, assim como na gestão desta, que forma um subsistema antagonista no sentido da Teoria das Situações Didáticas.

ensinado, para não desvalorizar os saberes multiculturais - que propicia o reconhecimento de saberes oriundos de grupos étnicos e a consequente valorização de culturas como a africana no processo de construção do conhecimento matemático, combatendo assim a invisibilidade do povo negro na construção do conhecimento matemático. Um caminho para valorização desses saberes é a abordagem Etnomatemática, haja vista, esta conduzir o fazer matemático de professores e alunos numa perspectiva multicultural.

Referencial teórico

Para a construção deste trabalho apoiamo-nos nos pressupostos da Teoria Antropológica do Didático e da Etnomatemática, por acreditarmos que estas abordagens apresentam conceitos que subsidiam nossas argumentações no que tange a construção de praxeologias matemáticas-didáticas pluriculturais, que ocorre nos *miliuex* do professor no fenômeno de Transposição Didática Interna, momentos em que são evidenciadas as variáveis institucionais e epistemológicas e seus respectivos valores.

A degradação dos saberes matemáticos

Um objeto de saber de qualquer área de conhecimento para se tornar um objeto de ensino passa necessariamente por processos de transformações e adaptações, cujo objetivo é torná-lo ensinável para os sujeitos de uma instituição. Sob a óptica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), o conjunto dessas modificações e acomodações que sofre um saber sábio para se tornar um saber ensinado é identificado como fenômeno de Transposição Didática.

A TAD concebe o fenômeno de transposição do saber sábio para o saber ensinado em duas etapas, externa e interna: a externa cabe a noosfera[96], esta ocorre do saber sábio para o saber a ensinar, já a interna está inteiramente a cargo do professor, e vai do saber a ensinar até o saber ensinado no momento da gestão das praxeologias. Chevallard (2009) identifica essa segunda etapa como fenômeno de Transposição Didática Interna[97] (TDI), subdividindo-a em dois momentos: o primeiro, caracterizado pela construção do texto de saber, e o segundo, por colocar as praxeologias desse texto de saber em ação na sala de aula.

[96] Segundo Chevallard (1991), a noosfera é formada por cientistas, profissionais da educação, políticos, pais de alunos, autores de livros textos, e outros segmentos da sociedade, na qual cada um desses grupos interfere no delineamento dos saberes que vão ser utilizados na sala de aula, segundo seus interesses.

[97] Segunda etapa do processo de Transposição Didática que está sobre a responsabilidade do professor. Esta etapa vai do saber a ensinar até o saber ensinado (Chevallard, 2009).

A transposição didática, ao ser dividida em duas etapas, permite ao pesquisador evidenciar de forma distinta os papéis da *noosfera* e do professor neste processo. Como o trabalho externo da Transposição Didática está a cargo da *noosfera*, cabe a ela a seleção e manipulação do saber sábio que será designado como saber a ensinar em um programa oficial de estudo, todavia, essa seleção/manipulação ocorre segundo os interesses das instituições que formam a *noosfera*, os quais podem ser de diversas ordens: cultural; político; econômico e outros, que podem levar a degradação desse saber no que tange a omissão: do(s) criador(es); do local de criação e dos processos de criação desses saberes.

Referente às duas etapas que compõem o processo de Transposição Didática, Chevallard enfatiza o papel da *noosfera* ao ressaltar

> [...]. É ela que vai conduzir a seleção dos elementos do saber sábio para designá-los como "saber a ensinar", que serão submetidos ao trabalho de transposição; é ela que vai assumir a parte visível desse trabalho, que podemos chamar o trabalho *externo* da transposição didática, em oposição ao trabalho *interno*, que se realiza no interior mesmo do sistema de ensino, bastante depois da introdução oficial dos novos elementos no saber ensinado (Chevallard, 2009, p. 36, grifos do autor, tradução nossa).

A reflexão sobre o papel da *noosfera* no processo de Transposição Didática, nos levou as questões motivadoras deste trabalho, **a falta de valorização da cultura africana no processo de construção do conhecimento matemático, a invisibilidade do povo negro na construção do conhecimento matemático entre outras**, embora sejam propostas de forma velada pela noosfera, se consolidam na sala de aula com práticas docentes que valorizam o eurocentrismo. Apesar das evidências destas questões constarem nas duas fases do fenômeno de Transposição Didática, centraremos nossas argumentações na segunda etapa, mais especificamente nas interfaces da TDI que permeiam os *milieux* do professor na construção do texto de saber e na implementação deste na sala de aula Silva (2013).

Nosso interesse em propor reflexões nestas interfaces do trabalho transpositivo é o de chamar a atenção dos professores de matemáticas para a cultura eurocêntrica que promove a invisibilidade das contribuições e influências da cultura africana e de outras civilizações no processo de construção e difusão dos conhecimentos matemáticos. A degradação que sofre um objeto matemático, na Transposição Didática Externa, pode ser amenizada na TDI por meio de praxeologias matemáticas decoloniais. Esta degradação que leva determinados saberes matemáticos a apresentarem contextualizações restritas a ideias difundidas pelo eurocentrismo leva o professor a contribuir para a manutenção da não valorização da cultura: africana; afro-brasileira; do povo negro em geral e de outras civilizações na construção do conhecimento matemático.

Esta prática de omitir a difusão da criação dos objetos de estudo de qualquer área, é fortemente praticada no de ensino e aprendizagem das matemáticas, seja na Educação Básica ou no Nível Superior, por vezes, as práticas escolares além de omitir o criador/ou outras maneiras de manipular determinado objeto matemático, não faz uso em suas praxeologias de tecnologias educacionais que contemplem a cultura de grupos étnico-raciais, nem tão pouco valorizem as matemáticas desenvolvidas por estes grupos.

Entendemos e concordamos que existe a necessidade de transformações e adaptações para que um saber sábio se tornar um saber a ser ensinado e posteriormente um saber ensinado, e que, estas se fazem presentes a partir do momento que a *noosfera* elege um saber sábio como componente de um dado currículo oficial. Porém, o professor precisa estar atento para a construção e implementação de suas praxeologias matemático-didáticas, de forma que estas corroborem para o reconhecimento das contribuições de outras civilizações na construção do conhecimento matemático.

Assim, os professores de matemática, negros ou não, ao construírem suas praxeologias matemático-didáticas no texto de saber e as implementarem em sala de aula, não podem e não devem omitir o pluriculturalismo intrínseco na construção dos conhecimentos matemáticos, que são componentes dos currículos oficiais e são trabalhados em sala de aula, caso contrário, estarão nutrindo a cultura da invisibilidade africana e de outras culturas na construção e difusão dos conhecimentos matemáticos, e mais, alimentando a cultura eurocêntrica.

Em que pesem as ações de resistência do movimento negro no Brasil, as políticas implementadas pelo Governo e as leis que garantem a valorização e a história do povo negro brasileiro, por exemplo, a obrigatoriedade do ensino de História e Cultura Afro-brasileira e africana no currículo da Educação Básica preconizada na lei 10.639/2003, parecem não encontrar eco nos fazeres diários/docentes de muitas escolas, professores e em grande parcela da sociedade, e assim, continuamos mantendo a cultura eurocêntrica da negação da existência e da capacidade de pessoas, grupos, povos e nações que certamente contribuíram e continuam contribuído com a construção do conhecimento matemático.

Para Almeida (2018), no Brasil, o racismo estrutural é reforçado e mantido como ferramenta do colonialismo para manter um status de superioridade branca nas instituições sociais, inclusive nas escolas. Essa noção de superioridade é construída culturalmente e politicamente em função não apenas da cor da pele, mas também das circunstâncias que levam à aquisição de bens materiais e simbólicos pelos brancos.

Nesse sentido, faz-se necessário uma reflexão acerca da inclusão e da forma como são tratados os objetos de estudos etino-raciais nos currículos oficiais. Embora a lei 10.639/2003 Art. 26 – A, estabeleça a obrigatoriedade de incluir nos conteúdos programáticos de ensino o estudo da História da África e dos Africanos, a luta dos negros no Brasil, a cultura negra brasileira e o negro na formação da sociedade nacional, é preciso termos consciência de que a lei por si só não é capaz promover a inclusão da relevância do povo negro na construção do conhecimento, por exemplo, matemático, é imprescindível que os professores tomem atitudes no sentido de romper com a cultura eurocêntrica.

Para tanto, é imperativo que os professores de matemática negros ou não, construam em sua história de vida relações pessoais com os saberes étino-raciais e relações com os saberes étino-raciais, pois somente a partir do estabelecimento dessas relações, o professor de matemática terá construído conhecimento etnicorracial necessário e suficiente para transversalizar o estudo de um dado objeto matemático com os saberes étino-raciais. Haja vista, as praxeologias docentes de matemática, serem determinadas no processo de TDI pelas variáveis institucionais: currículo e tempo didático e pelas variáveis epistemológicas: história de vida do professor; relações pessoais com o saber e relação com o saber[98] e seus respectivos valores Silva (2013).

Na contramão da cultura eurocêntrica que promove a invisibilidade de outras civilizações no processo construção dos conhecimentos matemáticos, a Etnomatemática enquanto programa de pesquisa (D'Ambrósio, 2005) se apresenta como potencial ferramenta didático-pedagógica, capaz de combater está cultura perversa que insiste em preservar um meio que promova a não valorização de outros povos no processo construção dos conhecimentos matemáticos, por exemplo, africano. Neste sentido, entendemos que a Etnomatemática pode ser concebida como uma alternativa viável para a descrição e compreensão de ideias e praxeologias matemáticas utilizadas por indivíduos pertencentes a macro ou micro coletivos, que não comungam do mesmo ponto de vista a respeito do fazer e estudar as matemáticas.

O não reconhecimento na sala de aula das matemáticas na perspectiva pluricultural e a não inserção de praxeologias matemáticas decoloniais na sala de aula,

[98] O conjunto das relações pessoais com os objetos de saber nos processos de sujeição nas instituições nas quais vive o objeto e que são e foram frequentadas pelo indivíduo.

assevera a exclusão não só de valores e de saberes africanos, mas também a exclusão de alunos negros que estão na escola por meio de uma inclusão desumana, que determina quem são os privilegiados e quais são os valores morais e culturais que devem ser inseridos no âmbito do processo de ensino e aprendizagem.

Nesta perspectiva levantamos várias indagações que vão ao encontro das variáveis epistemológicas supracitadas, relativas à história de vida, a relação desse professor com os saberes etino-raciais, a formação inicial do professor de matemática e as práticas docentes destes professores:

- Os professores de matemática tiveram a oportunidade de construir em sua história de vida nos tempos de aluno da Educação Básica e da Graduação relações com os saberes étnico-raciais?

- Há praxeologias matemáticas nos Cursos de Licenciatura em Matemática, que visão despertar nos graduandos os valores étnicorraciais que podem transversalizar o ensino de matemática na Educação Básica?

- Alguma/as disciplina/s do Curso de Licenciatura em Matemática, transversaliza estudos etino-raciais?

- Quais relações pessoais com os objetos de saber da cultura africana os professores de matemática construíram quando sujeitos das instituições de ensino que frequentaram, como discente/docente?

- Quais praxeologias matemáticas os professores de matemáticas da Educação Básica desenvolvem em sala de aula otimizando herança cultural dos alunos afrodescendentes?

As reflexões sobre essas questões trazem para o debate o quanto precisamos avançar como profissionais da educação da área da matemática no que tange as questões étino-raciais, o quanto nossa formação inicial dos professores de matemática é carente de relações com os saberes etnicorracial e o quanto precisamos avançar para contribuir com a formação de uma sociedade com equidade.

Nesse sentido, em oposição a praxeologias matemáticas eurocêntricas, é fundamental que os professores de matemáticas construam praxeologias matemáticas que permitam ser transversalizadas por saberes étnico-raciais, pois tais questões emergem em função de o fazer docente do professor de matemáticas ocorrer num processo dinâmico e multicultural, no qual não somente o saber matemático está em jogo, mas também a formação de cidadãos capazes de respeitar o pluriculturalismo presente na sociedade.

Por acreditarmos que o trabalho interno do fenômeno de transposição didática, tem na pessoa do professor o elemento central responsável por sua efetivação na sala de aula, a ele cabe no primeiro momento da TDI construir o texto de saber, no entanto está construção precisa estar em conformidade com uma dada instituição de ensino, mas também precisa se contrapor a determinadas condições e restrições que vivem na referida instituição e de modo geral no sistema de ensino, as quais são culturalmente impostas no ensino da matemática. Por exemplo, a negação e a deleção da herança cultural dos africanos no processo de construção dos objetos matemáticos de ensino, na construção das praxeologias matemáticas, na utilização de tecnologias educacionais entre outras.

Este processo que coloca a herança cultural dos africanos em um meio opaco é produzido pela *noosfera* ao determinar quais e como os objetos matemáticos de ensino devem constar nos livros didáticos. Todavia, o professor ao construir o texto de saber para uma determinada turma de um determinado nível, goza de certa liberdade, ainda que vigiada, mas é neste momento que o professor ao fazer uso desta liberdade, lhe é permite fazer determinadas escolhas relativas a como ensinar determinado objeto matemático de ensino que está proposto nos programas oficiais.

Sob esta liberdade, vigiada, o professor de matemáticas pode e deve construir o texto de saber levando em consideração não somente o conteúdo matemático que está proposto nos programas oficiais, mas precisa entender que a relação com o saber em jogo precisa ter sentido para o aprendiz. Em Charlot, (2000), a relação com o saber é uma relação de sentido, portanto de valor, entre um indivíduo (ou um grupo) e os processos ou produtos do saber.

Para Charlot (2000), a relação com o saber é a relação com o mundo, com o outro e consigo, de um sujeito confrontado com a necessidade de aprender. Chevallard (2009), ao se referir à relação de uma pessoa com um objeto de saber, diz que a relação é criada ou sofre mudanças, por meio de encontro e reencontros da pessoa com os objetos nas instituições. Nessa perspectiva, Chevallard assevera que

> [...] pessoa é então o par formado por um indivíduo x e o sistema de suas relações pessoais $R(x, o)$ em um dado momento da história de x. [...]. Claro, ao logo do tempo, o sistema de relações pessoais de x evolui: objetos que não existem para ele passam a existir; outros deixam de existir; para outros enfim a relação pessoal de x muda. Nessa evolução, a invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa (CHEVALLARD 2009, p. 1, grifos do autor, tradução nossa).

Do ponto de vista da relação como o saber, é pertinente que os professores de matemáticas façam a inserção de praxeologias matemáticas que valorizem as relações etino-raciais, todavia é necessário que estes professores se apropriem destes saberes, tais como, as causas que desencadearam os movimentos de resistência da população negra, as matemáticas praticadas, por exemplo, pelas comunidades quilombolas e por outras formas de coletivos negros.

Consideramos ser imperativo ao professor de matemáticas estabelecer relações pessoais com os objetos matemáticos de ensino, como também com os objetos de ensino que podem transversalizar ensino das matemáticas, por exemplo, os saberes etino-raciais que poderão compor as praxeologias do texto de saber e a consequente aplicação deste na sala de aula. Neste sentido Charlot destaca que

> [...] não há saber que não esteja inscrito em relações de saber. O saber é construído em uma história coletiva que é a da mente humana e das atividades do homem e está submetido a processos coletivos de validação, capitalização e transmissão. Como tal, é o produto de relações epistemológicas entre os homens. Não obstante, os homens mantêm com o mundo e entre si (inclusive quando não são "homens de ciência") relações que não são apenas epistemológicas. Assim sendo, as relações de saber são, mais amplamente, relações sociais (CHARLOT, 2000, p. 60).

Para que os professores de matemáticas façam uso de praxeologias matemáticas que tenham como objetivo proporcionar aos alunos a construção do conhecimento matemático pluricultural por meio da valorização da cultura africana, é necessita que o professor de matemáticas estabeleça uma boa relação com os objetos matemáticos e com os valores culturais do povo africano, caso contrário, a matemática continuará sendo trabalhada em sala de aula sem a devida valorização da história e da cultura afro-brasileira e africana, as quais têm sido omitidas ao longo dos séculos.

Um caminho profícuo para o ensino das matemáticas tranversalizado pela cultura afro-brasileira e africana é fazer uso da Etnomatemática, haja vista que trabalhar a Etnomatemática como norteadora de práticas de ensino para a construção e implementação do texto de saber em sala de aula, tem se mostrado uma ferramenta potente capaz promover um ensino de matemáticas pluricultural (KNIJNIK; WANDERER; OLIVEIRA, 2004).

Fazer uso da abordagem Etnomatemática proporciona ao professor entender e trabalhar as matemáticas a partir da cultura dos indivíduos de diversos grupos que convivem no mesmo espaço escolar e que por muitas vezes não são levadas em consideração no momento da preparação do texto de saber e na implementação deste na sala de aula.

Concomitante ao uso da Etnomatemática como norteadora de práticas de ensino das matemáticas, o professor também pode fazer uso da interdisciplinaridade das matemáticas com outras disciplinas da Educação Básica, História, Geografia, Artes, Física, Biologia entre outras, possivelmente a interdisciplinaridade facilitará a transversalização dos saberes etino-raciais. Essa forma de interação entre as disciplinas e os sujeitos das ações faz emergir os conhecimentos envolvidos e assim valoriza o trabalho coletivo e reflexivo, acerca da importância de todos os saberes envolvidos na construção dos conhecimentos que estarão em jogo.

O conhecimento matemático didático pluricultural

Nossa motivação em abordar a construção do conhecimento matemático-didático pluricultural do professor de matemáticas se dá, entre outros fatores, pelo problema docente vivenciado pelos professores de matemáticas, o qual é causado pela ausência de praxeologias matemáticas transversalizadas por saberes etino-raciais. Em Chevallard (2009) e Gascón (2001), o problema docente é concebido como um problema da profissão que é enfrentado pelo professor no exercício da docência.

Para Silva (2013), o conhecimento matemático-didático é o conhecimento que o professor deve possuir que lhe permita identificar e administrar as variáveis institucionais e epistemológicas e seus respectivos valores, de tal forma que a (re)construção das Organizações Matemático-Didáticas (OMD) estejam em conformidade com a instituição de ensino onde a OMD será desenvolvida.

Neste trabalho assumimos o conhecimento matemático-didático pluricultural do professor de matemáticas como o conhecimento que se (re)constrói na dinâmica da construção e (re)construção das Organizações Matemático-Didáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais, que conformam os *milieux* do professor na primeira e segunda fase da Transposição Didática Interna.

Os Quadros 1 e 2 elencam as variáveis institucionais e epistemológicas e seus respectivos valores, que no nosso julgamento interferem na construção e gestão das praxeologia matemáticas pluriculturais, as quais constituem as Organizações Matemático-Didáticas[99] transversalizadas pelos saberes etino-raciais, constantes no texto de saber. Ao elencarmos estas variáveis, e, seus respectivos valores não temos a pretensão

[99] Organizações matemáticas – conjunto de práticas matemáticas sistemáticas compartilhadas em uma instituição. Organizações didáticas – conjunto de práticas de ensino e aprendizagem sistemática compartilhada em uma instituição (BOSCH; GASCÓN 2001, p. 10).

de limitar os *milieux* do professor apenas a estas, pois sabemos que muitas são as variáveis que interferem no fazer docente do professor no processo de ensino e aprendizagem.

Quadro 1 - Variáveis Institucionais e seus valores

Variáveis institucionais	**Valores da variável**
Currículo	- Currículo oficial e as relações etino-raciais (Lei 10639/2003) - Currículo implementado e as relações etino-raciais (Lei 10639/2003)
Tempo didático	- Tempo didático para a construção das praxeologias matemáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais. - Tempo didático para a gestão das praxeologias matemáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais.

Fonte: Silva (2013, p. 45)

Quadro 2 – Variáveis Epistemológicas e seus respectivos valores

Variáveis epistemológicas	**Valores das variáveis**
História de vida	- Como discente na Educação Básica e Superior. - Como docente na Educação Básica.
Relações pessoais com o saber	Como discente na Educação Básica e Superior. - Como docente na Educação Básica.
Relações com o saber	- Na construção das praxeologias matemáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais. - Na gestão das praxeologias matemáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais.

Fonte: Silva (2013, p. 45)

A variável "currículo" é concebida neste trabalho no sentido do currículo escolar, entendido como um meio pelo qual a *noosfera* propõe os caminhos e as práticas a serem desenvolvidas de um saber matemático para um dado nível de ensino. Não só o currículo escolar é determinado pelas instituições que compõem o sistema de ensino, o tempo didático[100] para o estudo de um objeto matemático de ensino também é determinado por essas instituições, ainda que de forma implícita. É nesse sentido que concebemos essas variáveis como institucionais, uma vez que em primeira instância são determinadas por instituições que estão em níveis externos até mesmo à escola.

Já as variáveis: história de vida; relação com o saber e relações pessoais com o saber, por entendermos que interferem na construção do Equipamento Praxeológico[101] da pessoa, as consideramos epistemológicas. Nossa afirmação encontra consonância em Chevallard (2009) quando diz que

> [...] ao tornar-se sujeito de uma instituição I na posição p, um indivíduo x, que sempre é uma pessoa, com certo universo cognitivo (UC), *subjuga-se as*

[100] Programação do tempo para aquisição ou transmissão do saber (CHEVALLARD, 2009, p. 75, tradução nossa).
[101] Mistura de praxeologias e de elementos praxeológicos que a pessoa possui e que pode utilizar em um dado momento sob certas condições e restrições (CHEVALLARD, 2009).

> *relações institucionais*, que iram regular suas relações pessoais (CHEVALLARD, 2009, p. 3, grifos do autor, tradução nossa).

Referente ao Equipamento Praxeológico Bosch e Gasgón asseveram

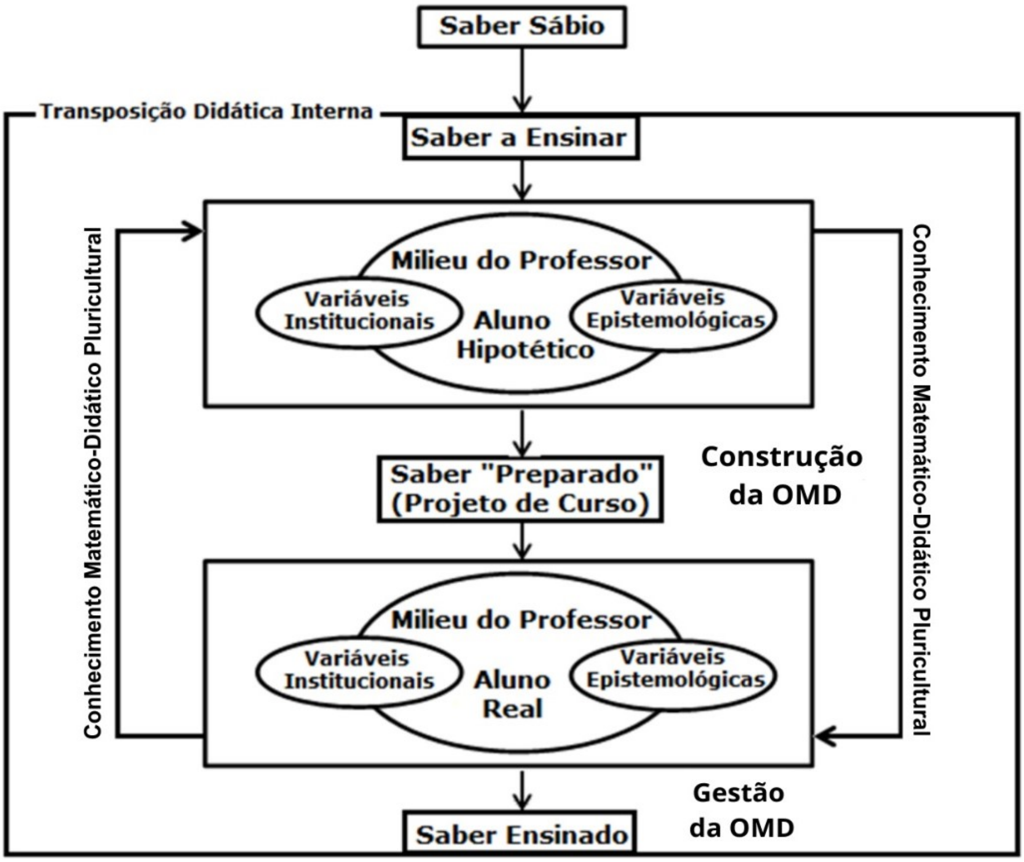
> o conhecimento, capacidade ou competência de uma pessoa, corresponde ao que designamos como seu *equipamento praxeológico,* isto é, uma mistura de praxeologias e de elementos praxeológicos que a pessoa tem à sua disposição e que pode ativar em um dado momento sob certas condições e restrições dadas (BOSCH; GASCÓN, 2009, p. 93, grifos dos autores, tradução nossa).

Com base nas citações acima, entendemos que os processos de sujeição e contrassujeição vivenciados por uma pessoa nas instituições que frequenta e frequentou contribuem para suas relações pessoais e consequentemente para a construção de suas relações com os objetos de saber que vivem nessas instituições e ocorrem na história de vida da pessoa. Dessa forma, podemos considerar essas variáveis como epistemológicas, uma vez que contribuem para a construção do conhecimento da pessoa. Chevallard (2009), ao tratar da relação de uma pessoa com um objeto, assevera que

> no curso do tempo o sistema de relações pessoais de um indivíduo evolui [...]. Nessa evolução, o invariante é o indivíduo, o que muda é a pessoa. [...]. A pessoa é um emergente de seus assujeitamentos passado e presente, que não pode, portanto, nunca se reduzir (CHEVALLARD, 2009, p. 1 e 3, tradução nossa).

Para melhor evidenciamos a construção do conhecimento matemático-didático pluricultural e as variáveis institucionais e epistemológicas com seus respectivos valores existentes nas interfaces no processo de Transposição Didática Interna, que interferem na construção e gestão das Organizações Matemático-Didáticas (AMD) transversalizadas pelos saberes etino-raciais, que são deslocadas do texto de saber para o saber ensinado e possivelmente revelam o conhecimento matemático-didático pluricultura do professor, apoiamo-nos no esquema proposto por Silva (2013), identificado como Modelo de Praxeologia Docente Relativo (MPDR) o qual adaptamos para este trabalho.

Figura 1- Adaptação do Modelo de Praxeologia Docente Relativo



Fonte: Silva (2013, p. 40)

Ao adaptarmos o esquema proposto por Silva (2013), o concebemos como uma ferramenta metodológica que pode ser usada para analisar as práticas docentes de professores na TDI, ou seja, analisar a construção e gestão das praxeologias matemáticas na primeira e na segunda fase da TDI.

Também concebemos esse modelo na perspectiva da potencialidade que ele pode nos proporcionar para melhor compreendermos as complexidades que permeiam a atividade docente na perspectiva de uma educação decolonial, em especial para identificar as variáveis com as quais o professor lida nas interfaces da TDI.

Em uma primeira interpretação, esse modelo pode ser entendido de uma forma não linear, ainda que apresente duas fases sequenciais, mas entendemos ser pertinente interpretá-lo sob a ótica da retroalimentação que ocorre entre as interfaces da TDI, que no nosso entendimento evidencia a construção do conhecimento matemático-didático pluricultural do professor.

A partir do MPDR, inferimos que o professor na primeira fase, momento da construção das OMDs, conjectura sobre o que pode ocorrer na segunda fase, momento da gestão dessas OMDs; da mesma forma, quando está na segunda fase, reflete sobre a construção das OMDs ocorrida na primeira fase, desta forma buscamos evidenciar com esse modelo a não linearidade da construção do conhecimento matemático-didático pluricultural do professor no trabalho de TDI.

Destacamos que a compreensão desse modelo propicia, tanto ao pesquisador no momento de obsevação quanto ao professor em sua atividade docente, evidenciar o quanto e como a prática docente está condicionada pelas váriaveis e seus respectivos valores que compõem os *milieux* do professor na TDI.

Outro ponto a destacar referente à compreensão do modelo é que ele permite ao professor um fazer docente compreensível, pois comporta, na tomada de decisão para construção e gestão das OMDs, identificar e analisar as variáveis tanto institucionais quanto epistemológicas e seus respectivos valores que se fazem presentes nos *milieux* do professor na TDI, e identificar quais se conformam como restrições ao trabalho docente, bem como a dinâmica que ocorre entre os valores das variáveis.

Etnomatemática: um caminho para matemáticas

Ubiratan D' Ambrósio ao criar a palavra Etnomatemática tomou como base as seguintes raízes, etno, matema e tica, cujos significados são: etno refere-se à cultura, povo; matema está relacionado ao ato de compreender, modo de fazer; e o termo tica significa técnica. Dessa forma, nossa concepção de Etnomatemática é que para distintos contextos socioculturais, há várias formas de compreender o fazer por meio do uso de várias técnicas e habilidades.

Na busca por significado da palavra Etnomatemática D'Ambrósio e Rosa (2016) ressaltam

> A etnomatemática pode ser definida como a matemática praticada pelos membros de grupos culturais distintos, que podem ser identificados como sociedades indígenas, associação de trabalhadores, classes profissionais e grupos de crianças de uma determinada faixa etária (D´AMBROSIO; ROSA, 2016, p. 17).

Ao refletirmos na citação acima, entendemos que a Etnomatemática é evidenciada a todo o momento em diversas situações. Haja vista, a sociedade está embebida de saberes e fazeres próprios das diferentes culturas. A vida em sociedade exige que os sujeitos dos grupos vivam cotidianamente checando, comparando, classificando, quantificando, mensurando, explicando, generalizando, inferindo e outros, por meio de tecnologias que são pertinentes à cultura de cada grupo. Se fizermos uma investigação em diferentes culturas muito provável encontraremos uma matemática eficiente e eficaz na resolução de problemas do cotidiano, que não foi apreendida nas escolas, mas é oriunda da cultura do grupo onde ela vive, por exemplo, a matemática praticada na feira do Ver-o-Peso, onde é possível comprar um litro de camarão, um litro de castanha do Pará, entre outros.

As práticas com matemáticas são inerentes da ação de sobrevivência da raça humana, a matemática não pode ser vista como uma ciência com um único objeto de estudo. Não há, porém, uma só Matemática; há muitas Matemáticas. Os grupos de profissionais praticam suas próprias etnomatemáticas. Assim, temos a matemática do agricultor, do cirurgião, do borracheiro, do marceneiro, do pedreiro e outras.

Admitir outras formas de pensar matematicamente, motiva a reflexões referentes a natureza do pensamento matemático, do ponto de vista cognitivo, histórico, social e pedagógico. Reconhecer práticas matemáticas do cotidiano africano é reconhecer que a realidade percebida por cada indivíduo dos diferentes grupos é a realidade natural, acrescida da totalidade por meio das experiências e reflexões. E mais, que estes grupos desenvolvem suas próprias tecnologias para seus julgamentos e validação dos seus produtos.

O conhecimento edificado de forma coletiva constitui-se em instrumento imperativo para a compreensão, produção e transmissão de valores socioculturais, armazenados ao longo do processo histórico vivenciado pelos sujeitos de cada grupo. Nesse sentido, é pertinente entender a matemática como um constructo próprio da linguagem adaptada à realidade de cada micro ou macro coletivo, isso permite aos sujeitos destes grupos desenvolverem técnicas que tem por objetivo estabelecer modelos matemáticos locais, tais como: unidades de medições, padrões de contagem, noção de espaço geométrico e outros. Referente a construção coletiva do conhecimento D’Ambrósio (2005) sublinha

> A ação gera conhecimento, isto é, a capacidade de explicar, de lidar, de manejar, de entender a realidade, gera o mátema. Essa capacidade se transmite e se acumula horizontalmente, no convívio com outros, contemporâneos, através de comunicações; e verticalmente, de cada indivíduo para si mesmo (memória) e de cada geração para as próximas gerações (memória histórica) (D´AMBRÓSIO, 2005, p. 110).

É a partir dessa movimentação cognitiva que ocorre no interior dos grupos que é possível a obtenção de uma matemática pluricultural, construída por meio de saberes empíricos e difundida de forma não escolarizada. E na perspectiva da construção desse conhecimento matemático pluricultural que a Etnomatemática se mostra como o caminho capaz de responder as inquietações referentes à compressão dos aspectos que corroboram para a produção de um conhecimento informal, porém com técnicas próprias dos grupos étnicos que não tem o seu fazer matemático reconhecido sistema educacional.

Contudo, convém ressaltar que Etnomatemática não tem a pretensão de difundir uma matemática não escolar em detrimento da matemática acadêmica, o objetivo é criar condições para que ambas dialoguem, numa articulação que favoreça o reconhecimento das matemáticas praticadas pelos grupos, proporcionando assim, um ambiente didático pedagógico profícuo para o processo de ensino e aprendizagem das matemáticas, fazendo uso de uma base cultural e um enfoque cognitivo para o currículo matemático, o qual leve o docente a desenvolver suas praxeologias matemáticas pluriculturais, a partir da harmoniosa relação entre as matemáticas.

Assim, a Etnomatemática busca por meio da contextualização dos conhecimentos matemáticos construídos e praticados pelos grupos étnicos, (re)ssignificar a matemática acadêmica praticada nas escolas, relacionando os conhecimentos que o aluno traz, fruto de suas relações pessoais com os saberes construídos nos grupos, com o que está preconizado no currículo oficial e que será ensinado na sala de aula.

Dessa forma, a Etnomatemática se mostra eficiente como uma ferramenta para o reconhecimento, a compreensão e o respeito às variáveis culturais que vivem no seio de cada povo, atribuindo valor humanístico à matemática e assim proporcionando ao docente uma visão mais ampla e contextualizada do grupo do qual o aluno é sujeito.

Historicamente os saberes étnicos enfrentam resistência para se ratificar como saber válido no âmbito da sala de aula, por exemplo, transversalizar as praxeologias matemáticas por saberes etino-raciais se configura para muitos docentes de matemática uma prática complexa.

Em oposição a este cenário, os professores de matemáticas precisam construir em suas histórias de vida, relações com os saberes etino-raciais e transformar a escola em um espaço de difusão de praxeologias matemáticas antirracistas que valorizem a pluralidade cultural, e promovam assim a construção de discursos e práticas educativas que não silenciem e não anulem os saberes de pessoas de diferentes origens étnicas. Dessa forma, as aulas de matemáticas passarão a exercer de fato seu papel determinante na promoção de uma educação com equidade do ponto de vista das relações etino-raciais.

Promover a diversidade cultural por meio do ensino das matemáticas contribui para a construção de uma educação numa perspectiva decolonial, na qual se admite a contribuição na construção do conhecimento por diversas culturas que compuseram e compõe a pluralidade de saberes que estão presentes na sociedade. Na abordagem

Etnomatemática, um ensino de matemáticas pluricultural pode ser o caminho pelo qual os professores concebam as diversas formas de pensar matemático.

Nesta perspectiva, é plausível construir praxeologias matemáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais, e assim, reescrever o caráter histórico e social de aspectos das matemáticas no contexto escolar, promovendo dessa forma a decolonização no processo de construção dos saberes escolares e consequentemente a decolonização do ensino e da difusão das matemáticas.

Na busca da difusão e do ensino das matemáticas na perspectiva decolonial, encontramos na Etnomatemática um caminho no qual emergem possibilidades reais de resgate e valorização da cultura africana e afro-brasileira, dessa forma estabelecendo conexões eficazes com os processos pluriculturais construídos, a partir das matrizes étnicas que constituem a sociedade brasileira. Nesse sentido, a Etnomatemática se configura como o elo capaz de estabelecer uma relação equilibrada entre as várias culturas, em um mesmo espaço em uma da realidade, a Etnomatemática é a arte e a técnica de entender, explicar e valorizar a diversidade cultural dentro de um mesmo contexto.

Todavia, para a existência de espaços dinâmicos no âmbito do sistema educacional, capazes de promover a construção do conhecimento matemático antirracista, do ponto de vista da Etnomatemática, é imprescindível que as escolas adotem práticas docentes que considerem e valorizem os saberes das diversas culturas que coexistem no espaço escolar, trazidas pelos estudantes dessas instituições, haja vista a sociedade ser formada por diversos grupos. Para além das praxeologias matemáticas transversalizadas pelos saberes etino-raciais implementadas na sala de aula, deve ser oferecido aos alunos um ambiente que permita o engajamento destes no processo de construção do conhecimento matemático antirracista.

Contudo, ressaltamos a resistência em reorientar os currículos escolares no sentido de tornar visíveis os conhecimentos de culturas historicamente marginalizadas, fruto do eurocentrismo. Nesse sentido faz-se necessário que os docentes construam em suas histórias de vida relações com os saberes etino-raciais, na perspectiva da Etnomatemática, e dessa forma levantem a bandeira por uma educação com equidade e assim faça emergir uma postura de oposição a forma eurocêntrica de pensar e conduzir o ensino das matemáticas, só assim será possível promover a quebra de paradigmas políticos e sociais que insistem em orientar as práticas educativas.

Para tanto, é necessário que não só o povo negro, mas todos os atores envolvidos no contexto de ensino e aprendizagem tenham o compromisso de se engajar nos movimentos de resistência em busca de práticas educacionais voltadas para a construção de uma educação antirracista, que objetive o ensino e aprendizado das matemáticas de maneira significativa e igualitária para todos, independentemente da cultura que carrega. E mais, a exploração de conhecimentos intuitivos e culturais nas aulas de matemáticas, leva o docente a proporcionar para o discente uma reflexão a respeito dos conhecimentos de matriz africana e afro-brasileira, considerados importantes para os processos de ensino e aprendizagem de uma matemática antirracista.

O ensino e a aprendizagem das matemáticas padecem com falta de tecnologias educacionais e praxeologias matemáticas que possibilitem a articulação entre os saberes etino-raciais e os conteúdos curriculares para além da cultura eurocêntrica. Logo, para que os conhecimentos matemáticos construídos durante as aulas de matemáticas sejam produtos que possam ser usados no cotidiano dos estudantes, não só no tocante as habilidades matemáticas, mas que sirvam de instrumentos de transformação social, de equidade que leve a formação de cidadãos antirracista.

Como proposta de inserção de conhecimentos matemáticos antirracista nos espaços de sala de aula, que promovam a integração e o diálogo entre as matemáticas corroborando para a efetivação da Lei 10.639, a interdisciplinaridade se apresenta como uma alternativa, poia envolve várias disciplinas a partir de um conteúdo dominante transversalizado pelos saberes etino-raciais certamente contribuirá para uma educação antirracista. Outra alternativa pedagógica para o ensino antirracista são os jogos de tabuleiro de origem africana, estes são recursos que podem ser facilitadores nos processos de ensino e aprendizagem nos contextos escolares.

Interdisciplinaridade para o ensino matemáticas

A ideia de tratar os conhecimentos de forma imbricada, em um processo que podemos chamar de interdisciplinaridade, não é algo novo na história da raça humana, este procedimento metodológico é inerente ao processo de construção dos conhecimentos, antigas civilizações já faziam uso desses procedimentos em seus fazeres, por exemplo, os vários saberes que envolviam o processo de mumificação no antigo Egito, os vários saberes que foram necessários para a construção das paredes do antigo Zimbábue, os vários sabres envolvidos na edificação das Pirâmides do Antigo Egito, certamente estas criações aglutinaram vários saberes. Enfim, "não há saber que não esteja inscrito em relações de saber" (CHARLOT, 2000, p. 60).

Figura 2 - Maior parede do antigo Zimbabwe

Fonte - https://pt.dreamstime.com/fotografia-de-stock-royalty-free-maior-parede-de-zimbabwe-image11401427

Com o avanço da tecnologia a prática de envolver vários saberes tem sido cada vez mais exigida. Com o aumento da tecnologia de comunicação é possível conectar profissionais de diferentes áreas de conhecimento que pertencem a povos de diferentes culturas, essa interação faz com que estas pessoas construam habilidades para lidar com este novo cenário, cujo agente regulador é a capacidade de respeitar o outro, para que possa ocorrer a interação em um ambiente pluricultural.

No contexto escolar a interdisciplinaridade surgi por volta da década de 60, fruto de movimentos estudantis que objetivavam a melhoria no ensino com foco na aproximação da realidade social, política e econômica. Com o passar do tempo às práticas com interdisciplinaridade ganharam espaço no âmbito escolar. No Brasil esta prática se inicia em fins década de 60 e início da década de 70, de lá para cá muitos estudos foram realizados e muitas obras foram publicadas na tentativa de dar uma definição para a interdisciplinaridade, a literatura nos dá alguns indícios de como conceituar a interdisciplinaridade.

Para Fazenda (1979)**,** a interdisciplinaridade é uma integração de conhecimentos parciais objetivando um conhecer geral. A mesma autora coloca que o nível interdisciplinar é procedente de um processo de mutualidade que possibilita o diálogo entre os interessados, para tanto necessita de atitude das partes que pretendem promover a interdisciplinaridade. Em Fazenda (1999) a atitude interdisciplinar é a síntese das atitudes de reciprocidade no diálogo, atitude de humildade diante das limitações, atitude de desafio perante o novo e atitude de envolvimento, comprometimento e responsabilidade, e em Cardoso (2008) temos que a interdisciplinaridade pode ser descrita como a “integração de objetivos, atividades, procedimentos e planejamentos, visando intercâmbio, a troca, o diálogo, o conhecimento conexo e não mais a compartimentalização das disciplinas” (CARDOSO *et al*., 2008, p. 25).

De modo geral não há uma definição específica para as práticas interdisciplinares, neste sentido, cabe a cada grupo que deseja fazer a interdisciplinaridade se apropriar das considerações existentes na literatura, analisá-las e tomar para si os conceitos que vão ao encontro dos objetivos que o grupo deseja alcançar, que podem ser a troca de conhecimento entre os diversos saberes em questão, a integração de diversas disciplinas conduzidas por um projeto diretor ou a construção de um conhecimento matemático por meio da interdisciplinaridade transversalizado por saberes etino-raciais.

No contexto do ensino e aprendizagem da Educação Básica, os professores que têm interesse em trilhar o caminho da interdisciplinaridade encontram aparo legal nas políticas públicas educacionais implementadas pelo Governo. A Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional está repleta de recomendações interdisciplinares, ainda que a expressão interdisciplinaridade não apareça de forma nítida.

Já nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) para o Ensino Fundamental, a interdisciplinaridade está evidente, este documento chama a atenção para a relevância do trabalho interdisciplinar fazendo uso de temas transversais Brasil (1997a). Os PCN também abordam a interdisciplinaridade para o Ensino Médio (PCNEM), o documento demonstra preocupação em desviar as práticas docentes da compartimentalização das disciplinas e indicando que tal ação deve ocorrer por meio da interdisciplinaridade Brasil (2000). Inclusive, quando trata da área da Matemática, o PCN aconselha o intercâmbio dos temas dessa área com o ensino numa perspectiva interdisciplinar Brasil (1997b).

Ao analisarmos as orientações dos PCN, é oportuno destacar a obrigatoriedade de estudos etino-raciais nas escolas de Ensino Fundamental e Médio, preconizados na Lei 10.639/2003. Esta Lei representa um importante marco legal para a sociedade brasileira, porque determina o ensino obrigatório sobre História e Cultura Afro-Brasileira e Africana nos estabelecimentos de Ensino Fundamental e Médio, públicos e particulares.

Além dessa lei, as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o ensino da História e Cultura Afro-Brasileira e Africana MEC (2004), também objetiva garantir o reconhecimento e igualdade de valorização das raízes africanas na nação brasileira, ao lado das indígenas, europeias e asiáticas. Por serem considerados marcos legais destinados a garantir os direitos à diversidade étnico-racial no contexto educacional, essas normas buscam romper com o paradigma posto socialmente sobre a realidade africana e afro-brasileira nos currículos e práticas escolares e, assim, afirmar a história, a memória e a identidade desses povos.

Acreditamos que a obrigatoriedade da inserção do ensino da História e Cultura Afro-Brasileira e Africana no ensino Fundamental e Médio corrobora em muito para uma interdisciplinaridade com as disciplinas Matemática, História, Geografia, Sociologia e outras, transversalizada pelos estudos etino-raciais, objetivando não somente o trabalho de forma integrada dos conteúdos destas disciplinas na perspectiva de proporcionar aos discentes um campo profícuo para a construção do conhecimento, mas também, a valorização da cultura africana e afro-brasileira. Haja vista, que ao longo da história os conteúdos curriculares ensinados nas escolas restringiram o estudo da cultura africana e afro-brasileira apenas aos aspectos relacionados à escravidão (GOMES, 2005).

Tendo em vista, que o ambiente escolar deve ser entendido como espaço de construção de conhecimento e socialização de valores culturais e sociais, este precisar oportunizar ao aprendiz ambiente capaz de promover o convívio de forma harmoniosa e respeitosa com a diversidade cultural dos grupos que formão a nação brasileiro, os quais contribuem para o processo de formação da identidade do povo brasileiro.

Nesse sentido, concebemos a escola como o local de grande relevância que deve promover a formação humana, haja vista, a escola ser uma das instituições responsáveis pela evolução das pessoas, para que estas se tornem seres sociais, construam princípios, valores e respeito a diversidade, que as guiarão por toda a vida. Nesse sentido, Charlot afirma que

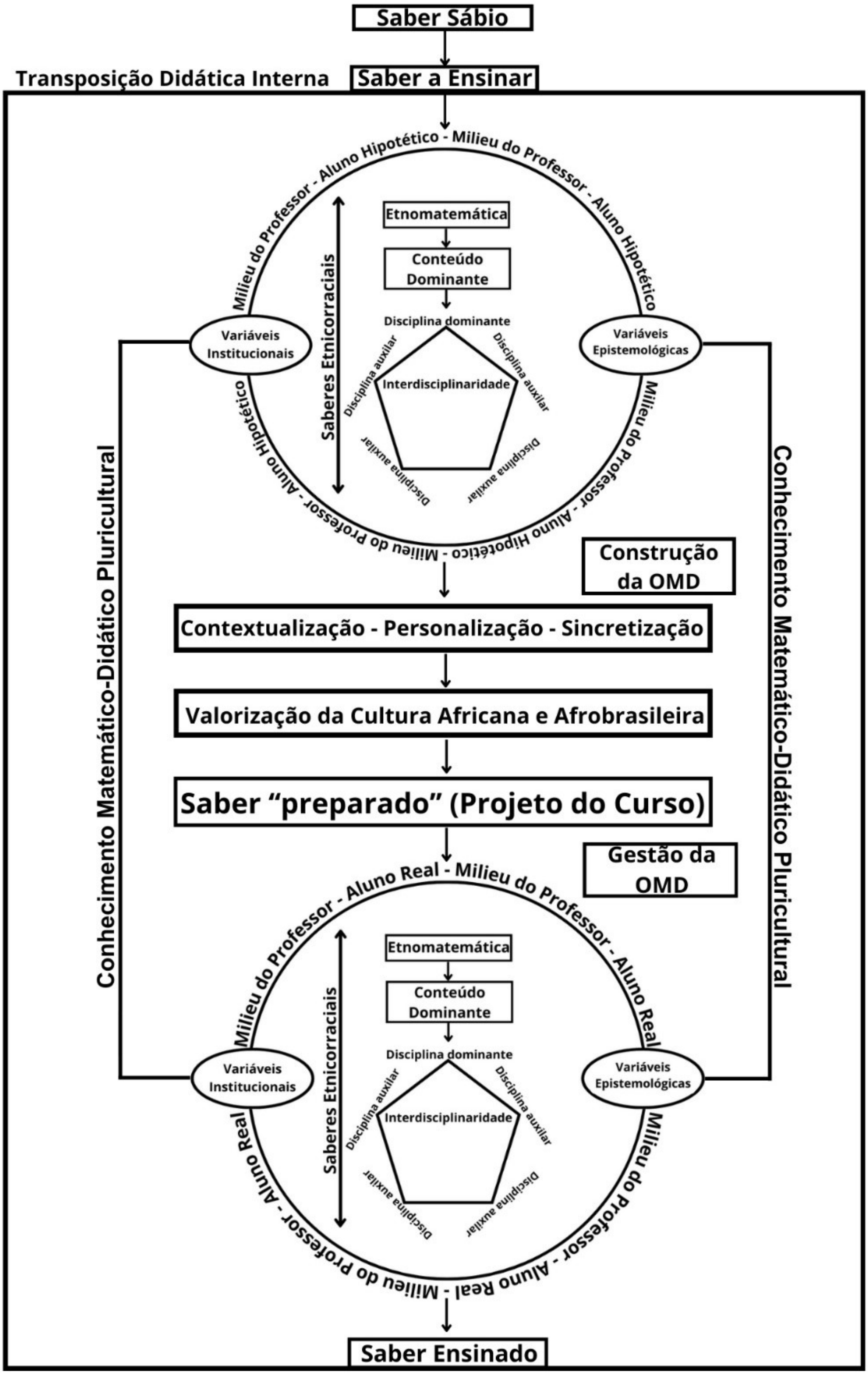
> [...] nascer significa ver-se submetido à obrigação de aprender. Aprender para construir-se, em um triplo processo de "humanização" (tornar-se homem), de singularização (tornar-se um exemplar único de homem), de socialização (tornar-se membro de uma comunidade, partilhando seus valores e ocupando um lugar nela) (CHARLOT, 2000, p. 53, grifos do autor)

Dessa forma, a proposição de processos educacionais como a interdisciplinaridade que valorize a cultura africana e afro-brasileira se constituem em um catalisador para os estudantes, haja vista, estes serem cidadãos atuantes no seio de uma sociedade multicultural e pluriétnica. A prática do antirracismo precisa ser trabalhada na escola, a fim de construirmos uma sociedade que tenha a consciência da necessidade da constituição de políticas que combatam o racimo e de uma educação justa e igualitária em que as práticas racistas e discriminatórias sejam combatidas. A luta por uma educação antirracista necessita do compromisso de todos os atores envolvidos no processo de ensino e aprendizagem, por exemplo, das matemáticas, para que assim a escola seja de fato um espaço de construção de processos formativos e transformadores.

Como base nas argumentações supracitadas, apresentamos na sequência um esquema adaptado de Silva (2013). Cujo objetivo é descrever práticas para uma proposta de ensino das matemáticas na perspectiva interdisciplinar, transversalizado pelos saberes etino-raciais por meio da Etnomatemática.

Como a proposta no esquema abaixo é para o ensino das matemáticas, identificamos como conteúdo dominante um objeto matemático de estudo, disciplina dominante a Matemática, disciplinas auxiliares as demais disciplinas que estarão envolvidas no processo de interdisciplinaridade. Ao elegermos no esquema abaixo a disciplina de Matemática como dominante, não temos a pretensão de difundir o ensino das matemáticas em detrimento das demais disciplinas, assim, se a proposta for para o ensino de outra disciplina esta passará a ser a dominante e a Matemática caso faça parte do processo de interdisciplinaridade será uma das disciplinas auxiliares.

Figura 3 - Adaptação do Modelo de Praxeologia Docente Relativo



Fonte: Silva (2013, p. 40)

A proposição da segunda adaptação da Modelo de Praxeologia Docente Relativo neste trabalho, não tem a pretensão de definir ou encerrar quaisquer debates acerca da interdisciplinaridade transversalizada pelos saberes etino-raciais. Contudo, admitimos este esquema na perspectiva de: evidenciarmos o fazer docente dos professores envolvidos na Interdisciplinaridade no complexo processo de Transposição Didática Interna; evidenciarmos a construção das OMDs e a gestão destas OMDs; evidenciarmos e refletirmos sobre as variáveis institucionais e epistemológicas que emergem na construção e gestão das OMDs; evidenciarmos a construção do conhecimento matemático-didático pluricultural que se constitui no processo de retroalimentação entre os *milieux* do professor no processo de Transposição Didática Interna, dentre outros que venham emergir no processo TDI, haja vista este processo não ser estático.

Ainda sobre a segunda adaptação do MPDR, ele revela que a TDI é composta de dois *milieux* distintos, embora alguns elementos desses *milieux* se mantenham na primeira e na segunda fase da TDI, não possuem o mesmo valor embora apresentem características relativamente similares, outros estão presentes apenas na primeira ou na segunda fase da TDI, como por exemplo, o aluno que no momento da construção das OMD é hipotético e no momento da gestão destas OMD é real. Estes argumentos caracterizem a distinção clara entre esses *milieux* do professor.

Matemática uma atividade humana

Pensar na matemática como um constructo unicamente de um povo, é uma forma brutal de desconsiderar a capacidade de pensar das demais civilizações, tendo em vista que raciocinar é um ato inerente a raça humana, não há como admitir que a matemática trabalhada nas escolas, seja tal como é pregada pela cultura eurocêntrica. Haja vista a matemática, como os demais sabres, serem essenciais para a sobrevivência da humanidade. As praxeologias matemáticas são também praxeologias humanas e como tal são fundamentais para a sobrevivência /existência de um povo.

Existem inúmeros registros comprovando que povos como os asiáticos e os africanos desenvolveram uma escrita matemática própria, e utilizavam seus saberes matemáticos para resolver problemas do cotidiano. Por exemplo, no papiro de Ahmes[102] (conhecido como papiro de Rhind), no papiro de Moscou entre outros, onde estão registradas várias situações matemáticas com suas respectivas soluções por meio do uso, por exemplo, de aritmética e geometria.

Existem várias comprovações que ratificam a construção do conhecimento matemático construído por civilizações que viveram a mais de mil anos antes de Cristo,

[102] O Papiro Ahmes foi um documento egípcio datado de 1650 a.C, copiado com a escrita hieroglífica.

como o sistema de numeração egípcia, o sistema de numeração babilônico, o registro de problemas matemáticos com suas respectivas soluções encontrados no papiro de Ahmes, dentre outros. Neste trabalho o papiro de Rhind será identificado por papiro de Ahmes em defesa de um pensamento decolonial.

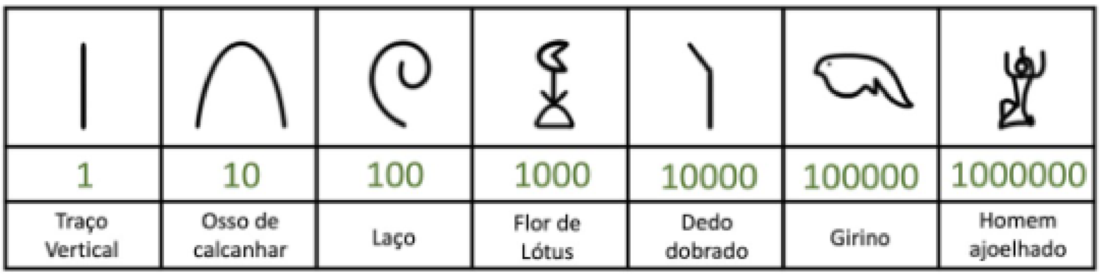
O sistema de numeração egípcia.

Acredita-se que o povo egípcio foi a primeira civilização a utilizar um sistema de numeração decimal, e por meio da utilização de símbolos conseguiam representar os números que precisassem em situações do cotidiano ou não. Referente ao sistema de numeração egípcio Roque destaca

> O sistema decimal egípcio já estava desenvolvido por volta do ano 3000 a.C., ou seja, antes da unificação do Egito sob o regime dos faraós. O número 1 era representado por uma barra vertical, e os números consecutivos de 2 a 9 eram obtidos pela soma de um número correspondente de barras. Em seguida, os números eram múltiplos de 10, por essa razão, diz-se que tal sistema é decimal. O número 10 é uma alça; 100, uma espiral; 1 mil, a flor de lótus; 10 mil, um dedo; 100 mil, um sapo; e 1 milhão, um deus com as mãos levantadas. (ROQUE, 2012, p. 56)

Dessa forma, os egípcios para escrever um número, usavam os símbolos repetindo-os até 9 vezes, onde na décima vez o símbolo era trocado por seu próximo múltiplo de 10. A seguir apresentamos os símbolos utilizados pelos egípcios para a escrita dos números.

Figura 4: Sistema de numeração egípcio



Fonte - https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-egipcios.htm

Com estes símbolos os egípcios escreviam qualquer número. Convém destacar que este sistema de numeração era decimal aditivo e não posicional, ou seja, a ordem dos símbolos não era relevante para a escrita de um número.

Por exemplo, o número 4057 na numeração egípcia poderia ser escrito de várias formas:

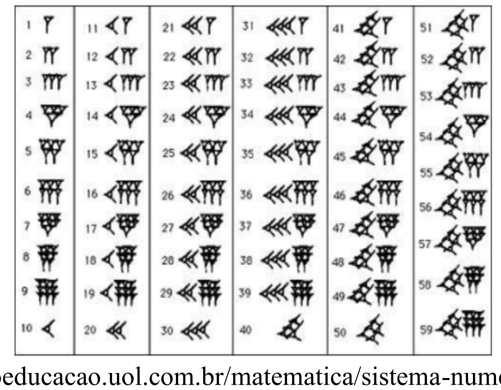
𓆼𓆼𓆼𓆼∩∩∩∩∩IIIIIII;
𓆼𓆼𓆼∩∩∩∩∩𓆼IIIIIII;
𓆼𓆼∩∩∩∩𓆼𓆼∩IIIIIII entre outras.

Dentre outras representações que podem ser construídas para representar o número 4057. Fazendo uso deste sistema de numeração os egípcios construíram uma matemática eficiente e eficaz no enfrentamento de situações do cotidiano de povo, no papiro de Ahmes existem vários problemas matemáticos, que não podemos afirmar que foram situações vivenciadas por este povo, mas que estão nos livros didáticos do Ensino Fundamental atualmente.

O sistema de numeração babilônico.

O sistema de numeração babilônico utilizava uma escrita cuneiforme, por meio de dois símbolos em formato de cunha, os dois símbolos que formavam este sistema de numeração eram chamados de cravo e asna, sua base era sexagesimal. O sistema era posicional e aditivo, por ser posicional a ordem dos símbolos na escrita do número era determinante para representar o valor. Foi criado por volta de 2000 a.C. A partir do número 60 necessitava considerar o posicionamento dos símbolos, tal como usado no nosso sistema de numeração, por exemplo, no nosso sistema o número 333 usa o mesmo símbolo três vezes, em que cada uma representa um valor diferente, dependendo da posição.

Figura 5: Sistema de numeração babilônico



Fonte - https://mundoeducacao.uol.com.br/matematica/sistema-numeracao-babilonico.htm

Os antigos babilônios perceberam que seus símbolos podiam ter função dupla, tripla, quádrupla ou em qualquer grau, simplesmente recebendo valores que dependessem de suas posições relativas na representação de um número. Até o número 59 as cunhas são agrupadas bem juntas. Um espaçamento entre grupos de cunhas estabelecia posições, lidas da direita para a esquerda, que correspondem a potências crescentes da base, cada grupo tem um valor local que depende de sua posição. Abaixo mostramos algumas representações numéricas dos babilônios.

A representação babilônica para o número 333

 $= \ = 5\,.\,60^{1} + 33\,.\,60^{0}$

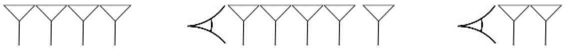
A representação babilônica para o número 100

 $= 1.\,60^{1} + 40\,.\,60^{0}$

A representação babilônica para o número 1.394

 $= 23\,.\,60^{1} + 14\,.\,60^{0}$

A representação babilônica para o número 15 312

 $= 4\,.\,60^{2} + 15\,.\,60^{1} + 12\,.\,60^{0}$

A representação babilônica para o número 36.004

 $= 10\,.\,60^{2} + 0\,.\,60^{1} + 4\,.\; 60^{0}$

Assim, fazendo estes e outros arranjos com os símbolos cravo e asna, os babilônios construíram uma matemática que lhes permitia enfrentar as situações do cotidiano. Estas práticas com matemática desenvolvidas por egípcios, babilônios e outros povos, ratificam nossas argumentações no que tange a defender as práticas com matemáticas como praticas inerentes da ação de sobrevivência da raça humana, e assim, em oposição ao pensamento eurocêntrico, corroboramos com a Etnomatemática na perspectiva da existência de várias matemáticas.

O Papiro de Ahmes.

O Papiro Ahmes é o mais extenso papiro egípcio de natureza matemática preservado até nossos dias, este papiro é conhecido como papiro de Rhind em função de Henry Rhind em 1850 d.C. tê-lo comprado em uma cidade à beira do Nilo, no Egito. Contudo, este documento foi copiado pelo escriba Ahmes em uma escrita hieroglífica de um trabalho mais antigo, por volta de 1650 a.C.

Acredita-se que estes problemas surgiam em situações do cotidiano da época e precisavam de resposta, nesse sentido, os egípcios procuravam responder fazendo uso de fórmula ou método matemático para chegar a solução de cada problema como: o preço do pão, armazenamento dos grãos de trigo, alimentação do gado entre outros problemas ligados a agricultura e comércio.

Atualmente esse papiro faz parte do Museu Britânico localizado em Londres. Este papiro tem cerca de 30 centímetros de altura e 5 metros de comprimento, nele constam mais de 80 problemas envolvendo aritmética e geometria como: o uso de frações, repartições proporcionais, regra de três simples, equações lineares, trigonometria básica, medição áreas de triângulos, trapézios e retângulos, volumes de cilindros e prismas, etc. e com suas respectivas soluções. Na sequência apresentamos o problema 24 contido no papiro de Ahmes.

Problema 24. Uma quantidade cuja sétima parte lhe é adicionada resulta em 19

Tradução do problema 24

1	7
$\frac{1}{7}$	1

1	8
2	16
$\frac{1}{2}$	4
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{8}$	1

1	$2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$	uma parte do número procurado
2	$4+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$	duas partes do número procurado
4	$9+\frac{1}{2}$	quatro partes do número procurado

Somando as partes temos

$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}$ o número procurado

Somando o número procurado mais a sétima parte desse número temos 19

$$16+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} \quad + \quad 2+\frac{1}{4}+\frac{1}{8} \;=\; 19$$

O enunciado do problema 24 “Uma quantidade cuja sétima parte lhe é adicionada resulta em 19”, é encontrado nos livros didáticos usados da Escola Básica com o seguinte enunciado Um número somado a sua sétima parte é igual a 19. Qual é esse número? Geralmente o professor da Educação Básica faz uso de uma equação para atacar a situação e encontrar a solução. Convém ressaltar que quando estes problemas foram trabalhados no antigo Egito, não existia o conceito de equação. Na sequência mostramos um dos muitos caminhos para resolver a situação, mas com a mesma linha de raciocínio.

$$x + \frac{1}{7}x = 19 \therefore \frac{x}{1} + \frac{x}{7} = \frac{19}{1} \therefore 7x + x = 19 . 7 \therefore 8x = 133 \quad \therefore x = \frac{133}{8}$$

Se dividirmos 133 por 8 obtemos um quociente 16 e o resto $\frac{5}{8}$, assim

$\frac{133}{8} = 16 + \frac{5}{8} = 16 + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$.

Logo $x = 16 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ é o número procurado.

Os problemas matemáticos que constam no papiro de Ahmes revelam de forma cabal que as civilizações pré-coloniais foram protagonistas na construção de sabres matemáticos utilizados por nós, tanto nas escolas como nos fazeres diários fora da escola. A tecnologia educacional utilizada na resolução dos problemas 24, contidos no papiro de Ahmes asseveram para à sociedade contemporânea o quanto o eurocentrismo invisibilizou os saberes das antigas civilizações, por exemplo, a africana. Os problemas supracitados, o raciocínio demonstrado na resolução destes e o método aplicado para encontrar o valor solicitado, estão presentes nos fazeres diários de professores de matemáticas da Escola Básica, os livros didáticos de matemáticas da Educação Básica estão repletos de situações problemas que seguem a mesma linha de raciocínio para encontrar a solução de um determinado problema.

Considerações finais

Conscientizar os professores de matemática no que tange a despersonalização, a descontextualização e descincretização que sofre o saber matemático ao ser transposto do saber sábio para o saber ensinado e a consequente desvalorização da cultura africana e afro-brasileira é um tema que necessita de ações urgentes por partes dos atores que atuam no sistema educacional brasileiro.

Neste sentido, entendemos que evidenciar na Transposição Didática Interna os *Milieux* distintos do professor, as variáveis institucionais e epistemológicas com seus respectivos valores, que contribuem e/ou interferem na construção e implementação das praxeologias matemáticas-didáticas antirracistas se constitui em uma necessidade para a construção de uma sociedade com equidade.

Dessa forma, admitir que vivem diferentes formas de fazeres e saberes matemáticos existentes nos distintos grupos, os quais são eficientes e eficazes na resolução de problemas vivenciados pelos sujeitos destes grupos, e não são reconhecidos pela escola se mostra como o caminho para um pensamento matemático decolonial.

Nesta perspectiva, a construção e implementação de praxeologias matemáticas por meio da interdisciplinaridade transversalizadas pelos saberes etino-raciais, tendo como fio condutor a Etnomatemática, possivelmente nos proporcionará a abordagem de conhecimentos matemáticas que herdamos de antigas civilizações e que são invisibilizados nos livros didáticos e nos fazeres docentes na sala de aula.

Referências

ALMEIDA, S. L. **O que é racismo estrutural?** Belo Horizonte (MG) Letramento, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: MEC/SEF, 1997a.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais:** matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997b.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais** (Ensino Médio): Bases Legais. Brasília: MEC, 2000.

BOSCH, M. GASCÓN, J. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de Secundaria. En González, M.J., González, M. T. y Murillo, J. (Eds.) **Investigación en Educación Matemática XIII.** (pp. 89-113), 2009.

CARDOSO, F. et al. **Interdisciplinaridade**: fatos a considerar. Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologia, Ponta Grossa, v. 1, n. 1, 22 – 37, jan./abr. 2008.

CHARLOT, B. **Da relação com o saber**: elementos para uma teoria. Tradução de Bruno Magne. Porto Alegre: Artes Médicas, 2000.

CHEVALLARD, Y. **La transposition didactique.** Grenoble : La pensée Sauvage Éditions, 1991.

CHEVALLARD, Y. **La TAD face au professeur de mathématiques,** Toulouse, 29 de abril, 2009a. Disponível em: <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=161>. Acesso em: 8 de out. 2009.

D'AMBROSIO, U. Sociedade, cultura, matemática e seu ensino. **Educação e Pesquisa**, São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

D'AMBROSIO, U..; ROSA, M. Um diálogo com Ubiratan D´Ambrosio: uma conversa brasileira sobre etnomatemática. In: BANDEIRA, Francisco de Assis.

FAZENDA, I. C. **Integração e Interdisciplinaridade no ensino brasileiro.**, 4. ed. São Paulo: Loyola, 1979. 107 p. (Coleção Realidade Educacional).

FAZENDA, I. C. **Interdisciplinaridade:** História, teoria e pesquisa. 4. ed. Campinas: Papírus,1999. 143 p.

GOMES, N. L. (2005). Alguns termos e conceitos presentes no debate sobre as relações raciais no Brasil: uma breve discussão. In **Educação antirracista: caminhos abertos pela Lei Federal 10.639/03**. MEC.

KNIJNIK, G.; WANDERER, F.; OLIVEIRA, C. J. **Etnomatemática**: currículo e formação de professores. Santa Cruz do Sul: EDUNISC, 2004. p. 419-431.

LEI nº 10.639. (2003). Altera a Lei n.º 9.394, de 20 de dezembro de 1996, que estabelece as diretrizes e bases da educação nacional, para incluir no currículo oficial da Rede de Ensino a obrigatoriedade da temática "História e Cultura Afro-Brasileira". Presidência da República.

MEC - Ministério da Educação. (2004). Resolução n° 1 do Conselho Nacional de Educação, Institui Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana. MEC.

ROQUE, T. História da Matemática: Uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012. 409 p. Disponível em: <https://th3m4th.files.wordpress.com/2016/01/historia-da-matematica-tatiana-roque.pdf>. Acesso em: 13 jun. 2018.

SILVA, Reginaldo da. O Conhecimento Matemático-Didático do Professor de Multisseriado: análise praxeológica. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Pará, Instituto de Educação Matemática e Científica, Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática, Belém, 2013.

- Bastidores do Curso Análise Estatístico Implicativo

Foto dos membros do Gedim Statistic nos Bastidores do I Módulo do Curso ASI

Fonte: Acervo do Gedim Statistic (2023)

Oficina de Noções de Estatística do material concreto a Tecnologia

Fotos das atividades realizadas de Noções de Estatística com uso do material concreto a tecnologia

Fonte: Acervo Gedim Statistic (2023)

Foto da I FEMAT UFPA Campus Abaetetuba - Pará

Fonte: Acervo Gedim Statistic (2023)

GEDIM STATISTIC em vários momentos

Fotos 1 e 2 - Exposições no Planetário do Estado do Pará e Clube de Ciências espaço UEPA

Fonte: Acervo Gedim Statistic (2023)

Foto da Semana dos Calouros IEMCI - UFPA

Fonte: Acervo Gedim Statistic (2023)

Foto com os Alunos do EJAI da Escola Municipal Benvinda – Belém-Pará

Fonte: Acervo Gedim Statistic (2023)

Sobre os autores

Nomes dos autores	E-mail	Local de trabalho	Mini currículo
Ana Karine Dias Caires Brandao	karinedias33@gmail.com	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia	Licenciada em Ciência com habilitação em Matemática, mestre e doutora em Educação Matemática e professora efetiva do IFBA. Linha de pesquisa de interesse: TAD, Semiótica, Ensino e Aprendizagem da Matemática
Carlos Alberto Gaia Assunção	carlosgaia04@hotmail.com	Unifesspa	Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas - Professor adjunto C4 na UNIFESSPA.
Cláudia Fernandes Andrade do Espírito Santo	espiritosantoclaudia2@gmail.com	Seduc Pará	Doutora em Educação em Ciência e Matemática pela Universidade Federal do Pará, professora Nível superior na Secretaria de Estado de Educação do Pará.
Denivaldo Pantoja da Silva	denivaldopantoja@gmail.com	Universidade Federal do Pará	Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas pelo Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA).
Deusarino Oliveira Almeida Júnior	djralmeida@gmail.com	EETEPA "Dr. Celso Malcher"	Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará no Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI). Integra o Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática das Matemáticas (GEDIM) desde 2018.
Fernando Cardoso de Matos	matos2001@gmail.com	IFPA/SEDUC	Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas pelo Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA).

Jacqueline Agnes da Silveira Santos	jacquelineassantos@gmail.com	Imetropará	Mestranda em Administração; Especialização em Bioestatística e em Gestão Pública; Graduada Bacharel em Estatística.
José Carlos De Souza Pereira	jsouzaper@gmail.com	Secretaria de Educação do Estado do Pará	Doutor em Educação em Ciências e Matemáticas pela Universidade Federal do Pará. Professor da Rede Estadual de Ensino do Estado do Pará. Docente Credenciado no Programa de Pós-Graduação em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas - Mestrado Profissional - PPGDOC/IEMCI/UFPA. Vice-líder e Pesquisador do Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM).
José Messildo Viana Nunes	messildo@ufpa.br	Universidade Federal do Pará	Doutor em Educação Matemática pela PUC-SP. Lider de pesquisa GEDIN
Mariana Angelim Lobato Cardoso	mariana.iran@hotmail.com.br	Mori Capital Ltda	Licenciada em Matemática, especialista em Educação Matemática e Física.
Maria José Ferreira da Silva	maze.fsilva@gmail.com	PUC-SP	Doutora em Educação Matemática pela PUC-SP.
Matheus Raphael Lopes Dinelli	prof.matheusdinelli@gmail.com	Universidade Federal do Pará	Professor pesquisador de ciências e matemática, membro dos grupos pesquisa GEDIM e GEDIM STATISTIC.
Nazaré do Socorro Moraes da Silva	nazaresocorro2@gmail.com	Secretária de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA)	Doutoranda do Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas e Mestra em Docência em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA). Professora de matemática classe III da Secretária de Estado de Educação do Pará (SEDUC-PA).

Raquel Soares do Rêgo Ferreira	raquellrego@gmail.com	SEDUC /PA	Doutora em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará, atua como professora da Educação Básica - SEDUC/PA. Faz parte do grupo GT14 e GEDIM.
Reginaldo da Silva	reginaldo.jamacaru@ifpa.edu.br	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Pará	Doutor em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará, Professor Titular do Instituto Federal de Educação Ciência e Tecnologia do Pará
Renato Borges Guerra	rgufpa@gmail.com	GEDIM	Doutorado em Automação e Controle -Engenharia Elétrica pela UNICAMP
Roberto Carlos Dantas Andrade	andradeetrb@gmail.com	Colégio Tenente Rego Barros (CTRB)	Doutor em Educação Matemática pela Universidade Federal do Pará, Pesquisador na área da Didática da Matemática
Saddo Ag Almouloud	saddoag@gmail.com	Universidade Federal do Pará	Doutorado em Matemática e Aplicações, Professor titular Livre da UFPA. Vice líder de GEDIM
Silvia Caroline Salgado Pena	silvia.pena@hotmail.com	Fundação de Apoio e Amparo a Estudos e Pesquisas no Estado do Pará- FAPESPA	Doutoranda e Mestrado pelo IEMCI/UFPA em Educação Matemática, Bacharelado em Estatística e Licenciatura em Matemática com ênfase na educação especial e educação estatística.
Saul Rodrigo da Costa Barreto	saul.rdc.barreto@uepa.br	Universidade do Estado do Pará - UEPA	Doutorado em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) pela Universidade Federal do Pará (UFPA. Professor de Matemática Aplicada da Universidade do Estado do Pará (UEPA).
Teodora Pinheiro Figueroa	teodora.pinheiro@gmail.com	Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), campus Pato Branco)	Professora do Departamento de Matemática da UTFPR, campus Pato Branco. Licenciada em Matemática, doutora em Engenharia Mecânica, pós-doc em Educação Matemática.

Vera Debora Maciel Vilhena	vera.vilhena@icen.ufpa.br	Fundação de Atendimento Socioeducativo do Pará	Doutoranda em Educação em Ciências e Matemática pela IEMCI/UFPA (atual). É membro do grupo de estudo e pesquisa GEDIM do IEMCI/UFPA é vice-coordenadora do grupo GEDIM/STATISTIC.