Coleção
Formação de Professores

VOLUME 1

NÚMEROS

Ações e Intervenções na e para a formação de professores que ensinam Matemática

Márcia Rodrigues Leal
Ana Maria Porto Nascimento
Raquel Carneiro Dörr
(organizadoras)

Akademy
EDITORA

Coleção *Formação de Professores*

Ações e Intervenções na e para a formação de professores que ensinam Matemática

Volume 1: Números

www.akademyeditora.com.br

GRUPO DE INVESTIGAÇÃO EM ENSINO DE MATEMÁTICA - UnB

Márcia Rodrigues Leal
Ana Maria Porto Nascimento
Raquel Carneiro Dörr
(organizadoras)

Coleção *Formação de Professores*

Ações e Intervenções na e para a formação de professores que ensinam Matemática

Volume 1: Números

Akademy Editora

2025

Editor-chefe: Celso Ribeiro Campos
Diagramação e capa: Editora Akademy
Revisão: Cassio Cristiano Giordano

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

L435n

Leal, Márcia Rodrigues; Nascimento, Ana Maria Porto; Dörr, Raquel Carneiro (organizadoras).

Ações e intervenções na e para a formação de professores que ensinam matemática. Volume 1: Números. São Paulo: Editora Akademy, 2025.

Coleção formação de professores (vol.1).

Vários autores.
Bibliografia

ISBN Físico 978-65-80008-71-1
ISBN Digital 978-65-80008-70-4
DOI XXXXX

1.Formação de professores. 2.Ensino de Matemática. 3.Ações. 4.Intervenções. 5.Aprendizagem.

I. Título

CDD: 370.71

Índice para catálogo sistemático:
1. Área 370 – Educação

Editora Akademy – São Paulo, SP

Sumário

Aos Professores

O Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM), vinculado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB), comemora, neste ano de 2025, uma década de sua criação. Sua regularização junto à UnB e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) ocorreu em 22 de dezembro de 2015.

Ao longo desses 10 anos, o grupo publicou dez livros, organizados por seus membros - professores/pesquisadores - e alguns convidados, parceiros que atuam na docência desde a Educação Básica até o Ensino Superior, no Distrito Federal, em diferentes estados do Brasil e também no exterior.

Em 2025, o grupo propôs iniciar uma coleção de textos com o objetivo de reunir estudos e experiências vivenciados por membros do GIEM e seus colaboradores. O foco desses trabalhos são as Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística, conforme propostas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Essa coleção, intitulada Formação de Professores, tem como objetivo discutir ações e intervenções na e para a formação de professores que ensinam Matemática.

A proposta prevê a construção de cinco volumes, abordando as cinco unidades temáticas que orientam a formação de habilidades no campo da Matemática para a Educação Básica (BRASIL, 2018). Assim, estão programados:

- Volume 1: Números
- Volume 2: Álgebra
- Volume 3: Geometria
- Volume 4: Grandezas e Medidas
- Volume 5: Probabilidade e Estatística

Os professores, formadores de professores e pesquisadores que integram o Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) desejam que o conhecimento compartilhado nessas experiências contribua com o trabalho docente em sala de aula e fomente questionamentos que impulsionem pesquisas, ações e propostas de intervenção na formação inicial e continuada do professor que ensina Matemática.

Márcia Rodrigues Leal
Ana Maria Porto Nascimento
Raquel Carneiro Dörr

Apresentação

Os professores atuantes na Educação Básica e no Ensino Superior, os formadores de professores e os pesquisadores que integram o Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM), associado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB), discutiram a possibilidade de reunir estudos desenvolvidos pelos membros do grupo, relacionados à exploração das Unidades Temáticas: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018), de modo a apresentar aos professores ações e intervenções voltadas ao trabalho em sala de aula em diferentes níveis educacionais.

Iniciou-se assim a constituição da coleção de livros Formação de Professores, com o objetivo de discutir ações e intervenções na e para a formação de professores que ensinam Matemática, a partir de contribuições baseadas nas experiências de docentes, formadores e pesquisadores. A proposta prevê a construção de cinco volumes, sendo cada um dedicado a uma das Unidades Temáticas.

Este primeiro volume, intitulado Números, é composto por sete capítulos organizados em uma linha temporal reflexiva. Os textos apresentam resultados de estudos e experiências com o objetivo de problematizar o ensino de Números, desde os conceitos elementares, abordados nos anos iniciais, até aqueles de maior complexidade cognitiva, presentes ao longo da trajetória escolar do estudante, do Ensino Fundamental ao Ensino Superior.

O primeiro capítulo, de Cristiano Alberto Muniz, Ana Maria Porto Nascimento e Márcia Rodrigues Leal, intitulado A Construção do Conceito de Número na Alfabetização Matemática: Algumas Reflexões e Contribuições para as Práxis, apresenta um estudo sobre o conceito de número, expondo suas implicações metodológicas, buscando dialogar com o professor em exercício e com o futuro professor que se encontra em processo de formação inicial, a fim de contribuir para a proposição de ações e intervenções que resultem na consolidação das aprendizagens neste campo.

No segundo capítulo, Aprender e Ensinar Matemática na Perspectiva de Sentido de Número numa Abordagem do Ensino Exploratório, Cília Cardoso Rodrigues da Silva, Maria de Lurdes Serrazina e Regina da Silva Pina Neves refletem sobre o sentido de número, o raciocínio matemático e o uso de tarefas envolvendo operações com números naturais, sugerindo o Ensino Exploratório como abordagem didática para a organização do trabalho do professor e do estudante.

O terceiro capítulo, Três Propostas Metodológicas de Atividades com Números Apoiadas pela Neurociência, de Josinalva Estácio Menezes e Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz, analisa contribuições da Neurociência para a Educação Matemática. Os autores destacam que o processamento numérico e aritmético envolve funções cognitivas relacionadas à memória, atenção, percepção motora e espacial, ressaltando a importância desses processos na aprendizagem e como estes devem ser considerados nas práticas de ensino.

No quarto capítulo, A Contagem na Constituição do Conceito de Número: Implicações para a Sala de Aula, Ana Maria Porto Nascimento, Cristiano Alberto Muniz e Márcia Rodrigues Leal discutem como o processo de contagem contribui para o avanço na constituição das quantidades numéricas. A análise parte da ação das crianças, estudantes do segundo e terceiro anos do Ensino Fundamental, durante a construção de uma "coleção de tampinhas", destacando as transformações nas formas de mediação adotadas pelo professor.

O quinto capítulo, Contagens e Sistema de Numeração Decimal: Mapeamento das Aprendizagens de Estudantes do 1º e 2º Anos do Ensino Fundamental, de Raimunda de Oliveira e Simone Alves Côrtes, apresenta propostas de intervenções por meio de grupos produtivos e reagrupamentos de turmas. O objetivo é fomentar o avanço das aprendizagens das crianças e mapear sua compreensão sobre a contagem e as regras do Sistema de Numeração Decimal.

No sexto capítulo, Momentos de Estudo: Números, Operações e Expressões Numéricas, Edmo Fernandes Carvalho, Ana Maria Porto Nascimento e Fábio Nunes da Silva analisam a narrativa de uma aula sobre expressões numéricas. A partir dessa análise, os autores caracterizam os chamados "momentos de estudo", destacando a relação entre a técnica e o discurso que a justifica, a fim de evidenciar como os referidos momentos se desassociam nas práticas institucionais, propondo um modelo de análise de praxeologias didáticas e matemáticas.

O sétimo capítulo, Ações e Reflexões sobre o Ensino de Números Inteiros na Formação Inicial de Professores de Matemática, de Lineu da Costa Araújo Neto, problematiza as conexões entre a matemática acadêmica e a matemática escolar. A reflexão é feita a partir de uma proposta inovadora desenvolvida na disciplina Teoria dos Números 1, do curso de Licenciatura em Matemática, que teve como foco o ensino de números inteiros.

Em síntese, este primeiro volume apresenta estudos sobre objetos matemáticos que compõem a Unidade Temática Números, abordados em uma perspectiva que vai além do que é previsto para o Ensino Fundamental e Médio. Os autores discutem também o ensino de Números no Ensino Superior, especialmente na formação inicial de professores. Esses estudos podem contribuir com a proposição de ações e intervenções na e para a prática em sala de aula.

Márcia Rodrigues Leal
Ana Maria Porto Nascimento
Raquel Carneiro Dörr

Prefácio

O processo de ensino da matemática constitui um dos mais importantes desafios para os sistemas de educação brasileiros, sobretudo, considerando que as aprendizagens e a construção da autoimagem dos sujeitos de aprendizagem sobre suas capacidades são determinantes para a história educativa e para o processo de desenvolvimento da cidadania. Esse desafio é a razão de ainda termos a necessidade de estudos, pesquisas, publicações e formação sobre o ensino de matemática em nosso país. Trata-se de aspectos fundamentais se quisermos contribuir para o avanço das aprendizagens matemáticas desde a Educação Básica até o Ensino Superior e para o desenvolvimento da imagem positiva de cada sujeito em suas capacidades de realizar pensamentos matemáticos e potencializar suas inteligências, permitindo que cada um se descubra capaz de superações ilimitadas por meio de uma aprendizagem qualificada. Essas devem ser as finalidades últimas que justificam a presente obra, escrita no âmbito das produções do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB).

Os processos de letramento e alfabetização, além de serem indissociáveis, constituem a base da pirâmide do desenvolvimento educacional nas escolas e fora delas. Eles são de suma importância nesta obra, pois, como veremos ao longo dos capítulos, os autores defendem que os conceitos em aprendizagem não são fruto de transmissão mecânica, a partir de repetitivos exercícios escolares, mas de construções de cada sujeito engajado cognitiva e emocionalmente em situações e contextos significativos e desafiantes para aquele que se encontra em desenvolvimento, mergulhado em conjunturas culturais que aportam as razões e os significados de aprender matemática para além da vida escolar.

Consideramos que a aprendizagem matemática é um processo dinâmico, complexo, subjetivo, enigmático, uma vez que se realiza ao longo das vivências reflexivas de cada um enquanto sujeito ativo (Fernando González Rey) nas realizações de suas experiências (Jerôme Bruner) em cada contexto de vida, requerendo, na perspectiva freiriana, a leitura de mundo, a criticidade e criatividade, assumindo posturas interpretativas, tomadas de decisões e definição de planos de intervenção transformadora da realidade.

Ao olharmos os processos de aprendizagem entendemos que o currículo escolar pode ser definido como um tipo de estrada de pista dupla, com duas faixas de rolamento.

Uma das faixas corresponde às proposições didático-pedagógicas, planejadas, ofertadas, controladas e avaliadas pelo professor alfabetizador, segundo suas intencionalidades pedagógicas, olhando para as capacidades de cada sujeito. Para tanto, apoia-se nos descritores previamente estabelecidos, organizando atividades matemáticas, envolvendo quantificações numéricas, comparações, sequenciações, registros, medidas, julgamentos de possibilidades, proporcionalidades, leitura e apreensão dos seus espaços e tempos. Nesse processo são mobilizados os objetos de conhecimentos próprios da matemática, prescritos nos referenciais curriculares como a atual Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em um momento importante da construção de conceito que faz parte de um processo que deve levar em conta as construções sociais e emocionais realizadas desde os primeiros anos de vida, nos quais a criança tem os contatos iniciais com elementos culturais da matemática.

A outra faixa de rolamento é o currículo proposto, o qual deve fortemente definir e pavimentar a pista do letramento com atividades significativas culturalmente, de maneira dialética e dialógica, articulada com as atividades de natureza escolar. Pensamos que esse processo deve favorecer caminhadas que permitam uma constante visitação, ao longo do percurso pelas duas faixas: da dimensão cultural do conhecimento da matemática e da dimensão das propostas pedagógicas elaboradas pela escola. Para sermos mais específicos, definimos:

Dimensão cultural é aquela que se dá fora da escola, por meio da qual a criança vivencia elementos matemáticos, como: a) no contexto dos esportes, com tabela dos times, pontuação dos jogos, valores dos pontos, estratégias de jogadas, trajetória dos deslocamentos dos jogadores; b) nas situações de compra, com encartes de mercados, preços das coisas e primeiras manipulações com valores, tamanho do sapato, da roupa; ou c) no conhecimento gradativo dos instrumentos de medidas, relógios, calendários, mapas digitais, endereços, números de telefone, CEP, CPF, canais de TV, Streamings, canais de FM, plataformas e jogos digitais, celulares e smarTVs, culinária, música, artes, entre muitos outros elementos "matematizantes" presentes na infância. Esses contextos não podem ser desprezados no ambiente escolar, pois os elementos matemáticos presentes no currículo ganham importância a partir das primeiras experiências matemáticas culturais que as crianças vivenciam.

Dimensão didático-pedagógica constituída pelas propostas, ainda fortemente caracterizadas pelas escritas, produção dos registros dos algarismos em folhas impressas, tarefas dos livros didáticos ou materiais dos sistemas de ensino. Alguns professores pouco valorizam as experiências matemáticas como realização de medições, explorações espaciais de deslocamento e orientações no espaço, no tempo e, ainda, as noções de possibilidades e causalidades, tão importantes para a construção do conhecimento matemático.

Considerar ambas as dimensões, cultural e didático-pedagógica, visa a tentar revelar o quanto os processos de ensino e aprendizagem matemáticos, em suas dimensões pessoais, culturais e pedagógicas, constituem um fenômeno complexo, em diferentes perspectivas, abordadas nesta obra do GIEM, a partir de um embasamento teórico pautado nas obras de Jean Piaget e demais psicólogos cognitivistas construtivistas, passando pela abordagem da Neurociência, referente à dimensão lúdica e socioemocional do aprender. Assim, esta obra apresenta, em seus sete capítulos, resultados de pesquisas acerca dessas aprendizagens, desde os primeiros anos de escolaridade até o ensino superior, além de experiências pedagógicas vivenciadas na escola, nas interações com os sujeitos de aprendizagem, na construção de diálogos qualificados com esses sujeitos e seus professores.

A complexidade e riqueza dos processos de ensino e aprendizagem de matemática permitem muitas entradas teóricas e perspectivas epistemológicas que apoiam e sustentam práticas e discursos sobre metodologias que recheiam as práxis pedagógicas nas inúmeras salas de aulas do nosso país, com ações que definem o gostar ou detestar a matemática. Desse modo, os capítulos que compõem a presente obra são testemunhos concretos da diversidade de interpretações e apropriações, de análises e teorizações que alimentam práticas e que devem iluminar a formação do professor que ensina matemática.

A obra inicia com o capítulo "A construção do conceito de número na alfabetização matemática: algumas reflexões e contribuições para as práxis", de Muniz, Nascimento e Leal. Nele, os autores buscam dar ênfase à revisão teórica sobre o protagonismo da criança em seus processos de tessitura da alfabetização matemática, o que se inicia bem antes de sua ida à escola e bem antes do Ensino Fundamental, considerando o sujeito como ser ativo neste processo, remetendo, assim, à importância da mediação pedagógica. Resgatam as contribuições da teoria piagetiana, revisitando importantes estudiosos dessa área, hoje pouco lidos pelos alfabetizadores, tais como Constance Kamii, trazendo, ainda, uma ampliação teórica a partir das perspectivas histórico-cultural de Vigotski e de pesquisadores recentes e de renome internacional como Serrazina, que trata da noção do sentido do número, a qual também escreve um dos capítulos nesta obra sobre essa temática, conjuntamente com as pesquisadoras Silva e Pina Neves do GIEM.

Sendo assim, os autores, nesse primeiro capítulo, apresentam reflexões sobre conceitos estruturantes que dão alicerce aos processos de desenvolvimento conceitual de número pela criança. Trata-se de uma revisitação ampliada, atualizada e crítica das contribuições de Jean Piaget para a compreensão do complexo processo de alfabetização matemática, de modo a iluminar a oferta de situações mais significativas e que contribuam para o desenvolvimento da inteligência numérica das crianças neste momento fundamental de escolarização. Nessa direção, o texto aponta para a importância de, no cotidiano pedagógico, termos oferta de situações de quantificações e contagens significativas.

Muniz, Nascimento e Leal apresentam uma perspectiva segundo a qual a alfabetização requer que cada criança vivencie tanto situações numéricas quanto não numéricas, uma vez que ambas têm fortes contribuições para a construção do pensamento matemático desde os primeiros anos e em seu futuro na escola e na vida. Resgatam as contribuições da pesquisadora Bertoni, a fim de reafirmar a importância das ações e intervenções que organizam as necessidades de quantificações e agrupamentos decimais, presentes nas estruturas do sistema numérico. Os autores ainda discutem sobre as implicações da presença das diferentes perspectivas do número no cotidiano escolar.

Em seguida, no segundo capítulo, "Aprender e ensinar matemática na perspectiva de sentido de número numa abordagem do ensino exploratório", Silva, Serrazina e Pina Neves aportam contribuições significativas tanto teóricas quanto apresentando um novo olhar para as práxis da alfabetização matemática, focando a compreensão do protagonismo da criança nas suas aprendizagens numéricas. Refletem sobre os diferentes sentidos dos números e suas implicações na construção dos conceitos, operações e estruturação das operações aritméticas. É foco do texto uma abordagem de ensino exploratório como uma perspectiva praxiológica que pode ser inserida nas formações dos professores brasileiros, graças ao seu alto valor e ao fato de ser desafiadora, uma vez que requer a elaboração e proposição de tarefas exploratórias e/ou investigativas, o trabalho autônomo dos alunos, a discussão coletiva e uma síntese final.

Silva, Serrazina e Pina Neves, apoiadas na realização de investigação científica sobre raciocínio matemático e proposição de tarefas, à luz dos estudos de Serrazina, junto ao seu grupo de pesquisa no Instituto Politécnico de Lisboa, do qual Silva participou fortemente nos últimos anos, buscam trazer contribuições do "Projeto Reason", no Brasil e em Portugal, discutidas na tese de doutoramento de Silva, intitulada "Manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem multiplicação e divisão numa perspectiva do sentido de número". Com a intenção de valorizar mais a formação de professor acerca das noções dos números na perspectiva do sentido de número com uma abordagem exploratória, as autoras buscam uma melhor compreensão das intervenções possíveis e necessárias a serem realizadas nos processos de construção conceitual e procedimental das crianças em início de escolarização.

Se em outros países a noção conceitual de SENTIDO DE NÚMERO já conta com uma longa história, desde a década de 1970, no Brasil essa noção ainda é recente e pode aportar contribuições tanto teóricas quanto práticas, a partir de um novo olhar sobre os processos de alfabetização matemática. No fim do túnel pedagógico, as autoras indicam estratégias de compreensão e realização de cálculos mentais ou escritos, o delineamento de algoritmos aritméticos, apoiando-se fortemente no desenvolvimento do sentido de número. Neste capítulo, Silva, Serrazina e Pina Neves, apoiadas nos estudos doutorais de Silva, apontam que é quase impossível retratar o cálculo mental sem a ele juntar os atributos "flexível" e "adaptativo", analisando a resolução de problemas do campo multiplicativo. Apresentam experiências realizadas em Portugal e no Brasil, destacando três casos com uma variedade e diversidade de procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental, adotados pelos estudantes ao resolverem as tarefas, o que permite compreender o quanto e como o sentido numérico se articula com a produção e a comunicação de procedimentos operatórios. As autoras indicam que, nas ações e intervenções do professor alfabetizador, é de vital importância a estratégia de cálculo mental, a qual pode emergir quando são dadas oportunidades aos estudantes para explicar seu pensamento e/ou raciocínio matemático.

O texto avança para discutir o conceito do raciocínio matemático enquanto eixo pilar na produção e desenvolvimento das aprendizagens matemáticas na infância. No estudo das flexibilidades dos processos operacionais, ganha importância a compreensão dos motivos que levam a criança a realizar distintos procedimentos de forma diferenciada entre eles. Destaca a importância de nas ações e intervenções, além da qualidade das tarefas a construção de um ambiente pautado pelo diálogo, pelas trocas, pelos confrontos, pelo discurso argumentativo. Assim, além da situação problema e do raciocínio matemático, ganha valor a comunicação matemática como elemento que qualifica as aprendizagens matemáticas.

O terceiro capítulo revela o avanço dos estudos da Neurociência, favorecendo a compreensão sobre os processos de aprendizagem e a constituição da inteligência. Intitulado "Três propostas metodológicas de atividades com números apoiadas pela neurociência", nele, Menezes e Silva Braz apoiam-se na ideia de que as aprendizagens se realizam no sistema nervoso central. Os autores intentam estabelecer novas metodologias iluminadas pelo desenvolvimento da Neurociência junto à Educação Matemática nos últimos tempos, apresentando um quadro teórico-conceitual a partir das pesquisas da primeira área do conhecimento e suas implicações para ampliação da compreensão do fenômeno da aprendizagem na segunda área e a concepção de novas propostas pedagógicas. No texto, ganham destaque os fatores de ordem emocional nos processos de cognição, a partir de Maturama. Consideram que se as sinapses são as responsáveis pelo desenvolvimento das novas aprendizagens, o ambiente e a estimulação neural têm papel de destaque, permitindo otimizar as capacidades de plasticidade do sistema nervoso central na construção de novas relações lógicas.

Assim, os autores entendem que novos métodos devem levar em conta que as aprendizagens matemáticas permeiam o estabelecimento e desenvolvimento de estruturas novas, flexíveis e divergentes, o que revela as muitas e complexas capacidades da criança na elaboração de respostas. Para tanto, o método, as tarefas, as posturas, as mediações, ações e intervenções do professor ganham importância. No capítulo, temos importante apresentação dos processos da Cognição Numérica, distinguidos em duas estruturas, a primária, na qual temos o senso numérico e a secundária, na qual temos o processamento numérico e o cálculo. A descrição das diferentes funções neurais no trato do número traz novas perspectivas de compreensão do quão complexos e ricos são os processamentos cognitivos associados tanto à aprendizagem quanto à produção de soluções numéricas.

Em todo caso, a motivação é elemento central para os processamentos neurais e, portanto, Menezes e Silva Braz advogam a importância da utilização de jogos no contexto das aprendizagens matemáticas, inclusive jogos digitais. Inspirados na Neurociência, os autores propõem três atividades, uma para os

Anos Iniciais, outra para os Anos finais e uma terceira para o Ensino Médio e mesmo Superior, explorando as noções numéricas que, para eles, podem mobilizar vários sentidos e áreas do cérebro que se referem às habilidades mentais como atenção, percepção, concentração, raciocínio, entre outras, estimulando assim essas determinadas áreas do cérebro.

Contar, contar, contar .... e contar como capacidade fundamental na construção da noção numérica é o que propõem Nascimento, Muniz e Leal no quarto capítulo, intitulado "A contagem na constituição do conceito de número: implicações para a sala de aula". Mas o que é contar, para além da recitação da sequência numérica? Trata-se de uma habilidade cognitiva complexa, com construções operadas pela criança diante de diferentes desafios de quantificar, comparar, sequenciar, operar coleções, eventos, seres, entre outros. São construções que requerem da escola uma inúmera oferta de situações matemáticas que levam a criança, em processo de alfabetização matemática, a se apropriar de estruturas mentais essenciais que não são objetos de ensino de uma professora alfabetizadora.

Os autores discutem alguns resultados importantes da tese de doutorado de Ana Maria Porto do Nascimento, na qual a autora analisou a construção de práxis pedagógicas quando professoras participaram, no contexto da escola, de estudos, reflexões e problematizações sobre alfabetização em matemática. Assim como os capítulos já citados neste prefácio, o texto e a pesquisa mais uma vez recaem na importância de considerarmos o protagonismo das crianças nos seus processos de aprendizagens matemáticas, sobretudo no momento da alfabetização matemática, com centralidade na construção do conceito de número em contextos diversos de quantificações e produção de registros. Observa-se que cada aprendizagem realizada por uma criança deve ser vista como uma síntese histórica da sua constituição como sujeito inteligente e capaz de elaborar estratégias resolutivas.

O capítulo apresenta, desse modo, a capacidade de quantificação como uma síntese de diferentes habilidades matemáticas (muito distante da memorização da sequência oral ou da escrita dos algarismos), a qual muitos professores alfabetizadores não percebem. Os resultados de pesquisa, utilizados para apoiar as referidas discussões, retratam um mergulho no convívio longo e aprofundado da pesquisadora, primeira autora do capítulo, com as professoras de anos iniciais em uma escola pública no interior do Brasil. Nascimento, por meio de ações e intervenções planejadas coletivamente, provocou um movimento epistemológico e metodológico na escola acerca das possibilidades de fazerem as crianças avançarem no sistema numérico, para além do contar até vinte, apropriando-se das estruturas essenciais dos processos de contagem/quantificação e do sistema numérico decimal.

Nascimento, Muniz e Leal destacam que a proposta de fazer uma Coleção de Tampinhas oportunizou a construção de estratégias de controle das quantidades, contando, organizando em grupos, sequenciando, explorando e registrando, conforme o aumento das quantidades de tampinhas. Pensando de um lado a construção do número pela criança apoiada nos processos de contagem e, por do outro, a proposta pedagógica da coleção, fica evidenciado o quanto é importante a noção de ambiente alfabetizador matemático, com um contexto rico em provocações motivadoras, fazendo com que cada criança assuma de forma significativa seu protagonismo de querer ir mais além e romper limites nos seus processos de aprendizagem matemática acerca das noções de número.

Oliveira e Côrtes oferecem um texto intitulado "Contagens e sistema de numeração decimal: mapeamento das aprendizagem de estudantes do 1º e 2º anos do ensino fundamental" e, no quinto capítulo, também reforçam o protagonismo das crianças nas aprendizagens matemáticas, na apropriação ativa das estruturas, propriedades e regularidades do sistema de numeração decimal, o que resulta na capacidade de realizarem construções de procedimentos operatórios fundamentais no contexto de resolução de situações problemas que envolvem quantificações. O texto é alicerçado em um trabalho de dois anos, no qual as autoras realizaram acompanhamento pedagógico em onze turmas, sendo cinco turmas do 1º ano e seis do 2º ano. A partir da identificação de dificuldades de aprendizagens apontadas pelos professores, são propostas ações e intervenções por grupos produtivos e reagrupamentos de turmas voltadas ao avanço das aprendizagens das crianças.

Segundo as autoras, quando temos um ensino apoiado na memorização e recitação de sequência numérica, resta pouca oportunidade para construir uma proposta que valorize os processos próprios das crianças aprenderem e realizarem processos matemáticos apoiados em suas próprias hipóteses. No processo de construção das estruturas numéricas é evidente a presença de conflitos nas hipóteses realizadas pelas crianças acerca do conceito de número, os quais são descobertos por meio das tarefas ofertadas no contexto escolar. Esses conflitos deveriam animar a construção de uma práxis efetiva que valorizasse a inteligência matemática das crianças nos contextos mais amplos, além da sala de aula e das tarefas matemáticas ofertadas, assumindo o pensar, o registrar e o comunicar como primeiras fontes das aprendizagens na alfabetização matemática.

As autoras afirmam que, para a percepção das regularidades do Sistema de Numeração Decimal (SND) ser evidenciada, é necessário que o alfabetizador proponha às crianças quatro grupos de tarefas, a saber: 1) operar; 2) comparar; 3) produzir escritas; e 4) interpretar a escrita. Trata-se de tarefas inseridas em situações de resolução de problemas que exigem o estabelecimento de relações. Assim, o texto aporta importantes contribuições para ressignificar as práticas pedagógicas voltadas à alfabetização matemática no campo numérico. A fim de conhecer os processos de aprendizagens numéricas, o estudo propõe parâmetros para a avaliação das crianças, organizados entre tarefas coletivas e individuais, no que constitui o amplo e complexo sistema de habilidades que levam a uma síntese do que denominamos simplesmente de aprendizagem do número, compreendendo o sistema de numeração decimal, gerando potencialidades para a realização das operações aritméticas.

Ademais, Oliveira e Côrtes apresentam tarefas ofertadas e analisam os níveis de desenvolvimento numérico, refletindo sobre as intervenções propositivas em um diálogo com o grupo de professores envolvidos no estudo, indicando que o planejamento deve abranger desde o ambiente físico até a transformação da sala de aula em ambiente colaborativo e investigativo.

No sexto capítulo, “Momentos de estudo: números, operações e expressões numéricas”, Carvalho, Nascimento e Silva apontam que as avaliações de larga escala mostram importantes lacunas na construção das aprendizagens numéricas no início da escolarização. O texto apresenta análise de resultados da Prova Brasil - Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) nos últimos dez anos, contemplando o período de crise sanitária, com aulas remotas para crianças em processo de alfabetização matemática. Essa lacuna é identificada também via estágios supervisionados do curso superior de licenciatura em Matemática, encontrando alunos dos anos finais com importantes dificuldades acerca da compreensão da estrutura numérica, a saber, do conceito e representação do número e, notadamente, da realização das operações aritméticas. As análises apoiam-se sobretudo nas contribuições do pesquisador francês Chevallard, autor da Teoria Antropológica do Didático (TAD) com a análise de aula sobre Expressões Numéricas enquanto ferramenta matemática, mas não como objeto curricular prescrito, detendo-se sobre a possível existência, na aula, de dois desses momentos de estudo, a saber: o trabalho sobre a técnica de resolução de tarefas, que aborda o tema expressões numéricas; e o trabalho tecnológico-teórico, ou seja, o discurso de justificação das técnicas utilizadas.

Carvalho, Nascimento e Silva ressaltam a importância da indissociabilidade dos momentos didáticos do trabalho sobre a técnica e o tecnológico-teórico. O que preocupa os autores é entender o quanto temos de manipulação de estruturas e regras pelos alunos desprovidos de significado e compreensão aprofundados acerca das propriedades presentes em suas ações, as quais muitas das vezes são mecânicas e dissociadas de aprendizagens significativas. A discussão teórico-prática pedagógica avança, propondo relação das expressões numéricas com a noção de campo conceitual do pesquisador francês Gérard Vergnaud, autor da Teoria dos Campos Conceituais. O estudo foi parte de um projeto guarda-chuva de um grupo de investigação em Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias, em escolas do ensino fundamental, em classes do sexto ano, nas quais se localizavam as expressões numéricas como objetos do conhecimento a serem ensinadas.

Tanto a organização do método de investigação quanto a análise, apoiam-se na TAD de Chevallard. A descrição e análise das atividades realizadas em aula revela a importância dos papeis do professor na condução do processo e dos papeis de protagonismo dos alunos. Revela, ainda, o quanto há de presença do que se intitula como incompletude da atividade matemática institucional no contexto da compreensão do saber matemático.

Os autores concluem o texto apoiando-se em Chevallard, afirmando que é preciso destacar uma lacuna que é base de um fenômeno didático, denominado de incompletude da atividade matemática institucional, referindo-se à solidariedade epistemológica entre os dois momentos de técnica e tecnológico-teórico, como uma exigência didática essencial, pois constatam que muitas vezes o professor assume para si produções que deveriam ser de autoria dos estudantes, o que pode ser interpretado como forte preocupação do professor com os processos de institucionalização do saber, sem, no entanto, deixar as lacunas na produção do saber matemático realizado pelos estudantes, alicerçando a formalização realizada pelo professor.

No último capítulo, "Ações e reflexões sobre o ensino de números inteiros na formação inicial de professores de matemática", Araújo Neto faz uma análise e discussão sobre o papel da Licenciatura em Matemática, inspirado nas resoluções e legislação mais recentes. Inicia o texto apontando alguns dos problemas mais contundentes das propostas atuais com a desarticulação entre os componentes curriculares ditos matemáticos e os de cunho de formação didático-pedagógica; a não integração entre a formação realizada no departamento de Matemática com a da Faculdade de Educação; a desconexão entre a matemática acadêmica e a matemática escolar presentes na formação; as lacunas na formação matemática dos ingressantes e dos egressos da licenciatura; a crença de que a matemática aprendida na escola básica é elementar e conhecida, não precisando ser tratada na formação superior; a concentração de docentes da licenciatura com a formação de pós-graduação em matemática pura e pouca presença de educadores matemáticos; dentre outros.

O intuito do capítulo é apresentar e discutir uma experiência de articulação entre a matemática acadêmica e a matemática escolar, por meio do estudo de Teoria dos Números, um dos componentes ofertados no curso de Licenciatura em Matemática. Para Araújo Neto, em concordância com Lins e Gimenez (1997), algumas razões do valor deste componente curricular apoiam-se nas seguintes argumentações. Em primeiro lugar, é uma área que é familiar aos licenciandos por abordar, de modo axiomático, rigoroso e conceitual, assuntos já estudados ao longo da educação básica, de maneira procedimental e superficial. Em segundo lugar, tal disciplina é um terreno fértil para o aluno ter um primeiro contato com os vários tipos de demonstrações (direta, indireta, redução ao absurdo e por indução) que caracterizam o raciocínio lógico-dedutivo tão importante em Matemática. Em terceiro lugar, ela é uma 'ponte' entre o pensamento aritmético (popularmente conhecido como "fazer contas") e o pensamento algébrico (compreensão dos conceitos e padrões numéricos).

Destaca-se que pesquisas recentes têm apontado a necessária articulação desse componente curricular formativo com as proposições da atual BNCC. O autor apresenta uma experiência realizada no Departamento de Matemática da UnB, em que este componente é ofertado no terceiro semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Entretanto, pelo nível de formalismo matemático, muitos estudantes de licenciatura acabam por perder o estímulo pelo componente. Isto motivou o autor a propor uma estratégia diferenciada, buscando maior articulação do componente com o desenvolvimento de competências próprias do profissional que atuará na Educação Básica, pautando-se nas tendências do campo da Educação Matemática, tais como o uso de: história da matemática como estratégia de ensino e motivação; tecnologias digitais de informação e comunicação; exemplos do dia a dia e curiosidades matemáticas; jogos e matemática recreativa; e, ainda, a aplicação de problemas motivadores.

Dessa maneira, Araújo Neto demonstra que uma articulação maior da matemática acadêmica com a matemática escolar se estabelece potencialmente não apenas pela natureza dos conteúdos matemáticos comuns à Educação Básica e aos componentes curriculares, mas sobretudo pela abordagem pedagógica dos conteúdos matemáticos. Assim, propõe que sejam exploradas, na formação, via Teoria dos Números, as tendências de Educação Matemática, demonstrando para os futuros professores a possível articulação entre os conteúdos matemáticos e as proposições didático-pedagógicas, sempre com o olhar sobre a formação profissional do professor que ensinará matemática na Educação Básica.

Concluindo este prefácio, ressaltamos que a presente obra revela o quanto as aprendizagens matemáticas na escola devem se realizar em um ambiente dito alfabetizador em um sentido amplo, repleto de atividades significativas, desafiantes, motivadoras, apoiado no mundo do letramento matemático, no qual cada sujeito aprendente se percebe apoiado e animado à participação, com protagonismo, na superação de desafios, envolvendo a construção de importantes conceitos referentes ao campo dos Números. Desejamos que esta obra seja uma importante referência para todos os professores, apoiando ações e intervenções na e para a prática, em uma possível exploração de novas possibilidades de favorecer em cada sujeito seu processo de aprendizagem matemática. Cristiano Alberto Muniz Brasília-DF, agosto de 2025..

Cristiano Alberto Muniz

1 - A construção do conceito de número na alfabetização matemática: algumas reflexões e contribuições para as práxis

Cristiano Alberto Muniz
Ana Maria Porto Nascimento
Márcia Rodrigues Leal

Introdução

A aprendizagem sobre números ocorre no dia a dia das crianças, no convívio diário com objetos que usam para brincar, para colecionar, para vestir e nas reflexões e levantamento de hipóteses que realizam no processo, mesmo que inconscientemente. As ações cognitivas de classificar, ordenar, comparar e quantificar são muito comuns desde muito cedo. Essas ações são base para a construção do conceito de número, construção tecida pela criança ao longo de suas experienciações[1] em contextos de quantificações e registros matemáticos. Na escola o processo de ensinar sobre números: o nome do número, a sequência numérica, a relação nome do número e quantidade contada inicia-se na Educação Infantil. Os professores que ensinam matemática nos primeiros anos de escolarização dedicam generosa parte do tempo de aula ao ensino sobre número.

Mas, por que continuar a discussão sobre a aprendizagem e o ensino de números quando muito já foi escrito sobre essa temática? Numa Coleção dedicada às unidades temáticas propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), em que o primeiro livro trata da unidade Números e Operações, justifica-se revisitar os resultados de pesquisa sobre a constituição

[1] Experienciação é um termo adotado por Jerome Bruner referindo -se à aprendizagem por descoberta, na qual o sujeito explora ativamente conceitos, investiga, experimenta e analisa evidências para elaborar seu próprio conhecimento. Essa exploração é impulsionada pela curiosidade e pela incerteza, buscando resolver problemas identificando padrões, em um processo de construir e representar o mundo de forma ativo, icônico e simbólico, contando com o professor como facilitador.

do conceito de número. Além do mais os resultados das avaliações externas continuam a indicar rendimento insatisfatório nas questões que exigem conhecimento sobre números, o que nos coloca em um impasse, pois essa unidade temática é priorizada pelo professor, como apontam diferentes resultados de pesquisa. Carneiro, Araújo e Grando (2023), analisaram diferentes trabalhos publicados na Reunião da ANPED e no ENEM e identificaram estudos sobre conteúdos da estatística, geometria, frações, subtração e multiplicação, destacando que a ênfase desses trabalhos recai sobre a “unidade temática números”.

É possível identificar em nossos estudos uma preocupação em ensinar número para em seguida ensinar operações, sendo que a constituição do conceito de número ocorre junto com a exploração das operações fundamentais, afinal a composição numérica é aditiva, a sequência numérica é operatória, a comparação de número implica esquema de ação operatória. Ao pensar, por exemplo, em como se constitui o número dois, pensa-se em 1+1, da mesma forma, ao pensar no número oito, pode-se pensar em 2+2+2+2 ou em 3+2+2 ou 3+4+1 ou 3+5 ou 4+4 ou 2x4, ou ainda, faltam 2 para ter dez. A sequência numérica dos números naturais é percebida quando se identifica a relação +1 entre um número e seu sucessor, de modo que iniciando pelo número 1, o dois é resultado de 1+1, o três é resultado de 2+1, o quatro é resultado de 3+1 e assim sucessivamente.

Assim, o objetivo deste capítulo é reunir alguns dos estudos sobre o conceito de número e, em seguida, expor implicações metodológicas, a fim de dialogar com o professor que está na sala de aula, em contínuo processo de formação ou o futuro professor que se encontra em processo inicial, a fim de contribuir para a proposição de ações e intervenções que resultem na consolidação das aprendizagens neste campo.

Referencial Teórico

Na história da humanidade, os números surgiram pela necessidade de quantificar objetos e animais para tomada de decisões, possibilitando que os seres humanos resolvessem problemas do seu cotidiano (Giardinetto; Mariani, 2010). Homens e mulheres primitivos desenhavam animais para indicar a quantidade a que se referiam.

Neste contexto, trazendo essas reflexões para a atualidade, sabe-se que “as crianças de um a três anos já trazem conhecimentos numéricos que provêm do meio familiar” (Giardinetto; Mariani, 2010, p. 195), mesmo que intuitivos, não operacionais, fluidos, ainda não sendo conceitos. Para os autores é nessa idade que "os blocos de construção, brinquedos de desmontar, túnel para atravessar, cavalo de pau, carrinhos ou outros brinquedos de puxar e empurrar se constituem em recursos básicos que poderão contribuir para o desenvolvimento das noções matemáticas" (Giardinetto; Mariani, 2010, p. 195). Essas noções são:

> Empurrar carrinhos para frente, para trás, passar por baixo de uma 'ponte', por cima, alinhar todos ao lado de uma caixa, dentro, fora, etc. Também já é possível propor o desenvolvimento de várias brincadeiras que tenham que: correr, trepar, agachar, levantar, e principalmente, sugerir a exploração da contagem numérica (Giardinetto; Mariani, 2010, p. 195).

Destaca-se aqui a exploração da contagem numérica, em que estão presentes relações importantes discutidas por Piaget (1975) e seus seguidores como, por exemplo, Kamii (2003) que em seu livro "A criança e o número", inicia com uma reflexão sobre a natureza do número, retoma a distinção que Piaget estabeleceu entre os três tipos de conhecimento: o físico, que está no objeto, como a cor; o lógico-matemático, que é uma relação que a mente humana realiza em processo relacional, como "este é maior que aquele", uma vez que o "ser maior" não está no objeto, mas numa relação cognitiva realizada pelo sistema nervoso central a partir das captações sensoriais humanas; e o social, associado ao valor social, à funcionalidade, à produção cultural, como "ser uma mesa".

Pode-se entender, nesta abordagem piagetiana, que na construção de número, como, por exemplo, ocorre num contexto de enumeração de uma coleção, o conhecimento social está relacionado à aprendizagem das palavras que servem ao ato de contar: 1(um), 2(dois), 3(três), 4(quatro), 5(cinco). E, por meio do conhecimento físico, a criança percebe as propriedades físicas dos objetos e irá progredir pela coordenação de relações simples entre os objetos para o conhecimento lógico-matemático. É desse tipo de conhecimento que a criança dispõe para criar relações mentais. E "o número é uma relação criada mentalmente por cada indivíduo" (Kamii, 2003, p. 15), assim é um conhecimento lógico-matemático, uma vez que é uma relação entre uma quantidade e sua imagem mental simbólica e resulta de uma síntese de dois tipos de relações que a criança elabora entre os objetos (por abstração reflexiva): a ordem e a inclusão hierárquica.

Percebe-se que enquanto a relação de ordem contribui para que a criança ordene mentalmente os objetos contados, a relação de inclusão hierárquica é base para o entendimento das relações de "está contido" e "contém", que irão apoiar a compreensão de que, por exemplo, dez contém nove, oito, sete, seis, cinco, quatro, três, dois e um. Ao avançar na sequência numérica (representação verbal, escrita e relação nome do número-quantidade contada) essas relações de "está contido" e "contém" devem estar bem construídas na mente da criança. Quando a criança realiza a operação de subtração, com a ideia de retirar, deve estar segura, por exemplo, de que é possível retirar 37 de 54, mesmo que o algarismo da unidade em 54 seja menor que o algarismo da unidade em 37, pois a criança saberá que o todo 54 contém o 37.

Observa-se que estes tipos de conhecimentos físico, lógico-matemático e social se constituem não de forma isolada, mas sim de forma contínua e conectada. E as crianças necessitam da convivência com o outro que as apoiam, instruem, desafiam no seu desenvolvimento social e cognitivo. Neste sentido, recordamos Vygotsky (2000) ao tratar do desenvolvimento sociocultural da inteligência humana. É nos processos de mediação com o outro que a criança avança no seu processo de identificar e nomear quantidades, constituindo o conceito de número e o sentido do número.

Neste ponto, vamos nos ater às reflexões contidas no livro "O sentido do número: reflexões que entrecruzam teoria e prática", organizado por Brocardo, Serrazina e Rocha (2008), que nos convidam a pensar numa direção que evoluiu do conceito de número, discutido por Piaget e seus seguidores, para o sentido do número.

Castro e Rodrigues (2008) apresentam o entendimento de alguns pesquisadores sobre o sentido de número e mostram uma análise histórica do conceito de número, de acordo com Piaget (1975), refletindo sobre a ideia de sentido de número que seria, segundo as autoras, mais coerente com a ideia de literacia matemática, entendida como a capacidade de reconhecer e interpretar, traduzir problemas matemáticos, refletir sobre os métodos aplicados, formular e comunicar resultados (Loureiro, 2002), além de participar de atividades investigativas, desenvolver a autoconfiança e realizar trabalho colaborativo.

E, ainda em Castro e Rodrigues (2008), vimos que a expressão "sentido do número" está associada aos conhecimentos matemáticos, tanto os que se constituem em contextos escolares quanto os que são mobilizados em atividades da vida diária das pessoas. Para as autoras, de modo geral:

> Sentido de número refere-se à compreensão geral dos números e operações e à destreza e predisposição para usar essa

> compreensão de modo flexível. Reflete uma tendência e habilidade para usar os números e os métodos quantitativos como meio de comunicação, processamento e interpretação da informação. É algo pessoalizado e relaciona-se com as ideias sobre os números que desenvolvemos e com o modo como essas se relacionam entre si e com outras (Castro; Rodrigues, 2008, p. 121).

Percebemos que essas pesquisadoras buscam avançar, ampliando a investigação piagetiana, e atentando-se às evidências de que, além do desenvolvimento das noções lógicas de classificação e ordenação, observam-se condutas pré-numéricas na construção do sentido do número e, deste modo, considera-se que a capacidade de contagem é fundamental para o desenvolvimento de conceitos numéricos.

O sentido de número desenvolve-se sustentado nos processos de quantificação e contagem (Castro; Rodrigues, 2008, p. 121), aprendidos informal ou formalmente, revelando-se na verbalização da sequência numérica que pode ser socioculturalmente construída. Fuson (1978), citado por Castro e Rodrigues (2008), afirma que:

> O desenvolvimento dos princípios de contagem é realizado a partir da utilização das palavras numéricas em diferentes e variados contextos de uso, o que conduzirá a mudança e desenvolvimento da compreensão que a criança tem acerca do número. O número não é, portanto, visto como um "tudo ou nada", mas como um conceito que se desenvolve no tempo como resultado directo de experiências de contagem. [...] Trata-se de um desenvolvimento em espiral, realizado, muitas vezes, de um modo não linear, em que a criança constrói, modifica e integra ideias interagindo com o meio envolvente (Castro; Rodrigues, 2008, p. 122).

Entendemos que há convergência de ideias nos estudos sobre essa temática, no sentido de que se deve oportunizar o envolvimento da criança com os contextos em que esta poderá realizar quantificações de objetos, verbalizar a sequência numérica, realizar trocas entre seus pares acerca das diferentes percepções numéricas. Essas ações são fundamentais na constituição do conceito e no desenvolvimento do sentido de número.

Em Muniz (2020), encontramos a ideia de conceito como termo central na reflexão sobre aprendizagem, reafirmando o conceito como uma construção mental própria de cada sujeito, realizada nas suas experiências significativas em seu contexto sociocultural. Decorre daí a indicação da escola se constituir como um espaço sociocultural que ofereça situações significativas à construção de conceitos.

Essas discussões apontam alguns pressupostos teóricos que podem indicar orientações ao trabalho em sala de aula. Neste sentido, destacamos as contribuições deste pesquisador e formador de professores que, em seus resultados de pesquisa e ações de formação, considera que a construção do conhecimento matemático exercido pela criança realiza-se a partir da relação com os elementos de seu contexto cultural (Muniz, 2004).

De acordo com o autor, tal afirmação não pode nos levar a ter uma visão equivocada em torno dos elementos que constituem esse conhecimento, pois:

> Se é através das relações entre os objetos que a criança constrói, por exemplo, a noção de número (um objeto fundamental do conhecimento matemático), não podemos conceber a ideia de que o conceito de número esteja fundado no objeto. Os seres matemáticos, que em sua gênese têm a observação externa como fonte, são produtos da mente humana, frutos de uma abstração das relações observadas entre os elementos de seu contexto cultural. Se o indivíduo observa a mesa, a parede, a capa do livro, as molduras dos quadros, para conceber a ideia de retângulo, o retângulo, como objeto matemático, está na mente do sujeito e nunca no tampo da mesa. Este objeto é construído pela mente, possibilitando ao sujeito mudar suas relações com os elementos de sua cultura, transformando-os em proveito de si próprio, do seu grupo e dos seus descendentes (Muniz, 2004, p. 17).

Logo, os objetos e os seres pertencem ao mundo concreto, no qual estão inseridos, assim como os números fazem parte da mente humana, enquanto conhecimento lógico-matemático relacional e reflexivo. Sem estabelecer relações, sem reflexão não há como termos, na criança, a construção conceitual de número. Assim, é papel da escola e do alfabetizador favorecer a quantificação, as contagens, as relações entre as quantidades e as representações simbólicas e a reflexão individual e coletiva sobre tais produções construídas em situações significativas.

Nesse sentido, Bertoni (2007) afirma que é possível perceber que a criança constrói seu conhecimento do número devido às forças da vivência no contexto físico-social. Para a autora, a criança "aprende a dizer quantos anos tem, a recitar a sequência numérica, a identificar pequenas quantidades de figuras ou lápis, a conhecer preços e a falar sobre quantidades muito maiores: cem, mil, milhão, trilhão, entre outras" (Bertoni, 2007, p. 12). Esse conhecimento se dá, inicialmente, de maneira globalizada e superficial, com diversas lacunas de compreensão, uma vez que a criança pode saber recitar uma sequência de nomes dos números, mas não necessariamente saber contar do modo correto:

> Vai falando os números e apontando para as coisas a serem contadas com pressa, de modo indiscriminado, atrapalhando a correspondência entre cada número que diz e os objetos que aponta. Também tem dificuldades na comparação. Pode não saber, por exemplo, quem é o maior: 7 ou 9; o quanto o 100 é maior que o 90; quantos 1.000 há no milhão, e assim por diante (Bertoni, 2007, p. 12).

O papel da escola nesse contexto é fundamental, pois cabe a ela dar significado às falas quantitativas das crianças. De acordo com Bertoni (2007), no contexto da sala de aula nos anos iniciais, deve-se promover situações em que seja possível, por exemplo, identificar as quantidades, contar de 10 em 10, de 100 em 100, reconhecer os números intermediários, as regularidades da escrita numérica etc.

No processo de enumeração e contagem, percebe-se que o conhecimento da cadeia numérica verbal é fundamental, de acordo com Bertoni (2007), essa atividade é aparentemente simples, mas exige compreensão e coordenação de variadas competências, necessárias para a construção da habilidade de contagem de quantidade discreta pela criança no processo de construção do número, a saber:

- A utilização ordenada dos nomes da cadeia numérica;
- A correspondência única;
- A organização da ordem de contagem;
- O princípio cardinal.

Quanto à utilização ordenada dos nomes da cadeia numérica, reconhece-se que as palavras devem ser sempre pronunciadas numa ordem permanente. Segundo Bertoni (2007, p. 15), "num jogo de boliche, uma criança derruba cinco peças. Um coleguinha diz: Você derrubou bastante: 4, 5, 9, 6, 7. Cabe ao professor intervir: Vamos contar novamente, em ordem: 1, 2, 3, 4 e 5. Você derrubou 5, é bastante".

Quanto à correspondência única, ela é a capacidade para cada objeto dar uma nomeação, sem saltar e sem repetir nenhum objeto, e sem esquecer. Por exemplo:

> Cada objeto deve estar pareado a uma palavra, e a uma só, da cadeia numérica. Crianças pequenas têm dificuldade para identificar a quantidade de bolinhas num dado, fazendo corretamente a correspondência entre a contagem e as bolinhas. Se aparecem três bolinhas no dado, ela pode contar 1, 2, omitindo uma; ou pode contar 1, 2, 3, 4, atribuindo duas palavras a uma mesma bolinha (Bertoni, 2007, p. 15).

Quanto à organização da ordem de contagem - capacidade de verbalizar a sequência numérica (o que depende do contexto sociolinguístico) sobretudo na ordem crescente, lembrando que o primeiro é o UM, depois seguindo sempre +1. Nas diferentes línguas há mais facilidade ou maior dificuldade nessa capacidade, assim como as experiências familiares contribuem fortemente para o seu desenvolvimento. Por exemplo, no chinês tal estrutura linguístico-matemática é mais simples que no francês, no qual, para se referir a 97, diz-se quatro de vinte, dez e sete.

E quanto ao princípio cardinal - ao longo do processo, ser capaz de ir computando os elementos já contabilizados e/ou ainda não contabilizados. Esta capacidade depende de uma diversidade de fatores e dos elementos a serem quantificados:

- *Semelhança e diferença entre os elementos*: uma coleção de objetos idênticos é mais difícil para a mentalização do zoneamento do que para coleção com objetos diferentes entre si;
- *Quantidade de elementos*: quanto maior a quantidade de elementos, mais complexo é o esquema mental para quantificação. O mais simples são as coleções com quantidades perceptivas [até 5, segundo Jean Piaget (1975)];
- *Posicionamento dos elementos*: quando alinhados apoiados numa linha reta é mais fácil definir um esquema eficiente do que quando estão dispostos na forma circular ou espalhados de forma aleatória sem forma definida, exigindo do sujeito epistêmico uma organização mental que permita "não se perder na contagem";
- *Próximo ou longe*: tocar, pegar, riscar objeto a objeto ao longo da contagem define fortemente a dificuldade ou maior facilidade no processo de contagem. O toque do objeto contribui com a contabilidade pois há registro no sistema nervoso central, enquanto os objetos fisicamente longes, sem possibilidade de toque, requerem maior esforço físico na quantificação, fazendo com que a criança

aponte de longe um a um, até mesmo fechando um olho durante o processo de quantificação;

- *Fixo ou não*: poder movimentar os objetos ao longo da quantificação, diferenciando, assim, em dois grupos, os contados e os a contar, favorece o processo de quantificação, evitando contar duas vezes o mesmo ou pulando algum elemento da coleção. Entretanto, se ao longo da contagem a criança não pode movimentar os objetos a serem quantificados, ou porque são fixos (como desenho numa folha ou fisicamente distante e inatingível), isso constitui uma situação de contagem mais complexa, requerendo maior controle visomotor, e, portanto, favorecendo e requerendo estruturas mentais mais complexas;
- *Estáticos ou objetos móveis*: se há movimentos e deslocamento dos objetos da coleção ao longo da quantificação, isto torna a atividade cognitiva bem complexa, uma vez que a configuração espacial da posição dos objetos em contagem altera, como a contagem de peixinhos no aquário e de crianças correndo ao longo da recreação. Sem dúvida, quando estão parados e em fila, o contexto seria mais simples, seja ele formado de crianças ou peixinhos.

Quanto à escrita, segundo Bertoni (2007), a criança pode compreender as relações envolvidas no conceito de número sem ainda ter a capacidade de escrevê-los. E, para Muniz (2020, p. 67), a escrita "possui uma psicogênese no desenvolvimento da noção do número, enquanto sistema complexo envolvendo agrupamento e posicionamento, e essa aprendizagem mantém estreita relação com o desenvolvimento intelectual global da criança".

Nesse entendimento, ao refletirmos sobre a afirmação de Bertoni (2007), percebemos que este pensamento se alinha às teorias construtivistas, como as de Piaget, que nos mostram que a compreensão de conceitos matemáticos, como número, quantidade, ordem e correspondência, se dá antes mesmo da aquisição da linguagem escrita ou simbólica formal. A criança pode entender que três brinquedos são mais que dois, ela consegue agrupar, comparar e até operar mentalmente com quantidades, mesmo sem saber escrever o "3" ou realizar uma operação matemática no papel.

Bertoni (2007) reforça a ideia de que o aprendizado matemático na infância não deve se limitar à memorização de números e símbolos, mas é importante envolver a criança em experiências concretas, lúdicas e significativas. Visto que através da manipulação de objetos, jogos, músicas e situações do cotidiano, a criança desenvolve o conceito de número na forma mais natural e profunda. A autora também reafirma a valorização do entendimento conceitual antes da formalização (Bertoni, 2007).

Por sua vez, Muniz (2020) ao sustenta que a escrita possui uma psicogênese, indicando que o processo de aprendizagem da escrita numérica não é imediato, nem mecânico, mas que se desenvolve progressivamente, atravessando etapas cognitivas que envolvem muita compreensão, experimentação e reorganização mental, assim como ocorre com o processo da aquisição da linguagem escrita. A criança não aprende os números apenas como símbolos arbitrários, mas como representações de quantidades, relações e estruturas.

A escrita numérica, para este pesquisador é vista como um sistema complexo, pois envolve dois aspectos fundamentais, o agrupamento e o posicionamento (Muniz, 2020). O agrupamento se relaciona com o entendimento das bases do sistema numérico, como o sistema decimal, onde agrupamos unidades em dezenas, centenas, etc.; O posicionamento diz respeito ao valor posicional dos números, como por exemplo, o 2 em "20" tem um valor diferente do 2 em "2".

Muniz (2020) enfatiza também que a aprendizagem está familiarmente ligada ao desenvolvimento intelectual global da criança. Isso quer dizer, que o progresso na compreensão dos números não é isolado, ele está conectado a outras dimensões do desenvolvimento cognitivo da criança - como a linguagem, a memória, a capacidade de abstração, o raciocínio lógico e a organização do pensamento.

Reforça-se a ideia de que ensinar matemática na infância deve ir além da simples memorização de números e fórmulas. É essencial oferecer experiências ricas e significativas que permitam à criança construir, compreender e aplicar a noção de número de forma integrada ao seu desenvolvimento geral. Assim, o desenvolvimento da competência em quantificação pela criança a partir da contagem requer que a escola favoreça situações variadas e significativas, nestas diferentes perspectivas. Sem dúvida há de ter na oferta pedagógica das situações de contagem uma gradação dos níveis de dificuldade respeitadas as indicações acima. Diante do exposto, o tópico seguinte apresenta algumas implicações metodológicas para a *práxis* docente.

Implicações metodológicas: algumas reflexões e contribuições para as práxis

A escola deve constituir um currículo a partir do qual a construção do conhecimento matemático esteja ancorado no contexto da necessidade real e ontológica da resolução de situações-problema que encontramos na nossa vida.

A identificação de códigos matemáticos no meio cultural, como no trânsito, no rádio e na TV, nos instrumentos de medidas, nas cédulas e moedas, nos meios de comunicação, nos contextos do mundo das profissões, sempre explorando seus diferentes significados, ajuda fortemente na construção de ideias matemáticas. Para tanto, não devemos desperdiçar as oportunidades da identificação da presença da matemática no nosso dia a dia.

A alfabetização matemática no contexto escolar deve, portanto, compreender dois grandes campos de atividades matemáticas, as “não numéricas” e as “numéricas”. Podendo explicitar e exemplificar o que cabe em cada uma delas:

1. **Atividades não numéricas**: na visão piagetiana elas não são, necessariamente, “operatórias”. São atividades que, não envolvendo a noção de número, ainda são atividades matemáticas a serem trabalhadas na educação infantil, sendo que elas têm grande importância no processo de alfabetização matemática de nossas crianças. Alguns exemplos:

- Identificação de quantidades perceptivas;
- Noções de topologia (é mais conceitual que operatória e possui independência em relação ao número);
- Comparações perceptivas de quantidades contínuas: conceitos espaciais, temporais, espaço-temporais;
- Conhecimento físico de objetos e fenômenos;
- Recitação oral da sequência numérica: quando não atrelada à quantificação;
- Ler ou escrever os algarismos sem relação necessária com a quantidade que eles representam: placas de automóveis, números de telefone, jogar amarelinha, etc.;
- A presença dos algarismos na atividade não é suficiente para garantir que certa atividade seja numérica.

2. **Atividades numéricas**: são sempre e necessariamente operatórias. Para uma atividade ser numérica não é imprescindível a presença de algarismos. A

atividade numérica envolve sempre a noção de quantidade ou quantia, mesmo quando a quantidade ou quantia não estiver fisicamente presente. Quando a atividade envolve algarismos, esses símbolos têm essencialmente um significado numérico. Na atividade numérica, tratar com algarismos significa tratar com quantidades/quantias.

Nas atividades com quantidades discretas, tratar-se-á de atividade numérica se a quantidade não for perceptiva. Mesmo uma quantidade não perceptiva pode perder seu sentido operatório, e, portanto, não ser numérica, se a quantidade discreta for arranjada fisicamente de forma a se constituir uma *constelação*, o que permite à criança a identificação da quantidade pela simples leitura perceptiva da distribuição geométrica dos objetos. Tal fato ocorre quando a criança já tem um conhecimento prévio da *constelação*, como acontece, por exemplo, com o 6 no dado tradicional ou no dominó. A criança só realiza a contagem dos pontos sobre o dado (e, portanto, sendo uma atividade operatória e numérica) quando ela ainda não está familiarizada com esse objeto cultural. Temos como exemplos de atividades numéricas:

- Contar coleções ou eventos (não perceptivos e que não constituam uma constelação);
- Comparar coleções;
- Medir e comparar quantidades contínuas;
- Resolver situações-problema envolvendo quantidades, com ou sem algarismos;
- Registrar ou representar gráfica ou verbalmente quantidades;
- Repartir, juntar e comparar quantidades;
- Realizar trocas envolvendo valores;
- Registrar e comparar pontuações.

Na proposição destas atividades, é importante a noção de resolução de situação-problema. Visto que um problema, por exemplo, é uma situação em que se almeja alcançar um objetivo, mas não se conhece, de imediato, o caminho e/ou a solução. É algo que demanda raciocínio, tomada de decisões e, muitas vezes, de um planejamento estratégico para resolver. Em aulas de matemática, no contexto educativo, um problema deve envolver um enunciado compreensível, um desafio cognitivo (a resposta não deve ser óbvia) e a exigência de mobilizar conhecimentos prévios.

Neste cenário, uma situação-problema deve ir além do conceito tradicional de problema. Refere-se a uma situação contextualizada, ligada ao cotidiano ou a uma situação realista, que cria uma necessidade de aprendizagem. Uma situação-problema é utilizada como estratégia pedagógica para provocar a curiosidade, o questionamento e a construção de novos saberes. Podendo ter as seguintes características: a) Não apresenta, de imediato, uma solução pronta; b) Estimula a investigação, a reflexão e a argumentação; c) Envolve um conflito cognitivo que leva a criança a pensar criticamente; e, d) Pode introduzir um novo conteúdo ou consolidar/aprofundar conhecimentos já trabalhados.

O diferencial entre ambas, é que o problema pode ser resolvido com os conhecimentos que a criança já possui e a situação-problema a desafia a construir novos conhecimentos, pois, os que ela possui ainda são insuficientes para se chegar à solução facilmente. Como por exemplo:

- No problema - *"José tem 15 biscoitos e quer dividir igualmente entre 3 amigos. Quantos biscoitos cada um receberá*?" - A criança pode usar materiais manipulativos ou recorrer ao algoritmo da divisão.
- Na **s**ituação-problema - "*Maria precisa dividir 24 bombons entre seus amigos, mas ela ainda não sabe como fazer isso. Então, começa a testar diferentes formas de agrupamento. Como ela pode garantir que todos recebam a mesma quantidade de bombons*?" - Essa situação apresenta um contexto próximo ao real e um desafio, oportunizando a mobilização do conceito de divisão

Percebemos que a situação-problema é uma ferramenta pedagógica poderosa, pois promove a aprendizagem ativa e significativa. Ela permite que a criança construa conhecimento a partir de desafios concretos, contribuindo não apenas para o domínio de conteúdos, mas para o desenvolvimento do pensamento crítico, com autonomia e capacidade para resolver problemas reais.

Assim, ao lidar com problemas e situações-problema em sala de aula, o professor alfabetizador tem papel fundamental na mediação da aprendizagem. Neste contexto, adotamos o termo professor alfabetizador como o profissional responsável pelo desenvolvimento de ações e intervenções nas classes de Educação Infantil e Anos Iniciais do Ensino Fundamental a fim de proporcionar aos estudantes desses segmentos a aproximação com as noções fundamentais da área de Matemática.

Não basta apenas propor uma tarefa, é preciso ofertar um ambiente favorável à criança, que promova à descoberta, à reflexão e à construção do conhecimento. Esse professor deve ainda levar em conta que:

- Uma situação-problema pode não envolver números, como, por exemplo, elaborar estratégia de ação para pegar uma caixa que se encontra no alto de um armário;
- A solução do problema não é sempre um valor numérico, mas, sobretudo, o conjunto de estratégias de ação utilizadas para chegar a uma solução;
- Um problema pode ter um enunciado não escrito, podendo e devendo ser verbalizado e dramatizado;
- Toda resolução é sempre precedida de uma interpretação por parte da criança, interpretação essa que deve ser objeto de discussão no grupo;
- No processo de solução, o professor deve oferecer a maior multiplicidade possível de ferramentas para a criança, cabendo a ela a escolha de quais ferramentas quer mobilizar no processo;
- O processo de resolução deve ser um ato solidário, com situações compartilhadas por um grupo de crianças, em que as trocas são fundamentais no processo da aprendizagem;
- O enunciado de cada situação-problema deve ser composto por múltiplas questões, e não apenas uma única questão. Essa multiplicidade de questões permite uma ajuda no processo de interpretação da situação, contribuindo para o disparo inicial no processo de "pensar sobre o problema";
- A multiplicidade de respostas é uma realidade dentro da atividade matemática, e o professor deve buscar, no grupo de crianças, favorecer a troca das várias respostas encontradas, lembrando que resposta é o processo, a estratégia de resolução, e não apenas a solução numérica (mesmo porque, como já falamos, muitos problemas não envolvem números);
- Além da ação, é importante o registro do processo utilizado pela criança. O professor deve valorizar os mais diferentes tipos de registro dos processos de resolução: material concreto, registros pictóricos, relatos, dramatização etc.;
- O professor não deve se ausentar ao longo do processo de resolução, mas deve se colocar como um mediador, questionando, provocando, ajudando, confrontando etc.

Neste contexto, Muniz (2020) reforça a ideia central de que número é um conceito a ser construído pela criança a partir de suas oportunidades de experimentação de situações de quantificação, registros numéricos, vivências de contagens, ordenações numéricas, destacando que na alfabetização é vital que os professores considerem, nas suas intervenções pedagógicas, alguns aspectos importantes, tais como:

- **Número como produção cultural**: resgatar o conhecimento social que as crianças trazem da vivência com os números na vida cotidiana, tais como nos jogos e brincadeiras, nos meios de comunicação, no comércio, em placas, sinalizações e em códigos. Se tais vivências estão fortemente presentes fora do espaço escolar, devemos nos questionar sobre a importância de trazer tais situações para dentro da escola e fazer com que o professor se utilize dessas realidades para mediar o significado dos símbolos numéricos, sejam eles representantes de quantidades ou quantias.
- **Número como construção da criança** a partir de relações entre quantidades e símbolos: considerar que a participação da escola na construção do número pela criança deve ser proporcional à oferta de situações oferecidas à criança para que ela estabeleça relações entre quantidades e símbolos numéricos. Se entendermos que o número é uma construção mental, devemos nos preocupar com a oferta de situações que permitam à criança estabelecer relações entre símbolos e quantidades, assim como de quantidades com símbolos e, em especial, favorecer a comparação de quantidades numéricas. Como por exemplo:

  1. *Diferenciando o número como código e o número como representação de uma quantidade*. Fazer com que a criança saiba diferenciar quando um número está representando uma quantidade/quantia, como um preço, ou quando se trata exclusivamente de um código numérico, como o número de telefone.

  2. *Trabalhando com quantidades e com quantias/valores*. Inicialmente deve haver, por parte da escola, uma preocupação com situações envolvendo quantidades, em que a situação numérica é pautada pela correspondência biunívoca um a um. A contagem de objetos, de eventos, de seres, em que o resultado da quantificação corresponda exatamente à coleção explorada. Nesse momento, materiais de ensino como palitos, dedos, canudos e material dourado devem ser valorizados. Somente num segundo momento deve-se explorar situações com valores, nas quais as relações de quantidade são mais complexas, o « um » não vale mais um, mas representa um grupo.

Assim ocorre quando da contagem por agrupamento, nas medidas, nas moedas e cédulas etc. Nessa ocasião, podemos e devemos explorar materiais tais como dinheiro chinês (em que o valor depende da cor, como no jogo de pega-varetas), ábacos, sistema monetário, quadro valor de lugar.

- **O número natural**, com sua sequência numérica, recitação, escrita e algarismos: conceber uma das primeiras aprendizagens infantis sobre o número diz respeito à recitação da sequência numérica, quando a criança aprende, mesmo antes dos 2 anos de idade, a recitar a contagem oral. Esta habilidade fará parte da futura capacidade de quantificar objetos ou eventos. Mesmo não sendo uma atividade operatória (pois, segundo Piaget, não garante a existência da conservação e, portanto, o pensamento reversível na recitação oral), essa capacidade contribuirá de forma significativa na quantificação numérica.

Não há como divorciar a construção de número pela criança da experiência de quantificação, tanto discreta quanto contínua, o que nos aporta a necessária e desejável habilidade da contagem, enquanto estrutura cognitiva complexa e construtiva, em atividade reflexiva. Assim, o processo de contagem tem papel central no processo de construção do número pela criança, contagem não vista apenas como recitação (que está aportada sobre processos sociolinguísticos), mas como uma síntese cognitiva produzida processual e organicamente, que associa processos de verbalização, psicomotor, visual e representacional, como já enunciado anteriormente nas contribuições de Bertoni (2007).

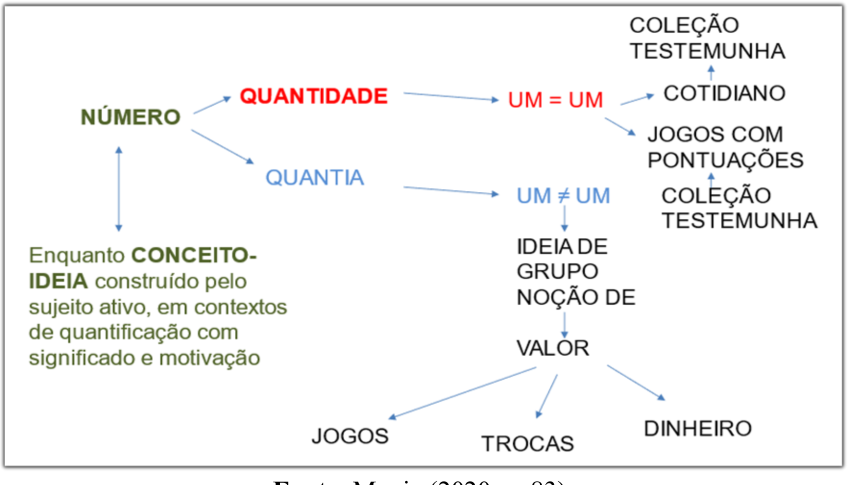
No meio educativo existe uma representação de que contar é recitar, mas algumas pesquisas ampliam tal conceito e revelam a complexidade do fenômeno intelectual realizado, uma vez que se a recitação é elemento integrante da contagem, ela por si não é suficiente para o êxito da realização da contagem, enquanto síntese da atividade viso-motora-verbal.

Nesse contexto, quantificar uma coleção discreta, por meio do processo da contagem, requer que o sujeito epistêmico seja capaz de identificar os objetos de contagem de forma orgânica e sincronizada, um a um, ou grupo a grupo (com quantidades perceptivas); identificar o que aparentemente é igual (palitos - todos iguais e de mesma cor); definir uma unidade de contagem (palito), e no diferente, ver o igual de forma a quantificar igualmente o que parece ser diferente (contar brinquedos, não havendo brinquedos iguais, mas todos objetos classificados como brinquedo, categoria que define a unidade de contagem).

Se é fundamental, nos processos cognitivos, a construção, pela criança, de estratégias de quantificação, a noção de quantia, mais complexa que o conceito de quantidade, faz-se igualmente importante, sobretudo ao considerarmos o avanço para a aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal. Isto é importante uma vez que o conceito de ordem requer da criança a compreensão da ideia de valores, como uma dezena vale 10 unidades, da mesma maneira que uma centena vale 100 unidades, uma vez que cada centena vale dez dezenas.

A noção de agrupamento decimal requer que a criança esteja, ao menos em processo, construindo a noção de quantia, onde, na contagem, a quantificação não é unitária igual a um, uma vez que a quantia envolve a noção de valor, de agrupamento, que implica o desenvolvimento do pensamento mais abstrato daquele requerido na quantificação, pois o um não é mais um (base da contagem), uma vez que um representa um valor socialmente estabelecido, como esquematizado na Figura 1 abaixo:

Figura 1. Numerizando na alfabetização: da quantidade à quantia-valor



Fonte: Muniz (2020, p. 83).

Junto com a construção do conceito de quantia/valor, assume papel preponderante no processo da alfabetização matemática a ideia de Coleção Testemunha, enquanto uma quantidade representa outra, permitindo a quantificação de uma coleção, mesmo que esta esteja ausente. Exemplo? No jogo de boliche, a cada garrafa derrubada, pegamos uma tampinha. Ao final do jogo, contando as tampinhas, podemos saber o total de garrafas derrubadas ao longo do jogo. Outro exemplo mais elementar? A criança mostra 6 dedos para mostrar sua idade, sendo cada dedo um ano de vida.

Para além da quantificação de coleções por meio da contagem, a construção da Estrutura do Sistema de Numeração Decimal (SND), com apropriação de suas propriedades, é parte essencial do processo de alfabetização matemática na educação básica. Muniz (2009, 2014, 2020), em suas pesquisas, defende que essa construção seja a partir de jogos matemáticos estruturados com regras que são na verdade as propriedades do SND, que indicamos a seguir:

- *O agrupamento como um ato natural da mente humana na quantificação de coleções*:

  1. Resgatar junto às crianças o ato espontâneo de agrupamento que ocorre quando se busca quantificar uma coleção que possui um número não perceptível ou cujo arranjo não se constitua em constelação (quando a disposição dos objetos no espaço revela instantaneamente a quantidade, como ocorre com o 6 no dado ou no dominó);

  2. Realizar jogos que buscam agrupar palitos, canudos, fichas, onde o agrupamento para quantificações é regra central da atividade lúdica.

- *O agrupamento decimal como fruto da ação sobre o corpo:*

  1. Valorizar a iniciativa da criança em contar nos dedos;

  2. Buscar socializar estratégias espontâneas de contagens e cálculos com a utilização dos dedos;

  3. Mostrar que o nosso sistema de numeração é decimal, pois na história da civilização o homem utilizou os dedos como *coleção testemunh*a, e portanto, nosso sistema é decimal porque o homem tem dez dedos nas mãos.

- *A questão do valor posicional:*

  1. A partir do agrupamento decimal, realizar atividades que levem as crianças, a contar de 6 anos, a descobrirem o valor posicional como estratégia decorrente da organização espacial do agrupamento.

  2. Observar que o valor deve depender, não da cor, tamanho ou código diferenciado, mas sim exclusivamente da posição. Pela posição que o algarismo assume, sabemos qual o seu valor dentro do sistema decimal.

- *O registro de quantidades no SND:*

  1. Lembremos que existem 10 algarismos (do zero ao nove) porque nosso sistema é decimal;

2. Enquanto a quantificação não for realizada com agrupamento decimal (agrupando de dez em dez) não se deve utilizar os algarismos no registro das quantidades.

É natural que antes de saber escrever os algarismos e números haja o reconhecimento deles. O professor alfabetizador deve oportunizar situações em que, por exemplo, ao recobrir com o dedo ou representar com o corpo o traçado de cada número as crianças irão desenvolver essa capacidade. É importante que os algarismos estejam presentes no espaço da sala de aula. Na escrita, o espelhamento é natural até os 7/8 anos de idade, fazendo parte da construção da gênese da escrita dos algarismos pela criança.

Ressaltamos que cada criança é uma criança e, numa sala de aula, teremos sempre crianças que estão no nível das quantidades como aquelas que estão no nível das quantias. Em nossa sala de aula, devemos oferecer uma multiplicidade de situações, tendo o professor o cuidado de observar a capacidade de cada criança.

Considerações

Reunimos neste capítulo algumas contribuições teóricas e metodológicas referentes à construção do conceito de número na Alfabetização Matemática. Vimos que no cotidiano das crianças, mediante seu envolvimento com diferentes situações, em que realizam ações de comparações, classificações, ordenações e quantificações, elas vivenciam atividades que estão na base do processo de conceitualização matemática.

Faz-se necessário considerar o número como construção cultural, entendendo que se no seu convívio social as vivências com números estão presentes, devem estar inseridas dentro da escola, constituindo o conhecimento matemático ancorado nas necessidades reais e nas ações reflexivas das crianças.

E, ainda, ao considerar o número como construção da criança, deve-se partir de relações entre quantidades e símbolos (e vice-versa) e comparação de quantidades numéricas, pois ao entendermos que o número é uma construção mental do sujeito ativo e reflexivo, devemos planejar nossas ações e intervenções de modo a promover situações que possibilitem à criança estabelecer essas relações, inclusive no que se refere à leitura e escrita de números.

No trabalho do professor alfabetizador, além das situações de identificação de quantidades, faz-se necessário promover a construção da estrutura do Sistema de Numeração Decimal (SND), com compreensão de suas propriedades, preferencialmente que seja a partir de jogos matemáticos estruturados com regras que se assemelham às propriedades do SND.

E ainda pode-se pensar em desenvolver e explorar o sentido de número, que é sustentado nos processos de quantificação e contagem, construídos socioculturalmente. O sentido do número refere-se à compreensão geral dos números e operações e à flexibilidade de mobilizar esses conceitos em atividades da vida diária das pessoas, como forma de comunicar, processar e interpretar informações.

Em síntese, o espaço da escola deve propiciar uma multiplicidade de situações que explorem, desde a Educação Infantil, atividades não numéricas e atividades numéricas. E ressaltamos que a ação intencional do professor alfabetizador deve priorizar a proposição de situações-problema, de modo que a criança possa mobilizar conceitos na busca de solucionar esses problemas. Neste cenário, esse professor assume o papel de mediador, adotando uma postura que seja provocadora e ao mesmo tempo acolhedora.

Referências

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Educação e linguagem matemática II**: Numerização. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

BROCARDO, Joana; SERRAZINA, Lurdes; ROCHA, Isabel. **O sentido de número: reflexões que entrecruzam teoria e prática**. Lisboa: Editora Escolar, 2008.

CARNEIRO, Reginaldo Fernando; ARAÚJO; Elaine Sampaio; GRANDO; Regina Célia. A matemática específica dos professores que ensinam na educação infantil e nos anos iniciais do ensino fundamental em trabalhos que envolvem a formação inicial e continuada de professores. In: NACARATO, Adair Mendes; *et al* (Orgs). **A matemática na formação do professor da educação infantil e anos iniciais:** uma análise a partir de trabalhos publicados em eventos do campo da educação matemática. São Paulo: Pimenta Cultural, 2023.

CASTRO, Joana Pacheco de; RODRIGUES, Marina. O sentido de número no início da aprendizagem. In: BROCARDO, Joana; SERRAZINA, Lurdes; ROCHA, Isabel. **O sentido de número: reflexões que entrecruzam teoria e prática.** Lisboa: Editora Escolar, 2008.

GIARDINETTO, José Roberto Boettger; MARIANI, Janeti Marmontel. **O lúdico no ensino da matemática na perspectiva vigotskiana do desenvolvimento infantil**. In: ARCE, Alessandra; MARTINS, Lígia Márcia (Org.). *Quem tem medo de ensinar na educação infantil?* Em defesa do ato de ensinar. 2. ed. Campinas: Alínea, 2010. p. 185-218.

KAMII, Constance. **A criança e o númer**o. Campinas: Papirus, 1990.

LOUREIRO, Cristina. **Literacia matemática**. Revista dos Professores de Matemática, n. 69, 2002, p. 33. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/issue/view/71. Acesso em 12 set. 2024.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Módulo 1 - Pedagogia: Educação e Linguagem Matemática.** PEDeaD, 2004. Disponível em: http://sbembrasil.org.br/sbembrasil. Acesso em: 12 set. 2024.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Matematização na infância**: indicadores para a alfabetização. Rede Pedagógica. EaD. Brasília, 2020.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Diversidade dos conceitos das operações e suas implicações nas resoluções de classes de situações**. In: GUIMARÃES, Gilda; BORBA, Rute. *Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização*. Biblioteca do Educador Matemático, Coleção SBEM, volume 6. Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009a. 138p.

MUNIZ, Cristiano Alberto. Papéis do brincar e do jogar na Alfabetização Matemática. In: BRASIL**. Secretaria de Educação Básica. Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa.** Ministério da Educação, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. **A gênese do número na criança**. Zahar Editora. 2. ed. 1975.

VYGOTSKY, Lev Semionovitch. **Pensamento e Linguagem.** São Paulo, Ed. Martins Fontes, 2000.

2 - Aprender e ensinar Matemática na perspectiva de sentido de número numa abordagem do ensino exploratório

Cília Cardoso Rodrigues da Silva
Maria de Lurdes Serrazina
Regina da Silva Pina Neves

Introdução

Iniciamos o capítulo com as seguintes questões: (i) onde estão os números? (ii) que funções desempenham? (iii) em que contextos são usados? (iv) que sentido são dados aos números? (v) que sentido são dados aos números nas relações com as operações? (vi) que sentido são dados às operações nas relações com os números? Essas questões nos ajudarão a refletir a respeito de ações e intervenções no aprender e ensinar números em uma perspectiva do sentido de número para os anos iniciais do ensino fundamental em uma abordagem exploratória.

Ao longo do texto apresentamos uma breve revisão de literatura no que diz respeito ao sentido de número, ao raciocínio matemático, às tarefas e ao Ensino Exploratório, ressalta-se que no Brasil sentido de número é muitas vezes utilizado como "senso numérico". Sugerimos o Ensino Exploratório como uma abordagem didática que propõe modos específicos de organizar o trabalho tanto do professor quanto do estudante. Mostraremos exemplos de tarefas matemáticas, procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo que envolvem operações com números naturais a partir das resoluções de estudantes que aprendem matemática. As tarefas selecionadas fazem parte de estudos já realizados em Portugal, proposta no "Projeto Reason" e no Brasil discutida na tese de doutoramento intitulada "Manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem multiplicação e divisão numa perspectiva do sentido de número", onde a revisão de literatura foi realizada em Portugal e os dados empíricos construídos no Brasil.

Nossa intenção é refletir acerca de ações e intervenções que possam acontecer na aula de matemática quando se trabalham os números na perspectiva do sentido de número com uma abordagem exploratória, a fim de contribuir para a formação inicial, continuada e em serviço de quem aprende e ensina matemática. Por fim, nossa expectativa é que os aspectos refletidos neste capítulo possam ter repercussões nas diversas e variadas salas de aulas, sejam em espaços escolares, acadêmicos dentre outros.

Referencial Teórico

Uma criança quando chega à escola raramente perguntará o que é o número, todavia, desde sua gestação começa a conviver e experienciar várias situações que envolvem números.

Os números representações de quantidades estão em toda parte. Podem ser usados em diversos contextos, desempenhando diferentes funções, como: (i) contagem oral como uma mera enumeração dos termos; (ii) contagem de objetos com alguma intenção; (iii) cardinalidade em que os termos numéricos se referem à numerosidade; (iv) medida em situações relativas a uma dimensão contínua; (v) ordinal em que os termos se referem a uma posição; (vi) identificação em que os termos da sequência numérica são utilizados para diferenciar ou identificar elementos particulares ou ainda como códigos não numéricos (Fuson, 1988). Quando imersas nesses variados contextos as crianças encontram possibilidades em desenvolver suas capacidades de contagem, de operar, de medir, comparar, quantificar, conservar entre outras etc.

A partir da década de 70, investigadores em Educação Matemática começam a incluir na literatura a expressão "sentido de número" (Arcavi, 1994; Baroody, Coslick, 1998; Carpenter, 1976; Howden, 1989; Marshall, 1989; Mcintosh, Reys, Reys, 1992; Sowder, Schappelle, 1989; Trafton, 1989; entre outros). Os referidos autores no âmbito do sentido de número trazem para as discussões palavras como desenvolvimento, capacidade, intuição, conhecimento, flexibilidade, processo, gradual, rede conceitual, habilidade, sensação, reinvenção, relação.

No início do segundo milênio, investigadores portugueses desenvolveram um projeto de investigação centrado no desenvolvimento do sentido de número (Brocardo *et al*., 2008) com duração de três anos, sendo um dos seus objetivos articular o desenvolvimento curricular e a investigação educacional. A aprendizagem numa perspectiva do sentido de número, as práticas profissionais que favorecem o desenvolvimento do sentido de número bem como as características dos currículos que favorecem esse desenvolvimento, foram as questões que orientaram o projeto. À época, após revisão de literatura, a equipe do projeto usou como referência para definir o sentido de número as ideias e pensamentos dos investigadores McIntosh, Reys e Reys (1992):

> *1. O conhecimento e destreza* com os números que englobam o sentido da regularidade dos números, as múltiplas representações dos números, o sentido da grandeza relativa e absoluta dos números e, finalmente, o uso de sistemas de referência que permitem avaliar uma resposta ou arredondar um número para facilitar o cálculo.
> *2. O conhecimento e destreza com as operações* que englobam compreensão do efeito das operações, das propriedades e a das relações entre as operações.
> *3. A aplicação do conhecimento e da destreza com os números e as operações em situações de cálculo* que engloba a compreensão para relacionar o contexto e os cálculos, a consciencialização da existência de múltiplas estratégias, a apetência para usar representações eficazes e a sensibilidade para rever os dados e o resultado (Mcintosh; Rey; Reys, 1992, p. 9).

Os autores acima citados apontam que o sentido de número se refere ao "conhecimento geral que uma pessoa tem acerca de números e das suas operações a par com a capacidade e inclinação para usar esse conhecimento de forma flexível para construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis para lidar com números e operações" (Mcintosh; Reys; Reys, 1992, p. 4).

Em 2023, após revisão de literatura, considerando os autores já citados anteriormente, Silva, em seus estudos sobre manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem as operações de multiplicação e divisão com números naturais, traz o sentido de número como uma rede conceitual e procedimental que se amplia conforme se tem experiências com números e operações, sem perder de vista seus efeitos, propriedades, grandezas, contextos e as relações existentes entre números/números, operações/operações e números/operações. Assim como a compreensão global que se tem dos números e operações e o seu uso de maneira flexível.

A referida autora aponta que "o sentido de número faz referência ao conhecimento das operações e suas propriedades no que diz respeito a seu efeito sobre números e ao seu uso na resolução de problemas numéricos" (Silva, 2023, p. 47). Ainda destaca que conhecer as operações contribui para a elaboração de diferentes estratégias para a resolução de problemas, além de possibilitar verificar os resultados. Ressaltamos que a perspectiva utilizada pela autora é de que os estudantes trazem conhecimentos anteriores e são capazes de criar seus próprios procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental.

As autoras Serrazina e Rodrigues (2021) apontam que a flexibilidade é uma característica relevante do cálculo mental e do sentido de número. Para as autoras a "flexibilidade permite ao estudante adaptar os números de forma adaptativa às operações em questão, ou ajustar as operações mobilizadas a circunstâncias específicas das situações inerentes a diferentes contextos" (Serrazina; Rodrigues, 2021, p. 21). Adaptabilidade, na perspectiva das autoras mencionadas, está relacionada a uma rica rede de conhecimento sobre as características dos números e as relações numéricas entre os números.

Silva (2023) discute, em seus estudos sobre manifestações de flexibilidade de cálculo mental, que é quase impossível retratar o cálculo mental sem a ele juntar os atributos "flexível" e "adaptativo". A autora, a partir da revisão de literatura, argumenta que ser flexível é "uma capacidade que pode ser desenvolvida por todos os estudantes, pois se trabalha com a memória, usam-se registros escritos, compreende o uso de múltiplas estratégias e representa o pensamento dinâmico e adaptativo descrito como interação entre percepção e conhecimento" (Silva, 2023, 84). Ainda ressalta que a flexibilidade de cálculo mental propicia a produção de conexões simbólicas e estratégias operatórias para a resolução de situações quantitativas a partir de processos mentais (Silva, 2023).

A considerar os aspectos abordados por Serrazina e Rodrigues (2021) e Silva (2023) a flexibilidade de cálculo mental se manifesta nos procedimentos e estratégias de cálculo mental que emergem nas folhas de respostas dos estudantes ao resolverem tarefas envolvendo números. Manifestações, segundo Silva (2023), se traduzem em tornar público e revelar a ação do pensamento. Quando a flexibilidade de cálculo se manifesta? Como é possível identificar a flexibilidade de cálculo nos procedimentos e estratégias de cálculo?

Os estudantes ao se depararem com uma tarefa envolvendo números mobilizam seus esquemas mentais, recorrem aos seus conhecimentos anteriores sobre os números, assim como às relações numéricas e ainda olham para o contexto em que esses números estão imersos para registrar em suas folhas de respostas os seus procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental. Esse movimento é visto quando o professor os encoraja a registrarem e a socializarem com os pares seus pensamentos matemáticos. Por sua vez, o estudante se coloca como protagonista do seu fazer matemática.

Serrazina e Rodrigues (2021) e Silva (2023) destacam as relações numéricas, as transformações dos números, conhecimentos que se tem dos números e operações, uso de suas propriedades e das relações entre elas, e os contextos e características das tarefas como indícios da flexibilidade de cálculo.

É nessa perspectiva de sentido de número que queremos dialogar a fim de proporcionar reflexões e discussões em relação às possíveis ações e intervenções no processo de aprender e ensinar números, principalmente, nos anos iniciais de escolaridade. Sem perder de vista que atrelado ao desenvolvimento do sentido de número está o do raciocínio matemático.

Entre o pensar, saber e fazer temos o raciocinar. Segundo Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2020, p. 7), raciocinar se traduz em "realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado". Os referidos autores concebem o raciocínio matemático como uma capacidade a ser desenvolvida que "envolve uma diversidade de processos como conjeturar, generalizar e justificar" (Mata-Pereira; Ponte, 2017, p. 7) ou ainda, identificar padrões, comparar, exemplificar, classificar e provar (Jeannotte; Kieran, 2017).

Destacamos (i) *conjeturar* como o estabelecimento de relações matemáticas para desenvolver afirmações que se pensam ser verdadeiras; (ii) *generalizar* como a identificação de propriedades ou procedimentos comuns entre os casos explorados; (iii) *justificação* como o processo em que se apresentam razões logicamente válidas que explicam ou fundamentam a veracidade de determinada conclusão; (iv) *classificar* refere-se à organização de objetos diferentes; e (v) *exemplificar* apoia a realização de outros processos (Quaresma; Mata-Pereira; Henriques, 2022).

Rodrigues, Brunheira e Serrazina (2021) ressaltam que para além de identificar modos de desenvolverem os diferentes processos de raciocínios, é necessária a compreensão profunda do significado de cada um, o que leva ao estabelecimento de relações entre cada um e o alcance a um nível elevado de conhecimento.

Araman, Serrazina e Ponte (2019) descrevem que a promoção do raciocínio matemático dos estudantes requer que o professor repense as normas estabelecidas em sala de aula e reorganize os ambientes de aprendizagens tornando-os desafiadores. Os referidos autores argumentam que as discussões matemáticas realizadas com toda a turma a partir de tarefas exploratórias são boas práticas para desenvolver o raciocínio matemático. Eles destacam que uma vez desenvolvido o raciocínio matemático os estudantes "ultrapassam o uso rotineiro de procedimentos utilizando conceitos, propriedades e procedimentos com compreensão" (Araman; Serrazina; Ponte, 2019, p. 469).

A considerar os aspectos abordados Serrazina (2023) aponta que além de selecionar as tarefas e proporcionar a comunicação na sala de aula há que "identificar (i) o potencial da tarefa, (ii) ações do professor facilitadoras; e (iii) que conhecimentos os seus estudantes já possuem sobre o assunto" (Serrazina, 2023, p. 284).

Na perspectiva dos autores citados, promover o raciocínio matemático, em geral, ocorre associado à realização de tarefas que desafiem o pensar do estudante e à proposição de discussões coletivas após a resolução da tarefa a partir de uma prática de sala de aula voltada para o Ensino Exploratório.

O Ensino Exploratório é uma abordagem que envolve o aprender e ensinar matemática com significado e compreensão. É uma proposta bastante utilizada e discutida pelos investigadores portugueses nas formações de professores que aprendem e ensinam matemática (Canavarro, 2011; Ponte, 2005; Ponte, Branco, Quaresma, 2014; Serrazina, 2023), entre outros.

Ponte (2005) descreve que a característica principal de um Ensino Exploratório é que "o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem" (p.13).

O referido autor aponta que este estilo de ensino e aprendizagem "dará ênfase a atividades de exploração, incluindo possivelmente também algumas investigações, projetos, problemas e exercícios" e "valorizará mais os momentos de reflexão e discussão com toda a turma, tendo por base o trabalho prático já previamente desenvolvido como momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (Ponte, 2005, p. 15-16).

É comum nas escolas brasileiras o uso da palavra atividade para se referir a uma tarefa. Ponte (2005) distingue, em seus estudos, tarefa de atividade. O autor afirma que "o que os alunos aprendem resulta de dois fatores principais: a atividade que realizam e a reflexão que sobre ela efetuam" (Ponte, 2005, p.1).

O referido autor ainda descreve que "quando se está envolvido numa atividade, realiza-se certa tarefa. Uma tarefa é, assim, o objetivo da atividade" (Ponte, 2005, p. 1). Ainda destaca que a tarefa se refere a qualquer tipo de proposição direcionada aos estudantes e a atividade traduz o significado de acompanhar o pensar, o raciocinar, o fazer, sem perder de vista as estratégias do estudante.

Ponte (2005) aponta que a formulação de tarefas matemáticas adequadas pode vir a suscitar a atividade do estudante. Com isso, chama atenção que uma boa tarefa pode ou não provocar a atividade de quem aprende e ensina matemática, sinaliza que há outros aspectos envolvidos, como por exemplo, o modo como as tarefas são propostas e como são conduzidas sua realização na sala de aula.

Os apontamentos trazidos até agora marcam que na abordagem do Ensino Exploratório o planejar a aula de matemática é fundamental, daí dependendo da forma como a vai conduzir. Essas duas dimensões, além de promoverem um ambiente de discussão e aprendizagem na sala de aula, permitem ao professor estar atento às possíveis dificuldades dos estudantes, levando-o a uma preparação das suas possíveis intervenções ganhando assim confiança na condução das discussões coletivas (Martins; Mata-Pereira; Ponte, 2021).

A considerar os aspectos abordados Canavarro (2011) sinaliza que o Ensino Exploratório possibilita aos estudantes o olhar os conhecimentos e procedimentos matemáticos com significado. Com isso, desenvolvem suas capacidades matemáticas como a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática. A autora ressalta que nesse movimento o papel e a ação de quem ensina matemática (professora/professor) inicia com a escolha criteriosa das tarefas a serem propostas aos estudantes, sem perder de vista os objetivos de aprendizagem e as orientações curriculares (CANAVARRO, 2011).

Os autores portugueses chamam atenção que “adotar uma abordagem exploratória na aula de Matemática é um desafio para muitos professores” (Martins; Mata-Pereira; Ponte, 2021, p. 344). Ainda apontam que o “planejar e conduzir uma aula exploratória é ainda mais desafiante para os futuros professores que ainda não têm experiência no ensino da Matemática” (Mata-Pereira; Ponte, 2021, p. 344). Por isso, sinalizam a importância de ampliarem para os cursos de formação inicial as discussões acerca dessa abordagem possibilitando aprendizagens através da prática e da reflexão sobre a prática.

Destacamos o intercâmbio, realizado recentemente, entre três universidades de Portugal e do Brasil, envolvendo a formação inicial de professores de Matemática a partir do estudo de aula. No estudo realizado, os autores Ponte, Pina Neves, Macedo e Quaresma (2023) mostram que o estudo de aula contribuiu para aprendizagens significativas por parte dos futuros professores de matemática. Os referidos autores apontam que a abordagem exploratória com o planejar, conduzir e discutir coletivamente foram aspectos relevantes com os quais os futuros professores se identificaram. Além do que, ficou evidente para os futuros professores a importância da proposição de tarefas abertas e problemas, levando-os a reconhecerem que além de promover aprendizagem proporciona “conhecer os alunos para poder trabalhar com eles e, em particular, para elaborar planos de aula ajustados às suas características” (Ponte; Pina Neves; Macedo; Quaresma, 2023, p. 236).

Corroboramos com as ideias dos referidos autores e nossa intenção é propor que as discussões sobre o Ensino Exploratório sejam ampliadas para as formações continuadas e em serviço. Serrazina (2023) descreve que:

> No Ensino Exploratório, o professor tem de compreender que para *planificar* a atividade letiva não basta fazer uma listagem de tarefas (atividades de investigação, problemas ou exercícios), essas tarefas devem ter em conta os objetivos de aprendizagem para os seus estudantes, mas também como os objetivos para cada aula se ligam com os das aulas anteriores e com os das aulas seguintes (Serrazina, 2023, p. 282).

A referida autora aponta que “planejar uma aula na abordagem do Ensino Exploratório requer antecipação: (i) dos acontecimentos da aula; (ii) das formas como os estudantes responderão às tarefas propostas; e (iii) de como essas respostas podem ser usadas para promover os objetivos de aprendizagem” (Serrazina, 2023, p. 282).

A considerar esses três aspectos, Serrazina (2023) chama atenção que “o professor tem de compreender que a exploração de uma tarefa deve incluir uma etapa final de reflexão” (Serrazina, 2023, p. 282). A autora aponta os seguintes pontos a serem refletidos pelo professor: (i) sobre o desempenho dos estudantes e dificuldades ou questões colocadas; (ii) sobre os objetivos efetivamente atingidos (definidos ou não à partida); e (iii) sobre a adequação da tarefa e/ou ajustes a fazer (Serrazina, 2017).

Essas reflexões finais podem levar o professor a: “(i) interrogar-se sobre as aprendizagens matemáticas que foram ou não realizadas pelos estudantes; (ii) compreender a importância das decisões da aula e suas consequências nas aprendizagens dos estudantes; (iii) reconhecer surpresas da aula e tentar compreendê-las; (iv) identificar aspectos que dificultam o seu ensinar; (v) assumir fragilidades e procurar superá-las e; (vi) adquirir atitude profissional inquiridora e confiante" (Serrazina, 2023, p. 282).

Diante desses aspectos planejar e conduzir uma aula na abordagem do Ensino Exploratório requer a seguinte estrutura: (i) proposta de uma tarefa; (ii) trabalho autônomo dos alunos; e (iii) discussão coletiva e síntese final (Canavarro, 2011; Martins, Mata-Pereira, Ponte, 2005; Ponte, 2005; Ponte, Branco, Quaresma, 2014; Serrazina, 2017, 2023).

Abordamos os principais aspectos que envolvem o sentido de número e o Ensino Exploratório. Ressaltamos que o sentido de número é uma capacidade a se desenvolver, um processo evolutivo e gradual que envolve uma rede conceitual e procedimental. O Ensino Exploratório é uma abordagem que elegemos para mostrar possibilidades de aprender e ensinar matemática com significado e compreensão, em que o estudante tem oportunidade de ser protagonista no seu fazer matemático e o professor se responsabiliza em proporcionar esse protagonismo com tarefas que desafiem as ideias e o pensar do estudante.

Possíveis ações e intervenções para o aprender e ensinar Matemática nos Anos Iniciais

Para discutir e refletir acerca de possíveis ações e intervenções para o aprender e ensinar matemática na perspectiva do sentido de número numa abordagem exploratória optamos pelo paradigma interpretativo numa abordagem qualitativa ao considerar que a atividade humana é uma experiência social em que cada um vai elaborando significados, sendo que a investigação procura reconstruir essa experiência (Ponte, 2005).

Realizamos uma análise documental em dois documentos: (i) Projeto Reason-Raciocínio matemático e formações de professores (Ponte *et al*., 2017, 2019, 2022) e (ii) Na tese de doutoramento *Manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem multiplicação e divisão numa perspectiva do sentido de número*, defendida em 2023, na Universidade de Lisboa, Instituto de Educação, no ramo da Didática da Matemática (Silva, 2023). Ambos disponíveis no repositório da Universidade de Lisboa, Instituto de Educação. Elegemos esses dois documentos por se tratarem de investigações voltadas para o aprender e ensinar matemática, o primeiro voltado para a formação de professores e o segundo para o fazer dos estudantes. Ambos mostram as resoluções de uma diversidade de tarefas que envolvem o sentido de número.

O objetivo do Projeto *Resaon* foi estudar o conhecimento matemático e didático que os professores precisam para conduzir uma prática que promova o raciocínio matemático dos alunos e estudar formas de apoiar o seu desenvolvimento em professores e futuros professores do ensino básico e secundário (Ponte *et al*., 2017). Além dos professores investigadores responsáveis (João Pedro da Ponte e Ana Henriques) a equipe contou com a participação de 12 professores investigadores e 05 bolsistas de iniciação à investigação científica.

Na página da ULisboa, http://reason.ie.ulisboa.pt é possível encontrar maiores informações sobre o projeto, como por exemplo, eventos realizados, descrição do projeto, participantes e publicações. Nossa busca se concentrou numa das brochuras publicadas pelo projeto - Raciocínio Matemático nos 1º e 2º Ciclos: Números, disponível para *download* em pdf na referida página da *web*. Na tese de doutoramento, disponibilizada no repositório da ULisboa, Instituto de Educação, o objetivo foi compreender manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais quando estudantes resolvem tarefas que envolvem multiplicação e divisão (Silva, 2023). Nossa busca se concentrou nos procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental usados pelos estudantes. De notar que o trabalho empírico para a tese foi realizado no Brasil.

O Projeto *Reason* foca na promoção do raciocínio matemático e a tese de doutoramento, Silva (2023) foca na compreensão de manifestações de flexibilidade de cálculo mental. A abordagem exploratória está presente com mais detalhe no Projeto *Reason*, pois em cada tarefa há descrição de suas etapas (apresentação da tarefa, trabalho autônomo dos estudantes e discussão coletiva), com exemplos dos procedimentos usados pelos estudantes ao resolverem as tarefas e as discussões realizadas em sala.

Na tese de doutoramento também é possível perceber a abordagem exploratória, todavia, com menos detalhes nas descrições de suas etapas. Nos três casos analisados na tese de doutoramento há uma variedade e diversidade de procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental usados pelos estudantes ao resolverem as tarefas.

Apresentamos relatos de experiências de aprendizagem e ensino numa abordagem de Ensino Exploratório, nossa intenção não é realizar uma comparação, mas mostrar possibilidades de ações e intervenções para o aprender e ensinar números na perspectiva do sentido de número na abordagem exploratória. Por isso, vamos socializar situações vivenciadas por professores e estudantes portugueses e estudantes brasileiros,_com a intenção de proporcionar ao leitor reflexões e discussões sobre às possíveis ações e intervenções que possa desenvolver em sua sala de aula, seja, em escola e/ou outros espaços de formação.

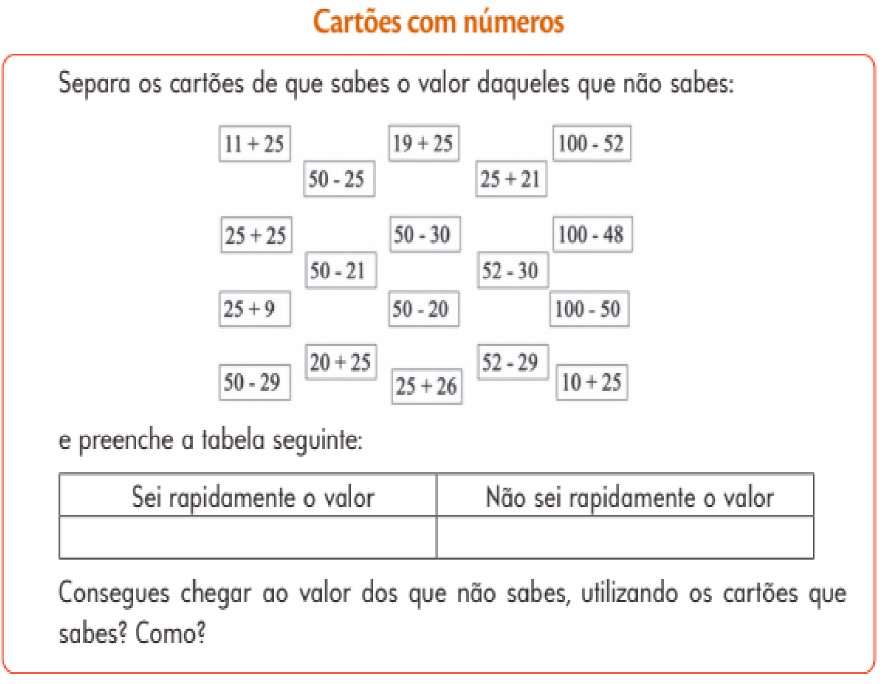
Aprender e ensinar em nossa perspectiva de Educação Matemática são ações inseparáveis que se relacionam, se complementam e se integram (Fosnost; Dolk, 2001). Tanto o professor quanto o estudante experienciam essas ações. Para os referidos autores as relações entre o ensinar e o aprender ocorrem não apenas na linguagem e no pensamento, mas também na ação.

Ao considerar esses aspectos, como dito anteriormente, trazemos duas experiências de aprendizagem e ensino ocorridas em salas de aula de dois países: Portugal e Brasil. Em Portugal o objetivo foi promover o raciocínio matemático e no Brasil foi compreender manifestações de flexibilidade de cálculo mental, as duas experiências envolvem a ideia de sentido de número.

Para isso, elegemos uma tarefa de cada uma das experiências realizadas: (i) Tarefa 1 - Cartões com números, envolvendo situações aditivas (adição e subtração), retirada da Brochura *Reason* - Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º Ciclos: Números (Brocardo *et al*., 2022, p. 15-22), e; (ii) Tarefa - 4 Brigadeiros, Caso Ipê Amarelo, envolvendo situações multiplicativas, especificamente a divisão como medida), retirada da tese de doutoramento (Silva, 2023, p. 130-131, 141, 150-151, 156, 162-184).

Tarefa Matemática 1 - Cartões com números. É uma tarefa que pode ser explorada no 2º ano, com vista a desenvolver competências associadas ao tema números e operações a fim de promover processos de raciocínio matemático. É uma tarefa que apresenta um caráter orientador incluindo questões que permitem variedade de estratégias de resolução, variedade de representações, e favorece a reflexão sobre os processos de raciocínio. A nossa proposta é que o leitor comece por resolver a tarefa (Figura 1).

Figura 1. Tarefa 1 Cartões com números.



Cartões com números

Separa os cartões de que sabes o valor daqueles que não sabes:

11 + 25, 50 - 25, 19 + 25, 25 + 21, 100 - 52, 25 + 25, 50 - 21, 50 - 30, 52 - 30, 100 - 48, 25 + 9, 50 - 20, 100 - 50, 50 - 29, 20 + 25, 25 + 26, 52 - 29, 10 + 25

e preenche a tabela seguinte:

Sei rapidamente o valor	Não sei rapidamente o valor

Consegues chegar ao valor dos que não sabes, utilizando os cartões que sabes? Como?

Fonte: Brocardo *et al*. (2022, p. 15-22).

As autoras sinalizam que o "objetivo não é o cálculo de adições e subtrações. O desafio consiste em, partindo da identificação do valor de expressões consideradas mais fáceis, determinar o valor das que consideram mais difíceis, sempre pensando nos números e nas suas relações" (Brocardo *et al*., 2022). Por exemplo, podemos separar os cartões em que aparecem as relações de dobro (25 + 25), dobro/metade (50 – 25), quase dobro (25 + 26), dezenas exatas (50 – 30), proximidades dos números (19 é próximo de 20), etc. Na resolução da tarefa o importante é garantir que os estudantes compreendem a situação proposta, isso é passível de acontecer quando o professor apresenta a tarefa, uma das fases da abordagem exploratória. Mostramos um exemplo da fala da professora na condução da tarefa:

> *"Então, vou distribuir a tarefa e pedir ao António para ler. Todos perceberam o que é para fazer?* [...] *Têm de registar na coluna da esquerda as expressões de que sabem o valor e na da direita aquelas para as quais não sabem o valor.* [...] *Já sabem que tudo deve ficar registrado, mesmo que cheguem à conclusão de que o caminho não é aquele. Não devem apagar o que fizeram, mas colocar um traço e continuar".*

Nota-se que as instruções dadas pela professora ajudam os estudantes a interpretar o enunciado da tarefa levando-os a entender como a vão realizar, a importância de registrar e que não devem apagar o que fizeram, mesmo que concluam que está incorreta a resolução. Essas ações ajudam a evidenciar as ideias e o pensamento matemático dos estudantes para possíveis intervenções.

A segunda fase consiste na realização da tarefa pelos estudantes, é o momento que eles têm para realizar um trabalho autônomo, seja em pares e/ou em grupo, ou até mesmo individualmente. O professor deve circular pela sala a fim de encorajá-los a se envolverem na exploração das tarefas. Deve-se evitar dar sugestões, o ideal é colocar questões que os ajudem a avançar em relação ao que estão pensando. Isso pode ajudar a mobilizar conhecimentos prévios sobre conceitos, ideias etc.

Figura 2. Procedimentos usados por Lúcia e Luís, Tarefa 1 – Cartões com números.

Luís parece usar a relação dobro/metade para justificar o resultado.	*Luís* [falando para Lúcia, com o cartão 100 – 52 na mão]: Já sei quanto é! É 42. Ai, é 48! 100 – 52 é 48. *Professora*: [aproxima-se do par] Porquê? *Luís*: Porque 100 – 50 é 50, menos 2, é 48. (...) *Luís* [falando para Lúcia]: 19 + 25, 30... [aponta para o 25 no cartão], 40, dá 44. 44. Dá 44.

Fonte: Brocardo *et al*. (2022, p. 15-22).

A terceira fase da abordagem exploratória é marcada pela discussão coletiva (socialização dos saberes ou não). O professor elege, ao circular pela sala, os procedimentos para serem compartilhados com a turma, de preferência aqueles que chamam atenção, ou seja, que evidenciam estratégias diferentes. No caso dessa tarefa pode chamar os pares que se relacionam. Por exemplo, se chamar um estudante que represente o cartão 25 + 25, pode chamar outro que represente o 50 – 25, que mostram a relação de dobro e a relação de dobro e metade.

Nessa fase é possível identificar o sentido de número dos estudantes, assim como o raciocínio matemático e a flexibilidade de cálculo.

Figura 3. Discussão coletiva Tarefa 1 - Cartões com números

Os alunos utilizam a relação dobro/ metade e estabelecem relações de −2 e +2	*Alexandre*: [respondendo à professora quando esta questiona por que razão 100 – 50 ajuda a calcular 100 – 52]. Porque este [apontando para 50] é metade deste [apontando para 100]. *Professora*: Porque 50 é metade de 100. Quanto é que dá 100 – 50, Mónica? (...) Alexandre: Este [apontando para 100] menos 50 vai dar 50. *Professora* [regista "=50" à frente do cartão 100 – 50]: Como é que este pode ajudar a fazer 100 – 48? Vamos pensar. *Alexandre*: 100 – 52 é 48. *Professora*: Como sabes? *Alexandre*: Se 100 – 50 é 50, então tira-se mais 2 e vai dar 48. *Professora*: Tira-se 2, onde? *Alexandre* [apontando para o resultado de 100 – 50]: Ao 50. *Renato* [apontando para 100 – 48]: Aqui é 52. *Professora*: Porquê? *Renato*: Porque 100 – 50 vai dar 50. E como 48 é menos 2, vai dar 52.

Fonte: Brocardo *et al*. (2022, p. 15-22).

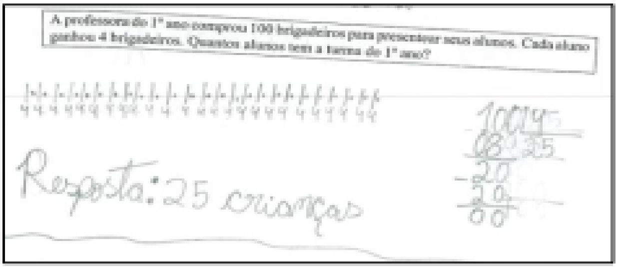
Perguntas feitas pelo professor na fase de discussão são essenciais para perceber as estratégias usadas pelos estudantes. Por isso, na abordagem exploratória é fundamental o planejamento do que vai acontecer na sala de aula. É no planejar que o professor antecipa os procedimentos de cálculo que os estudantes podem usar, as perguntas que podem fazer e até mesmo pode propor variações e/ou extensões das tarefas.

Tarefa Matemática 4 - Brigadeiros, Caso Ipê Amarelo. Essa tarefa foi explorada no 4º ano. É uma tarefa enquadrada na perspectiva de Ponte (2005) e no contexto de "semi-realidade" (Skovsmose, 2000), seu caráter é totalmente descrito pelo texto do exercício, nenhuma outra informação é relevante para a resolução do exercício, acrescer informações é totalmente irrelevante, e o único propósito é resolvê-la. No geral são tarefas construídas por autores de livros didáticos de matemática. Todavia, ressalta-se que a Tarefa 4 - Brigadeiros foi pensada e elaborada pela investigadora (Silva, 2023) e discutida com a professora regente da turma a partir de situações cotidianas ocorridas no espaço escolar, a confecção e/ou compras de brigadeiros para serem partilhados entre os estudantes, inserida na resolução de problema.

Seu contexto envolve a divisão como medida, em que o todo e o tamanho do grupo são conhecidos, ela desafia os estudantes a saberem quantos são os grupos, ou seja, quantos alunos recebem brigadeiros como mostra o enunciado da tarefa: *"A professora do 1º ano comprou 100 brigadeiros para presentear seus alunos. Cada aluno recebeu 4 brigadeiros. Quantos alunos tem a turma do 1º ano?".* Desafiamos você leitor, a resolver a Tarefa 4 – Brigadeiros antes de adentrarmos nas discussões e reflexões, sinalizando uma condição, não usar o algoritmo tradicional da divisão para chegar ao resultado. Procure pensar em prováveis procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental que os estudantes poderiam usar.

Pelo oportuno, entendemos procedimentos e estratégias como o modo que os estudantes resolvem as tarefas, "relacionados ao passo a passo e à rede de relações que permitem o acesso flexível a um conjunto de informações e ao seu uso" (Silva, 2023). São ações complementares enquanto o procedimento de cálculo é visível nos registros das folhas de respostas dos estudantes, pois podem aparecer com o uso de adições, subtrações, contagens etc. A estratégia de cálculo mental, também vista nos registros, é passível de emergir quando damos oportunidades aos estudantes para explicar seu pensamento matemático e/ou raciocínio matemático. Na Figura 4, mostramos a resolução de Catarina e o diálogo que estabeleceu com a professora.

Figura 4. Resolução de Catarina e o diálogo com a professora



Professora: *Então Catarina, me explica como fez esta operação.*

Catarina: *Qual das duas?*

Professora: *Você fez duas?*

Catarina: *Sim. Primeiro eu contei de quatro em quatro na cabeça até chegar a 100, que deu 25 quatros. [Apontou para o registro dos 4]. Depois eu quis fazer a conta como meu irmão me ensinou, não dava certo. Apaguei várias vezes, pensei que tivesse esquecido. Mas... me lembrei que ainda não sei dividir por 25 então dividi por 4.*

Professora: *Ah! Então me mostra como dividiu por quatro.*

Catarina: *contei 10 quatros, deu 40 e depois mais 10 quatro também deu 40. É 80 né?*

Professora: *É?*

Catarina: *É! E 100 menos 80 dá 20. Tá vendo aqui. Apontou para o vinte na operação.*

Professora: *Ah tá!*

Catarina: *Ainda sobrou 5 quatros que dá 20! E 20 menos 20 não sobra nada.*

Professora: *E os tracinhos e bolinhas em cima do quatro?*

Catarina: *Ah! Usei para contar.*

Professora: *Qual foi o resultado que você encontrou?*

Catarina: *25! 25 crianças.*

Fonte: Silva (2023, p. 151).

O exemplo da Figura 4 mostra que nessa experiência de aprendizagem e ensino também foram utilizadas as etapas da abordagem exploratória para apresentação da tarefa, realização da tarefa e discussão coletiva. A compreensão do raciocínio matemático da estudante fica evidente no diálogo que estabeleceu com a professora, pois lhe foi dada a oportunidade de explorar os procedimentos de cálculo que usou, no caso a contagem de 4 em 4 até chegar a 25, e a separação dos quatros em grupos de 10 (resultando 40), formando dois grupos de 10 quatros (formando 80) e um de cinco quatros.

Aqui já evidencia o resultado da situação 25. Todavia, para validar o resultado fez a divisão através de um cálculo em coluna. Nos dois procedimentos é possível identificar que a estudante usa as transformações dos números envolvidos na tarefa para chegar ao resultado evidenciando manifestação de flexibilidade de cálculo mental. Podemos dizer que o conhecimento dos números e operações da estudante mostra o seu sentido de número.

Outro aspecto a destacar se refere ao diálogo entre a professora e a Catarina. Nota-se que o tempo todo a estudante faz perguntas à professora relacionadas ao que pensou ao resolver a tarefa e a professora toma o cuidado em devolver a pergunta sem dar uma resposta exata, a fim de dar oportunidade à estudante a explicar como chegou ao resultado, ou seja, os procedimentos/estratégias de cálculo que muitas vezes não estão explícitas nas folhas de respostas. Além, também de possibilitar que outros estudantes vejam maneiras diferentes de se chegar ao mesmo resultado, Assim como possibilidades de ações e intervenções para o aprender e ensinar números na abordagem exploratória.

Discussão e Conclusões

Buscamos discutir e refletir acerca de experiências de aprendizagem e ensino que promovem o raciocínio matemático e o desenvolvimento do sentido de número a partir de uma abordagem exploratória.

O exemplo retirado da brochura do Projeto *Reason* - Raciocínio Matemático nos 1º e 2º Ciclos: Números, mostra que proporcionar tarefas desafiantes aos estudantes promove o seu raciocínio matemático. Também ilustra como através da abordagem exploratória há possibilidades de apoiar professores e futuros professores a acompanhar o desenvolvimento dos seus estudantes, assim como aprofundar os conhecimentos sobre o raciocínio matemático e a encontrar formas de os promover em sala de aula.

No estudo desenvolvido por Silva (2023) cujo objetivo foi compreender manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais na resolução de tarefas que envolvem multiplicação e divisão, a partir de experiências de aprendizagem e ensino na perspectiva do sentido de número foi possível identificar nas folhas de respostas dos estudantes procedimentos e estratégias de cálculo mental onde emergiram manifestações de flexibilidade de cálculo nas relações numéricas, nas transformações dos números, no uso de propriedades e das relações inversas. A investigação realizada confirmou que o planejamento, a condução na sala de aula, a discussão coletiva, os conhecimentos que os estudantes têm dos números e operações, e os contextos e características das tarefas são aspectos essenciais quando se pretende um ensino da matemática que promova o desenvolvimento do sentido de número.

A Tarefa 1 - Cartões com números, com característica relativamente aberta, onde não há uma única resposta, leva a uma exploração (Ponte, 2005) e a Tarefa 4 - Brigadeiros, com característica relativamente fechada, o que é dado, o que é pedido, uma única resposta (Ponte, 2005), elucida como os conhecimentos prévios dos estudantes podem de certa maneira dizer se uma tarefa é uma exploração ou um exercício (Ponte, 2005).

Em relação a isso podemos dizer que nas duas situações os conhecimentos prévios dos estudantes, independente de a tarefa matemática ser aberta ou fechada, levou a uma exploração por parte dos professores e dos estudantes. O que mostra como a abordagem exploratória depende do modo como o professor planeja e conduz a aula; como envolve os estudantes de forma ativa e participativa na realização da tarefa e na discussão coletiva. As perguntas elaboradas pelo professor e feitas aos estudantes influenciam nesse processo de exploração das tarefas. São ações que levam o estudante a mostrar seu pensamento matemático, seu raciocínio matemático através dos seus procedimentos de cálculo e estratégias de cálculo mental, mostrando ao professor o que já sabe e o que ainda precisa aprender em relação aos temas que envolvem o desenvolvimento do sentido de número.

Concluímos que os dois exemplos de tarefas socializados mostram possibilidades de promover o raciocínio matemático e desenvolver o sentido de número, seja na sala de aula nos anos iniciais, na formação inicial, continuada ou em serviço dos professores que aprendem e ensinam matemática. Para isso é fundamental que as aulas de matemática sejam planejadas, antecipadamente, levando em conta as etapas da abordagem exploratória (apresentação da tarefa, realização da tarefa e discussão coletiva), e os processos de raciocínio matemático (conjeturar, generalizar, justificar, classificar e exemplificar). Outro ponto a discutir e considerar é que quanto mais o estudante tiver conhecimento dos números e operações mais flexível será em seu cálculo, e quanto mais flexível, melhor será seu desenvolvimento tanto no raciocínio matemático quanto no sentido de número. Por isso, é fundamental que o estudante seja protagonista do seu próprio saber e fazer matemático.

Referências

ARAMAN, E. M. O.; SERRAZINA, M. L.; PONTE, J. P. **“Eu perguntei se o cinco não tem metade”:** ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. Educação Matemática Pesquisa, São Paulo, v. 21, n. 2, p. 466-490, 2019.

ARCAVI, Abraham. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. **For the learning of Mathematics**, v. 14, n. 3, p. 24-35, 1994.

BAROODY, Arthur J.; COSLICK, Ronald T. **Fostering children's mathematical power: an investigative approach to K-8 mathematics instruction**. Routled, 1998.

BROCARDO, Joana. SERRAZINA, Lurdes. ROCHA, Isabel. MENDES, Fátima. MENINO, Hugo. FERREIRA, Elvira. Um projecto centrado no sentido do número. In: **XII Simposio de la Sociedad Española de Investigación Matemática (SEIEM)**. 2008.

BROCARDO, Joana. *et al*. Tarefas para promover o raciocínio matemático. In: **Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º Ciclos: Números.** Brochuras Reason. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 12-22, 2022. Disponível em: http://reason.ie.ulisboa.pt/. Acesso em: 21 nov. 2024.

CANAVARRO, Ana Paula. Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. **Educação e Matemática**, n. 115, p. 11-17, 2011.

CARPENTER, Thomas P. et al. (Ed.). Using research in teaching: Notes from National Assessment: estimation. **The Arithmetic Teacher**, v. 23, n. 4, p. 296-302, 1976.

FOSNOT, Catherine Twomey; DOLK, Maarten. **Young Mathematicians at Work: Constructing Multiplication and Division**. Heinemann, 88 Post Road West, PO Box 5007, Westport, CT 06881, 2001.

FUSON, Karen C. **Children’s counting and concepts of number**. Springer Science & Business Media, 1988.

HOWDEN, Hilde. Teaching number sense. **The Arithmetic Teacher**, v. 36, n. 6, p. 6-11, 1989.

JEANNOTTE, D.; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 1, p.1-16, set. 2017. doi: 10.1007/s10649-017-9761-8.

MARTINS, Micaela; MATA-PEREIRA, Joana; PONTE, João Pedro da. Os Desafios da Abordagem Exploratória no Ensino da Matemática: aprendizagens de duas futuras professoras através do estudo de aula. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, v. 35, p. 343-364, 2021.

MARSHALL, S. P. Retrospective paper: Number sense conference. In: **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**. 1989. p. 40-42.

MATA-PEREIRA, Joana; DA PONTE, João-Pedro. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. **Educational Studies in Mathematics**, v. 96, n. 2, p. 169-186, 2017.

MCINTOSH, Alistair; REYS, Barbara J.; REYS, Robert E. A proposed framework for examining basic number sense. In: **Subject Learning in the Primary Curriculum**. Routledge, 2005. p. 209-221.

PONTE, João Pedro da. Gestão curricular em Matemática. **O professor e o desenvolvimento curricular**, p. 11-34, 2005.

PONTE, João Pedro; BRANCO, Neusa; QUARESMA, Marisa. Exploratory activity in the mathematics classroom. **Transforming mathematics instruction: Multiple approaches and practices**, p. 103-125, 2014.

PONTE, João Pedro et al. Projecto Reason: Raciocínio Matemático e Formação de Professores. Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, FCT - PTDC/CED-EDG/28022/2017. 2019-2022. Disponível em: http://reason.ie.ulisboa.pt/. Acesso em: 21 nov. 2024.

PONTE, João Pedro da; QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? **Educação e Matemática**, n. 156, p. 7-11, 2020.

PONTE, João Pedro da; PINA NEVES, Regina da Silva; MACEDO, Aluska Dias Ramos de; QUARESMA, Marisa. Formación inicial de profesores de Matemáticas: una experiencia de intercambio internacional a partir de los estudios de aula. PARADIGMA, Maracay, v. 44, n. 2, p. 213–240, 2023. DOI: 10.37618/PARADIGMA.1011-2251. 2023.p.213-240.id1418. Disponível em: https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1418 Acesso em: 10 oct. 2024.

QUARESMA, Marisa; MATA-PEREIRA, Joana; HENRIQUES, Ana. Contexto de Ensino e aprendizagem para a promoção do raciocínio matemático. In: **Raciocínio Matemático nos 1.º e 2.º Ciclos: Números.** Brochuras Reason. Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, p. 3-10, 2022. Disponível em: http://reason.ie.ulisboa.pt/. Acesso em: 21 nov. 2024.

RODRIGUES, Margarida; BRUNHEIRA, Lina; SERRAZINA, Lurdes. A framework for prospective primary teachers' knowledge of mathematical reasoning processes. **International Journal of Educational Research**, v. 107, p. 101750, 2021.

SERRAZINA, Lurdes; RODRIGUES, Margarida. Number sense and flexibility of calculation: A common focus on number relations. In: **Mathematical reasoning of children and adults: teaching and learning from an interdisciplinary perspective**. Cham: Springer International Publishing, 2021. p. 19-40.

SERRAZINA, Lurdes. Planificação do ensino e aprendizagem da matemática. In **A prática dos professores: Planificação e discussão coletiva na sala de aula**, GTI APM, p. 9-32, 2017.

SERRAZINA, M. L. Que formação de professores de modo a assegurar que todos os alunos aprendem Matemática?. **Revista de Educação Pública**, v. 32, p. 279-299, 2023.

SILVA, Cília. C. R. da. **Manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem multiplicação e divisão numa perspetiva do sentido de número**. 2023. 329f. Tese (Doutorado em Educação) – Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, Portugal, 2023. Disponível em: https://repositorio.ul.pt/handle/10451/64857. Acesso em: 21 nov. 2024.

SOWDER, Judith T.; SCHAPPELLE, Bonnie P. **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**. San Diego State University. College of Sciences. Center for Research in Mathematics and Science Education, 1989.

TRAFTON, P. R. Reflections on the number sense conference. In: **Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference**. San Diego: San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education, 1989. p. 74-77.

Links disponíveis com sugestões de tarefas na abordagem exploratória

<http://reason.ie.ulisboa.pt/ > Acesso em: 21/09/2024 às 15:44.

<https://www.portalmath.pt/wp-content/uploads/2022/12/3Ano_coletanea.pdf> Acesso em: 29/09/2024 às 14:16.

<https://bibliotecadigital.ipb.pt/bitstream/10198/26844/1/EM166.pdf> Acesso em: 29/09/2024 às 14:22.

< https://aem.dge.mec.pt/pt/recursos/ensino-basico > Coletânea de Tarefas. Acesso em: 29/09/2024 às 14:31.

3 - Três propostas metodológicas de atividades com números apoiadas pela Neurociência

Josinalva Estácio Menezes
Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz

Introdução

A sociedade está em evolução constante, o que está a requerer novos esforços em todos os setores, incluindo a Educação, o que é feito, no cenário acadêmico, por meio do esforço dos pesquisadores, dentre os quais figura a Neurociência Cognitiva.

Nos últimos vinte anos, as pesquisas e estudos sobre a Neurociência e a compreensão do funcionamento do cérebro no que se refere à sua divisão, funções, conexões e implicações no desempenho físico e mental do indivíduo têm crescido amplamente. Conhecer os processos pelos quais a aprendizagem ocorre em relação às funções cerebrais, algumas das quais podem ser constatadas por meio de exames como o Eletroencefalograma (EEG), são um poderoso auxílio para o trabalho docente.

Na Matemática não é diferente. Pesquisas sobre como se aprende esta ciência têm sido realizadas no contexto de várias áreas, buscando explicar tais processos, em um esforço de orientar o trabalho do professor. Compreendendo o funcionamento do cérebro em relação à aprendizagem, é possível organizar as atividades e redirecionar as metodologias de ensino, bem como fazer escolhas mais adequadas de materiais e recursos didáticos, tanto em ambientes físicos quanto em ambientes virtuais, para promover uma docência mais eficiente e otimizada e, consequentemente, uma aprendizagem mais exitosa junto aos alunos. Isso contribui, também, para a melhoria do ensino-aprendizagem como um todo, e também para a formação do indivíduo como cidadão pleno.

Atuando como professores desde sempre, e na busca de formas para melhorar o trabalho docente, consideramos realizar uma pesquisa que permitisse acessar novos conhecimentos e metodologias de ação que atendam às demandas da contemporaneidade. Dentre outras buscas, temos pesquisado possíveis contribuições que a Neurociência, e em particular a Neurociência Cognitiva, tem dado à Educação Matemática desde o seu surgimento.

Seguramente, pesquisas empíricas, envolvendo essas duas áreas do conhecimento em ambientes reais de ensino e aprendizagem, têm sido divulgadas em ritmo crescente, e o produto delas já pode ser considerado quanto à inserção na prática docente. Desse modo, neste capítulo pretendemos discutir três propostas metodológicas de atividades com números apoiadas pela Neurociência Cognitiva. Podemos destacar que essa ciência tem contribuído para a Educação Matemática nos principais aspectos do processo de ensino e aprendizagem, a partir da compreensão dos processos cerebrais na aprendizagem refletidas nas propostas de ensino. Entendemos ainda, que este capítulo poderá ser mais um trabalho a contribuir com o contexto educacional, o que poderá trazer sugestões para a prática docente. Assim, foi nessa direção que seguimos.

Referencial Teórico

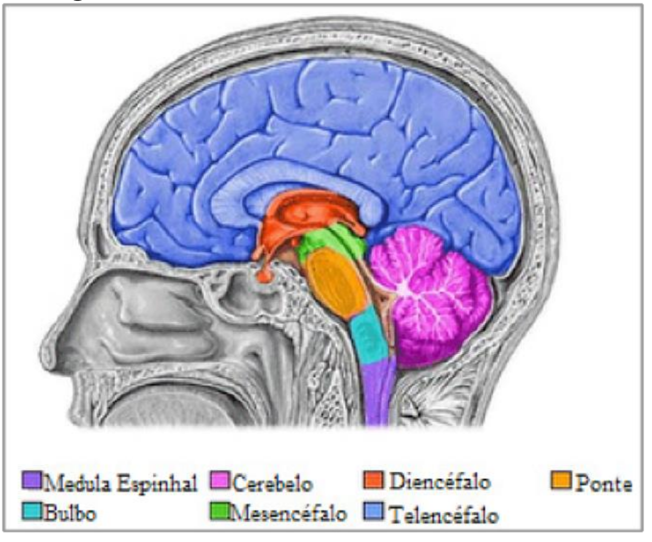
A Neurociência Cognitiva (NC) é uma área recente do conhecimento, cujas pesquisas têm permitido aplicações à Educação em geral, e à Educação Matemática em particular, as quais têm trazido resultados animadores no contexto acadêmico. A NC descreve o cérebro, sua estrutura, suas funções, efeitos e processos relacionados à aprendizagem. Ponte (2009) destaca que remonta ao século XIX, com o estudo de caso do acidente de Phineas P. Gage, relatado depois por Damásio (1995). Estudos posteriores levaram ao desenvolvimento da teoria.

Neurociência e o ensino-aprendizagem

Sabemos que o mecanismo de aprendizagem está relacionado ao funcionamento do Sistema Nervoso Central (SNC), pois cada tipo de habilidade ou comportamento está relacionado a certas áreas particulares do cérebro. Existem áreas habilitadas a interpretar estímulos que levam à percepção visual e auditiva, à compreensão, à capacidade linguística, à cognição, ao planejamento de ações futuras, inclusive de movimento, entre outros. Ensinar a uma pessoa uma habilidade nova implica maximizar o potencial de funcionamento de seu cérebro, isso porque aprender exige planejar novas maneiras de solucionar desafios, estimulando diferentes áreas cerebrais a trabalhar com a capacidade máxima (Oliveira, 2005; Relvas, 2009a).

Pesquisadores com Lent (2004) e Fiori (2008) afirmam que, o SNC comporta sete partes fundamentais, que são: medula espinhal, bulbo, ponte, cerebelo, mesencéfalo, diencéfalo (tálamo e hipotálamo) e os hemisférios cerebrais (ou telencéfalo). Seibert e Groenwald (2014, p. 22) mostram esse esquema na Figura 1.

Figura 1. Subdivisões do Sistema Nervoso Central.



Fonte: http://psicologiaibmr2009.blogspot.com/2009/03/aula-1-funcoes-e-divisao-do-sistema.html.

Cosenza e Guerra (2011), afirmam que, sob a ótica da Neurociência, o fenômeno da "aprendizagem" pode ser assim definido:

> [...] uma facilitação da passagem da informação ao longo das sinapses. Mecanismos bioquímicos entram em ação, fazendo com que os neurotransmissores sejam liberados em maior quantidade ou tenham uma ação mais eficiente na membrana pós-sináptica. Mesmo sem a formação de uma nova ligação, as já existentes passam a ser mais eficientes, ocorrendo o que já podemos chamar de aprendizagem [...] (Cosenza; Guerra, 2011, p. 38).

Esses autores trazem que uma aprendizagem mais sólida requer a construção de novas ligações sinápticas, "[...] sendo necessário, então, a formação de proteínas e de outras substâncias. Portanto, trata-se de um processo que só será completado depois de algum tempo” (Cosenza; Guerra, 2011, p. 38). Por meio da Neurociência, temos começado a compreender como o cérebro funciona e suas relações com os processos inerentes ao ato de aprender, conhecimento que vem subsidiando o campo pedagógico com bases teóricas para que possamos entender as bases neurais, tanto da aprendizagem, quanto de funções cognitivas como a memória, a atenção, a concentração, as emoções e muitas outras que são estimuladas e aprimoradas em cada aula (Falco; Kuz, 2016). Com isso, experimentamos o interesse sobre quais conhecimentos neurocientíficos podem contribuir para a Educação, em particular a Neurociência cognitiva.

Compreender a relação entre estímulos e a otimização da aprendizagem é vital e, nesse sentido, conhecer o funcionamento do cérebro pode ser um fator importante para determinar quais estratégias de ensino permitem potencializar a aquisição de saberes pelos alunos (Falco; Kuz, 2016). A NC se estende à educação para contribuir nesse ensino e, no contexto da educação, é desafiada a explicar a importância do professor, a consideração dos processos cognitivos internos para uma melhor aprendizagem.

Os estudos de autores como Gazzaniga (2006), Cosenza e Guerra (2011) e Relvas (2012) ajudam a compreender melhor esse processo, pois explicam como ocorre o mecanismo de capacitação e decodificação da informação no processo de ensino e aprendizagem, atenção, codificação sensorial, entre outros tópicos que tem grande importância nessa ação. O conhecimento deriva das interações recorrentes e do estado emocional em que nos encontramos, pois é a emoção que nos conduz à ação (Maturana, 2002). Esta constatação evidencia que o envolvimento emocional é pressuposto para a aprendizagem. Desta forma, o estudante aprende o que o motiva, emociona e deseja, ou seja, aquilo que tem significado para seu cotidiano. E ainda, entendemos que esse processo tem uma relação importante na questão da motivação, como parâmetro significativo para uma metodologia de aprendizagem.

Quando o professor compreende como a neuroplasticidade possibilita a reorganização das estruturas do SNC, ele passa a selecionar recursos de ensino multissensoriais, pois estes ativam as múltiplas redes neurais que estabelecem associação entre si. Atividades envolvendo repetição de informações e experiências favorecem a neuroplasticidade e produzem sinapses mais consolidadas (Cruz, 2016). No entanto, há mais descobertas a serem feitas, acerca de outros fatores, na interlocução Neurociência e

Educação, particularmente, com o desenvolvimento de novas pesquisas com esse objetivo de contribuir para entender a aprendizagem de maneira mais ampla. Relvas (2007) destaca que as aprendizagens perpassam pelas sinapses, conexões neurais, envolvimento e interação no ambiente social, pois já que o cérebro é plástico, pode sofrer modificações.

A aprendizagem passa a ser o processo pelo qual o cérebro reage aos estímulos do ambiente, ativando sinapses, tornando-as mais "intensas". O ensino bem-sucedido provoca alteração na taxa de conexão sináptica, afetando a função cerebral, dependendo da natureza do currículo, da capacidade do professor, do método de ensino, do contexto da sala de aula, da família e da comunidade (Inácio, 2011). Nova aprendizagem implica em rearranjo das redes neuronais, reforço de outras sinapses e ampliação de possíveis respostas ao ambiente. Bartozseck (2003, p. 4), relaciona os princípios da Neurociência com a aplicação potencial no ambiente da sala de aula, quando ser professor supõe pensar em estratégias didáticas que possibilitem tornar os conceitos relevantes para o aprendiz, usando, apoiado pela Neurociência as linguagens da mente (visual, auditiva e cinestésica), o professor pode usar os recursos mais adequados, facilitando a aprendizagem dos alunos (Samá; Fonseca, 2019).

Para Bortoli e Teruya (2017), um dos caminhos para conhecer melhor a aprendizagem é considerar os estudos da NC, como contribuição para elaboração de estratégias didáticas fundamentadas na neurobiologia do aprendizado (Cosenza e Guerra, 2011). A aprendizagem diz respeito ao processo pelo qual o conhecimento é adquirido e/ou modificado (Rodrigues, 2016). Este processo de aquisição "tem início na estimulação sensorial e termina com o seu armazenamento e recuperação (memória), através da representação interna que criamos das informações recebidas" (Rodrigues, 2016, p. 3).

Deste modo, a aprendizagem ocorre devido à plasticidade das redes neurais que se auto-organizam, em contínua mudança estrutural, em função de estímulos externos (por meio dos sentidos) e internos (por meio, por exemplo, da memória). No entanto, estímulos externos ao aluno não podem determinar sua aprendizagem, apenas desencadeá-la como um agente perturbador (Maturana; Varela, 2005). Assim entram em cena, como agentes perturbadores, o professor, as estratégias didáticas, os colegas de aula e os demais elementos do ambiente de aprendizagem, todos estímulos externos.

Tais perturbações podem desencadear diferentes mudanças estruturais em cada estudante; os autores citados defendem que estratégias didáticas que façam uso de recursos multissensoriais podem estimular a ativação de múltiplas redes neurais com associações entre si. Conforme aprendem novos comportamentos advém do conjunto de células nervosas ou redes neurais que constituem o sistema nervoso e são adquiridos pelo processo de aprendizagem. Este, por sua vez, requer várias funções cognitivas, como emoção, memória, atenção, percepção, e, portanto, depende do cérebro (Guerra, 2011).

Conforme Samá e Fonseca (2019), as vivências que vierem acompanhadas de fortes emoções serão melhor recuperadas no futuro. Consequentemente, o desencadeamento de emoções favorece o estabelecimento de memórias e, por isso, podemos dizer que são as emoções que orientam a aprendizagem, ou seja, aprendemos aquilo que nos emociona.

Toda informação que será decodificada, processada e armazenada no córtex passa antes pelo sistema límbico, gerador das emoções. As conexões emocionais do sistema límbico provocam a liberação de neurotransmissores relacionados, tanto ao prazer/satisfação, que facilitam a aprendizagem, quanto ao desprazer, os quais bloqueiam a aprendizagem. Desta forma, quanto mais prazerosa for a atividade pedagógica proposta pelo professor, mais fácil a internalização do conteúdo pelo estudante (Metring, 2011; Guerra, 2011).

Para Silva e Scheffer (2020), a formação e a evocação de memória, segundo Izquierdo (2011), são processos mediados por sinapses. Ao compreendermos que todas as funções envolvem sinapses, a melhor forma de aprimorá-las e conservá-las é pelo exercício ou pela prática. Sendo assim, algoritmos e resolução de problemas, por exemplo, devem fazer parte do cotidiano das aulas de Matemática. Diante das constatações deste estudo, depreendemos que os jogos digitais contribuem para o aperfeiçoamento das funções cognitivas de atenção e memória, bem como favorecem a aprendizagem matemática. Desse modo, pesquisas que aproximam os conhecimentos da Neurociência e da Educação podem contribuir com os processos pedagógicos relativos ao ensinar e ao aprender.

Relacionando Matemática e Neurociência, Bravo (2010) afirma que segundo a teoria de localização cerebral, a atividade Matemática se apresenta, em maior medida, no lobo frontal e parietal do cérebro, pois aí se registra um maior consumo de energia com a atividade Matemática, nas regiões denominadas sulco intraparietal e inferior. Para o autor, a região parietal inferior controla o pensamento matemático e a capacidade cognitiva viso-espacial. Porém, salienta que as tarefas complexas do processamento matemático se devem à orientação simultânea de vários lobos do cérebro, pois a simples resolução de um problema que necessita de uma operação aritmética requer habilidades verbais, espaciais, conceituais, aritméticas e raciocínio. O avanço tecnológico ocorrido nas últimas décadas propiciou acesso direto a mecanismos do funcionamento cerebral, de modo que hoje podemos estudar crianças e adultos realizando operações matemáticas, observando sua atividade neural em tempo real, bem como o impacto de diferentes condições emocionais sobre a atividade cerebral (Bastos, 2008; Sternberg, 2008).

Neurobiologia da aprendizagem matemática

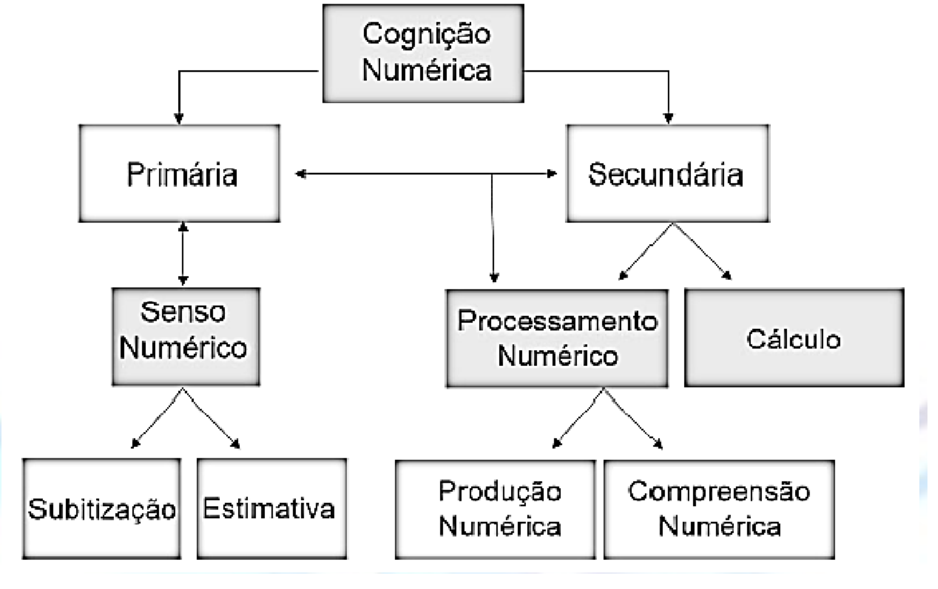
Segundo Alvarenga (2018), a aprendizagem de matemática requer a mobilização de vários sentidos, como o visual e ou o tato e ou a audição, além de ativar as áreas cerebrais responsáveis por tais sentidos. Além disso, temos ainda outras áreas requeridas: a da linguagem, da memória, da percepção, da atenção, e ainda ativamos as relacionadas às emoções. Um aspecto que colabora muito para o entendimento da oralidade matemática é a expressão dela pelo indivíduo e, tendo uma linguagem própria enquanto ciência, a abordagem da matemática por meio da escrita informal e, principalmente a formal, concorre para que se organize melhor as estruturas cognitivas. Existe a necessidade de traduzir a linguagem matemática para a língua materna e vice-versa, em várias atividades, de modo que existe uma ligação intrínseca entre essas linguagens. Então, "para produzir aprendizagem, nosso cérebro processa informações emocionais e cognitivas" (Migliori, 2013, p. 45), a partir da relação que há entre memória e aprendizagem. Essa autora aponta que, dentre as áreas mais evoluídas do cérebro, os lóbulos pré-frontais são responsáveis pelas funções executivas, as quais se manifestam onde se requer atributos como criatividade, respostas rápidas a novos problemas, planejamentos e flexibilidade cognitiva (Migliori, 2013).

Ainda em Alvarenga (2018), encontra-se a afirmação de que parte dessas funções consiste em desenvolver modelos mentais desses processos sobre "como", "porque" e "quando". Assim, ao desenvolvê-las, fica revelada a progressiva transformação de que a abordagem do conhecimento centrada nos aspectos "o que" e "onde" para o propósito de "como", "porque" e "quando" utilizar tal conhecimento em comportamentos dirigidos a metas. Tais funções também funcionam de forma conjunta e sistêmica. Alvarenga (2020) relaciona as áreas corticais com a aprendizagem matemática, baseada em um levantamento de trabalhos de vários autores que ela consultou, tanto quanto a aprendizagem de conteúdo como quanto a habilidades mentais.

Pesquisas sobre cognição numérica, ou as bases cognitivas e neurais dos números e da compreensão matemática (Weinstein, 2014), apresentam uma divisão das habilidades matemáticas em biologicamente primárias ou secundárias. As primárias desenvolvem-se sem a necessidade de instrução e estão ligadas à capacidade de aproximação numérica e à numerosidade ou subitização[2] (Rykhlevskaia *et al*., 2009); já as secundárias requerem instrução e prática, sendo caracterizadas pelo desenvolvimento da habilidade espacial formando, assim, a conhecida – linha numérica mental – que consiste na representação dos números ao longo de uma linha, sendo esta a base que permitirá o cálculo mental (Kaufmann *et al*., 2011).

As pesquisas sobre Cognição Numérica (CogN) são uma possibilidade de compreender como o conceito de número é construído pelo cérebro humano. Desse modo, este estudo considera a CogN como um sistema constituído de habilidades matemáticas relacionadas ao senso numérico, processamento numérico e cálculo. A CogN se desenvolve no decorrer da vida, além disso, é uma habilidade inata e que pode ser ampliada do decorrer do seu neurodesenvolvimento (Dehaene, 2011). Na CogN, as habilidades matemáticas dependem, também, de fatores educacionais, culturais e biológicos. Dessa forma, o ambiente, os estímulos e as intervenções, por exemplo, contribuem para o neurodesenvolvimento da CogN. Eis o esquema:

Figura 2. Organização funcional da Cognição Numérica



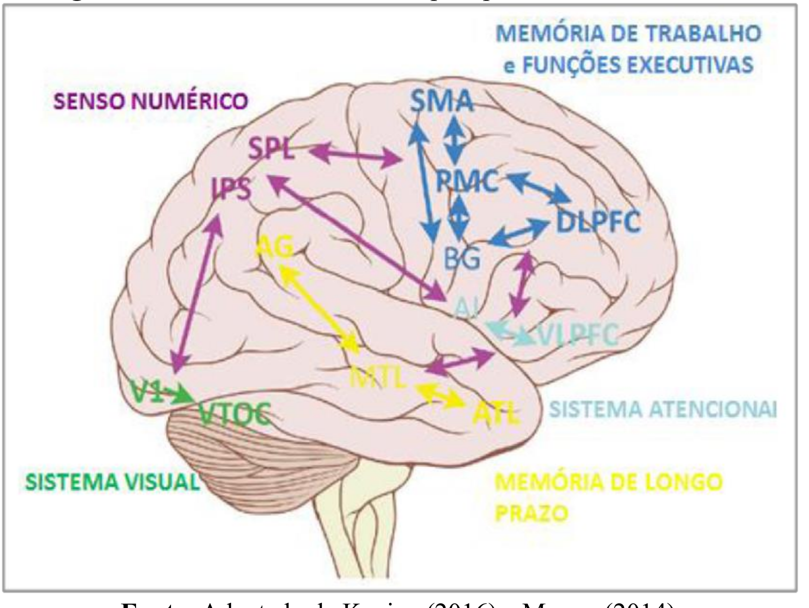
Fonte: Santos (2017).

[2] Refere-se à habilidade inata de contagem de pequenas quantidades.

A estrutura funcional da CogN está organizada em duas estruturas: primária e secundária. Na sua estrutura primária encontra-se o senso numérico formado pela subitização ou *subitizing* (refere-se à habilidade inata de contagem de pequenas quantidades) e pela estimativa (refere-se à facilidade para discriminar quantidades maiores de menores). Na sua estrutura secundária encontra-se o processamento numérico, que antecede a habilidade de realizar cálculos, formado pela produção numérica (refere-se à habilidade de ler, escrever e contar números e objetos) e a compreensão numérica (refere-se à habilidade de compreender a natureza simbólica dos números). Nesta estrutura tem-se o cálculo, ou seja, os fatos aritméticos básicos (adição, subtração, multiplicação e divisão) entre valores menores que dez, que pode, progressivamente, ser ampliado para valores maiores por meio dos algoritmos tradicionais ensinados na escola.

Na estrutura funcional secundária da CogN destaca-se a linha numérica mental como sendo a base da ordinalidade e do pensamento aritmético (Santos, 2017) para a consolidação de determinadas habilidades matemáticas, como o cálculo. É possível fazer inferências sobre o desenvolvimento do processamento numérico por crianças a partir da observação da forma como posiciona algarismos numa linha numérica de 0 a 100 escrita no papel. Simplificando, podemos resumir na figura mais adiante o modelo da rede neural para processamento numérico.

Figura 3. Modelo da rede neuronal para processamento numérico.



Fonte: Adaptado de Kucian (2016) e Menon (2014).

Na imagem temos em verde - Regiões do córtex occipital (córtex visual primário (V1), córtex ventro-temporo-occipital (VTOC)). Em lilás - Sulco intraparietal (IPS) e o lobo parietal superior (NPS). Em azul - Áreas parietais (IPS, giro supramarginal) e córtex pré-frontal (córtex pré-motor (PMC), área motora suplementar (SMA), córtex pré-frontal dorsolateral (DLPFC)) e subcorticais (Núcleos da Base, do inglês basal ganglia (BG)). Em amarelo - Giro angular (AG), lobo temporal anterior (ATL) e temporal médio (MTL). Em azul claro - Ínsula anterior (AI) e córtex pré-frontal ventrolateral (VLPFC).

Neste aspecto, segundo Kucian (2016) e Menon (2014) podemos didaticamente diferenciar o processamento das habilidades aritméticas em cinco redes neurais básicas: a Identificação Visual, que corresponde às regiões do córtex occipital [córtex visual primário (V1)], córtex ventro-temporo-occipital (VTOC), as quais decodificam a entrada visual para o processamento de magnitudes, dígitos arábicos entre outros; o Senso Numérico, que compreende o sulco intraparietal (IPS) e o lobo parietal superior (NPS) trabalhando em conjunto para formar a representação visuoespacial para quantificação, as regiões no lobo parietal representam as áreas centrais da compreensão numérica, também conhecidas como o local de formação do senso numérico no cérebro; as Funções Executivas e Memória de Trabalho, correspondendo às áreas parietais (IPS, giro supramarginal) e córtex pré-frontal [córtex pré-motor (PMC), área motora suplementar (SMA), córtex pré-frontal dorsolateral (DLPFC)] que, juntamente com áreas subcorticais [Núcleos da Base, do inglês basal ganglia (BG)], estão envolvidas na formação da Memória de trabalho e circuitos das funções executivas, criando uma hierarquia de representações de curto prazo que permitem a manipulação de entrada numérica durante vários segundos.

A penúltima rede é constituída pela Memória de Longo Prazo, que compreende o giro angular (AG) no córtex parietal, bem como em regiões temporais, incluindo o lobo temporal anterior (ATL) e temporal médio (MTL), além de importantes áreas subcorticais, como o hipocampo e a amígdala são responsáveis pela formação da memória de longo prazo para fatos numéricos e a última rede é constituída pelo Sistema Atencional, infra ínsula anterior (AI) e o córtex pré-frontal ventrolateral (VLPFC) guiam os processos pré-frontais relacionados ao Sistema Atencional, guiando e mantendo o comportamento na resolução de problemas direcionados a um objetivo.

A rede responsável pelo Senso Numérico é considerada o bloco básico da construção aritmética cerebral, pois coordena a diferenciação de magnitude e cardinalidade do número, além de realizar manipulações da quantidade numérica (Menon, 2014). Há, inclusive, estudos sobre o fluxo sanguíneo regional durante a execução de cálculos matemáticos, onde áreas parietais inferiores e o córtex pré-frontal são ativados nesse processo, captados em estudos por tomografia com emissão de pósitrons (PET) e ressonância magnética funcional (RMF) também corroboram esses achados.

Evidências genéticas, neurobiológicas e epidemiológicas indicam que a aprendizagem matemática envolve ambos os hemisférios, embora a área parietotemporal apresente um especial significado (Butterworth; Varma; Laurillard, 2011). As áreas occipitotemporais inferiores de ambos os hemisférios, as quais estão envolvidas no processo de identificação visual que originam a forma dos números arábicos. A área perissilviana esquerda está envolvida na representação verbal dos números, já as áreas parietais inferiores de ambos os hemisférios estão envolvidas na representação analógica quantitativa.

O processamento numérico e aritmético envolve funções cognitivas relacionadas à memória, atenção, percepção motora e espacial. O córtex pré-frontal está associado a diversos processos cognitivos, sendo exigido em tarefas de cálculo matemático, nas quais desempenha um papel crucial no monitoramento, escolha de estratégia, planejamento e manipulação de informações numéricas (Kucian, 2016). Um adequado processamento aritmético é favorecido pela integridade visual, auditiva e atencional, auxiliando na decodificação visual de forma, das características fonológicas do estímulo, e pelo lobo parietal associado ao Sistema Atencional favorecendo a construção das representações semânticas de quantidades numéricas (Menon, 2014).

O universo aritmético faz parte do cotidiano de todo ser humano desde cedo, o fazer matemática está relacionado à apresentação de ideias, no processo de escutar uma outra pessoa, formulação e divulgação de procedimentos, na resolução de problemas, na previsão ou antecipação de resultados. Portanto, a cognição numérica faz parte de grande parte dos nossos processos de tomada de decisão, na produção de conhecimento e não está restrita apenas à execução de instruções. Dessa forma, o desenvolvimento aritmético desempenha um papel fundamental na formação de cidadãos autônomos (BRASIL, 1998; 2017).

O uso de jogos como recurso didático é uma alternativa eficiente que permite o desenvolvimento da criatividade e a formação do raciocínio lógico. Sendo um recurso lúdico que leva à motivação para a aprendizagem, ampliam a autoconfiança, a organização, a concentração, a atenção e o raciocínio dedutivo (Fiorentini; Miorim,1990; Attout; Majerus, 2014; Silva, 2006; Gomes, 2014). Jogos são recursos com os quais os educandos podem produzir e compreender conceitos matemáticos de forma intuitiva, além de incentivarem a criação de estratégias de forma lúdica (Ramos; Mohn; Campos, 2019; Grando, 2000).

Também no contexto da Neurociência, podemos constatar que as tecnologias também podem auxiliar e potencializar a aprendizagem por meio dos processos cognitivos que ela descreve. Assim, passamos agora a integrar as Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) ao contexto já estabelecido até aqui.

Metodologia

Apresentamos três atividades envolvendo números, pensadas à luz das orientações da Neurociência, pois podem mobilizar vários sentidos e áreas do cérebro referentes a habilidades mentais, tais como atenção, percepção, concentração, raciocínio, entre outras.

A primeira atividade é voltada para os anos iniciais do Ensino Fundamental, usando a tecnologia da Plataforma *GeoGebra,* especificamente o *Geobolinha*, um programa criado a partir da referida Plataforma e voltado para crianças, com o conteúdo "contagem"; a segunda, é um jogo concreto intitulado "Cálculo *Plus*", voltado para os anos finais do ensino fundamental e o ensino médio, envolvendo inicialmente as operações fundamentais podendo ser ampliadas para outras; e a terceira atividade, virtual, também corresponde a um jogo salto de rã, além de habilidades com a tecnologia do computador, os estudantes atuam com os comandos do teclado, associados com o conteúdo "indução finita", que é um conteúdo matemático hoje voltado para o ensino superior e uma atividade respondida em um arquivo do *Word* após sessões de jogo, onde os movimentos do mesmo são associados ao conteúdo e cujo número mínimo de movimentos necessários ao alcance do objetivo pode ser provado com a sua dinâmica.

Para cada atividade, apresentaremos o conteúdo subjacente e as habilidades mentais mobilizadas durante o desenvolvimento da mesma. Destacamos que os comentários feitos a partir do trabalho com os jogos são informais, e fruto de observações em diferentes ambientes de ensino e momentos do currículo.

Além dos pesquisadores e seus respectivos monitores, participaram da investigação estudantes do curso de Pedagogia, de Matemática e também da Educação Básica que visitaram um laboratório de ensino ou oficina de atividades plurissensoriais de matemática.

Primeira atividade – Anos Iniciais do Ensino Fundamental

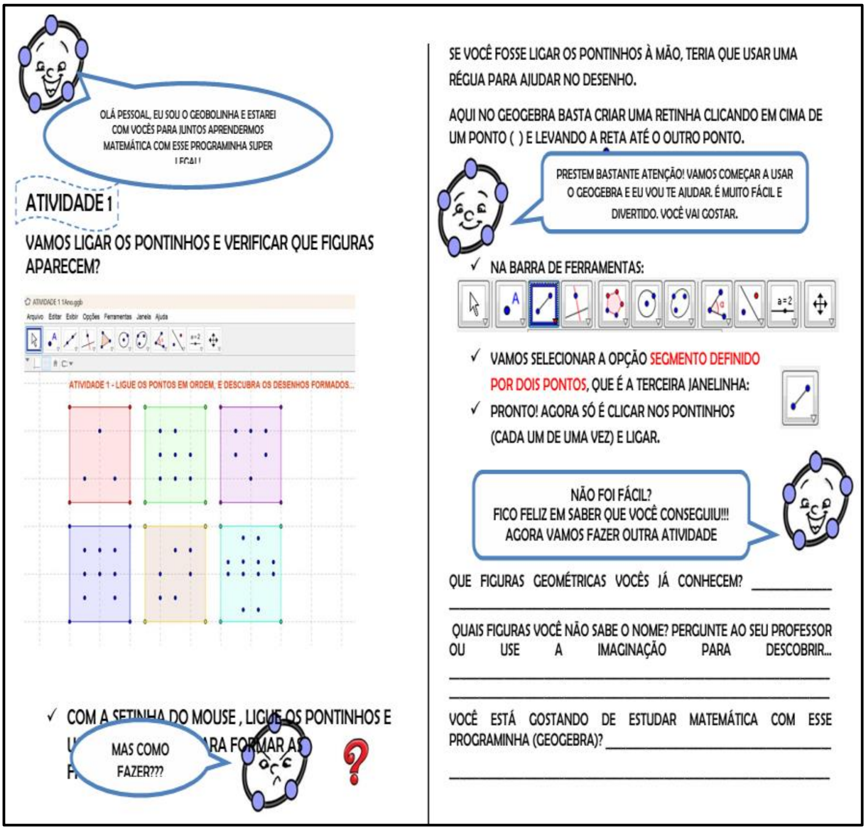
A criança desenvolve a atividade dentro da Plataforma *GeoGebra*, no programa *Geobolinha*, em que tomará contato com a tecnologia do computador, os comandos digitais, mobilizando habilidades mentais (Kucian, 2016) como a atenção, concentração, o conteúdo matemático, a contagem, a associação. Junto a isso, deverá realizar uma atividade impressa com os resultados obtidos. Ela deverá mobilizar a contagem e expressar quantidades inteiras com números (Bastos, 2008), bem como fazer associação de quantidades em dois conjuntos numéricos.

Notamos que no início o *Geobolinha* se apresenta, dá dicas e sugere ludicamente uma primeira atividade, numa linguagem comunicativa e incentivadora, discutindo os modos de executá-la, mostrando ainda os comandos no texto. O estudante deve inicialmente ligar os pontos à vontade. Antes da segunda atividade, há uma sondagem sobre figuras geométricas, onde o foco será o número de lados da figura, e o aluno deve ligar pontos de mesma cor para identificar a figura formada e contar o número de lados. Aqui observamos que durante a aplicação da atividade, as crianças mostram-se curiosas e inquietas, perguntando sobre os comandos (Kaufmann *et al*., 2011), testando-os, mostrando um semblante maravilhado a cada descoberta e a concentração ao realizarem cada atividade.

A seguir ilustra-se o modelo da mesma.

- Início da atividade:

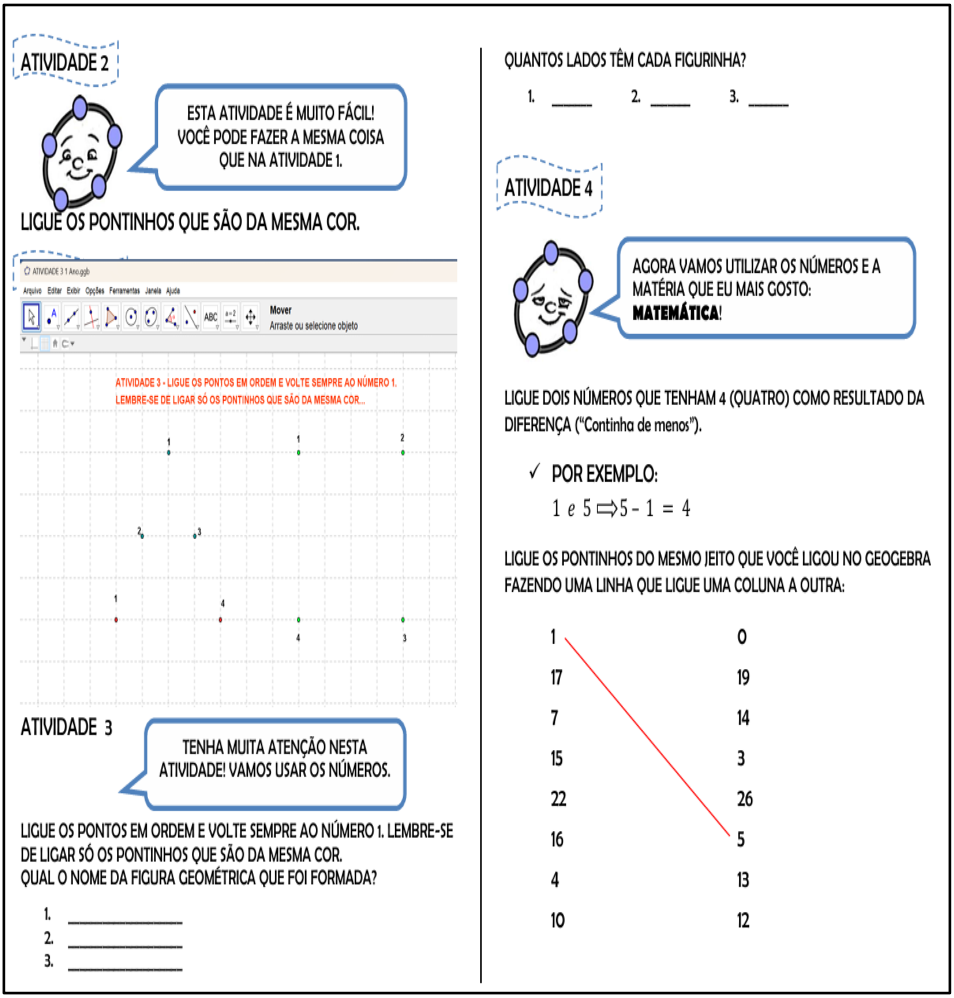
Figura 4. Atividade 1



Fonte: Elaborada pelos autores.

Sequência da Atividade:

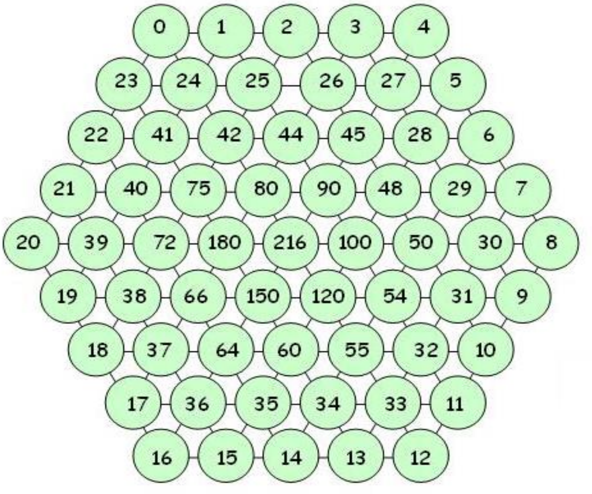
Figura 5. Atividade 2



Fonte: Elaborada pelos autores.

O segundo jogo é o Cálculo Plus, voltado para os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio. É um jogo de duas a quatro pessoas, em que se mistura estratégia com acaso um sendo oponente de todos e vice-versa. Uma imagem do tabuleiro é mostrada na Figura 6, a estrutura e as regras expostas no Quadro 1.

Figura 6. Tabuleiro do Cálculo Plus



Fonte: https://experienciasmatematicaslorena.wordpress.com/wp-content/uploads/2015/02/cc3a1lculo-plus.pdf

Quadro 01. Estrutura e Regras do Jogo Cálculo Plus

NÍVEL	A partir do 4ª ano, envolvendo expressões numéricas.
ESTRUTURA	Tabuleiro, três dados e fichas para cobrir os valores dos tabuleiros.
REGRAS ORIGINAIS	Joga uma pessoa de cada vez, escolhendo quem inicia. Na sua vez de jogar, o jogador lança três dados. Com os valores resultantes, compõe uma expressão com as quatro operações e cobre o valor correspondente ao resultado, até cobrir todo o tabuleiro. Se não puder cobrir nenhum número, passa a vez.
VARIAÇÃO DA REGRA SUGERIDA	Joga uma pessoa de cada vez, escolhendo entre os jogadores quem inicia. Os jogadores decidem quais operações podem ser utilizadas na expressão. Por exemplo, no 6º ano, pode incluir potenciação; no 7º ano, pode incluir a potenciação e a radiciação. No ensino médio, pode escolher fatorial, logaritmo, exponencial, etc.. Na sua vez de jogar, o jogador lança os três dados, forma uma expressão, e com o resultado dela cobre um número descoberto. Se não cobrir nenhum número, passa a vez.
OBJETIVO ORIGINAL	Cobrir o maior número possível de grupos de três valores vizinhos. Ganhará o jogo o jogador que tiver obtido o maior número de grupos.
VARIAÇÃO DE OBJETIVO SUGERIDA	Cobrir antes dos outros jogadores três números em linha reta, em qualquer direção.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Essa atividade envolve expressões com operações numéricas. É indicada para fixar o conteúdo, que auxilia no aprendizado, já que pratica as operações, e mobiliza habilidades mentais, como atenção, percepção, plano de ação, estratégia (Dehaene, 2011). O jogador pode tecer caminhos para formar várias possibilidades, quando conseguir cobrir três fichas em triângulo, que traz até seis possibilidades de completar as três fichas em uma das três direções. Também pode atuar para "atrapalhar" o oponente, impedindo-o de completar as três fichas alinhadas, colocando uma terceira ficha dele antes.

Nessa atividade, notamos a grande concentração dos alunos para escolher as expressões mais vantajosas para fazer as jogadas, pedindo, às vezes, para usar a calculadora, o que permitimos. Mostram satisfação em participar do jogo, alegria ao ganharem, e recorrerem aos dados para a atividade escrita, mostrando associação entre os processos mentais e aspectos da atividade.

Quadro 02. Atividade com o Cálculo Plus

Atividade com o Cálculo Plus

Questão 1 - Responda às seguintes questões, utilizando as quatro operações fundamentais:

a) É possível obter o resultado 16 com os valores 4-4-1? Como?
b) É possível obter o resultado 0 com os valores 6, 3 e 2? De que maneira?
c) Utilizando, além das quatro operações, a potenciação e a radiciação, você poderia obter os resultados dos itens anteriores, incluindo uma destas operações em sua expressão? Em caso afirmativo, de que maneira (s)?
d) **(Ensino Médio)** E se você puder acrescentar o fatorial às suas operações, você poderia obter os mesmos resultados, incluindo o fatorial em sua expressão?

Questão 2 – Suponha que você lançou os dados e o resultado obtido foi 4-4-4. Sendo as operações permitidas adição, subtração, multiplicação e divisão, responda:

a) É possível cobrir o valor 1? De quantas maneiras? E o 4? Quais são elas?
b) É possível cobrir o número 10? Caso sim, como? Caso não, por que?
c) Que outros valores podem ser cobertos?

Questão 3 (Ensino Médio) – Agora, considere serem as operações possíveis no jogo adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação, radiciação e fatorial.
Com os três dados, é possível cobrir o número:

a) 123? De que maneira (s)?
b) E o número 6 usando somente fatorial e apenas outra operação?

Questão 4 – Considere que no lançamento dos dados você obteve 5-2-4. Elabore e escreva na tabela abaixo cinco expressões diferentes possíveis de formar com as operações do item anterior e os valores possíveis de serem obter:

Expressão	Valor obtido

Questão 5 – Que valores poderão ser formados com os números 1-1-1 e as quatro operações?

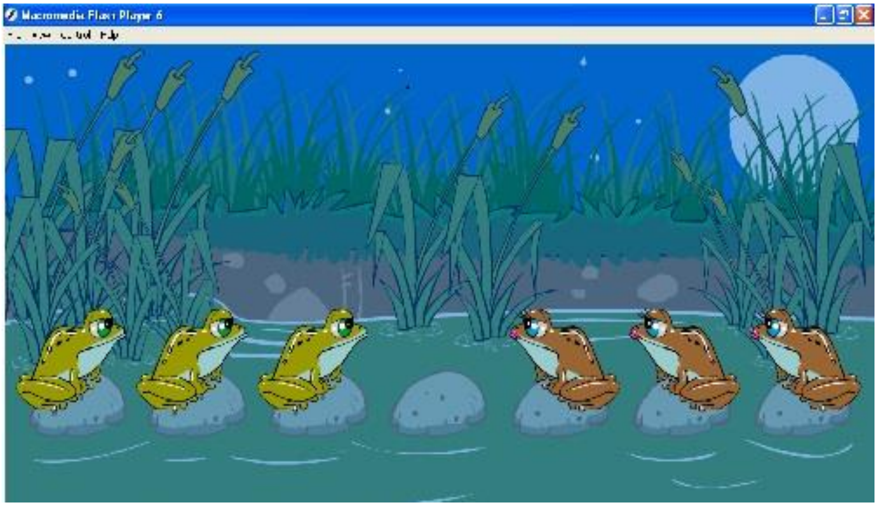
Questão 6 – Quantos valores poderão ser formados ao todo, com as quatro operações e três números diferentes?

Questão 7 – Como ganhar nesse jogo?

Fonte: Elaborado pelos autores.

A terceira e última atividade é o salto de rã. Voltada para o ensino superior, essa atividade envolve a indução finita como conteúdo matemático. O jogo tem a modalidade concreta e a virtual, e vamos mostrar a tela do jogo virtual “resolver o jogo das rãs” e a estrutura abaixo.

Figura 7. Como resolver o jogo das rãs



Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=bvfnu1Y5VfE

Este jogo é individual, no cenário aparecem dois grupos com a mesma quantidade de rãs, sobre pedras enfileiradas e uma pedra livre no meio. Cada grupo de rãs de um lado da pedra livre. Para movimentar, clica-se sobre um animal, fazendo-o dar um pulo à frente, ocupando a pedra à sua frente ou pulando sobre o animal vizinho, ocupando uma pedra livre logo após ele. Caso não consiga se movimentar, o jogador reinicia o jogo. O objetivo é que os grupos mudem de lugar, conforme exposto na Figura 8. Quando o jogador faz um movimento errado, o animal não pula.

Figura 8. Imagem do final do jogo das rãs

Fonte: https://www.youtube.com/watch?v=bvfnu1Y5VfE

O conteúdo subjacente ao jogo é basicamente contagem, mas a movimentação dos animais segue um padrão que resulta numa quantidade de movimentos que depende do número de animais em cada grupo. Esta quantidade é expressa por um número natural, assim, é estabelecida uma relação matemática entre o número de animais em cada grupo e o número total de movimentos necessários para atingir o objetivo. Uma discussão matemática permite estabelecer que esta quantidade de movimentos M(n) para n animais em cada grupo é $n^2 + 3n$, provado por indução finita. Com esses dados, temos a atividade aplicada:

Quadro 03. Atividade para o ensino superior.

Atividade para o ensino superior

Os estudantes abrem o jogo no computador, o professor distribui uma folha impressa contendo a estrutura do jogo, regras e objetivos. Depois, propõe as seguintes questões:

1. Preencher a tabela com, dado o número de animais em cada lado:

Nº de animais em cada grupo "n"	Número de pulos *pu*	Nº de passos "pa"	Número de movimentos M(n)	Sequência de movimentos (pulos e passos)	Aumento de movimentos com mais um par de animais A (n)
1					
2					
3					
...					
N					

2. É possível estabelecer uma fórmula matemática para, dado um número qualquer de peças por grupo, calcular o número total de passos, pulos, aumentos e movimentos?
Obs: i) No caso de se estar abordando funções, o domínio é discreto, neste caso, o conjunto dos números naturais; portanto, não se pode pedir um gráfico contínuo, pois será um conjunto de pontos isolados. É possível construir um diagrama de Venn-Euler.
ii) Para o ensino superior, a atividade pode ser complementada para o número total de movimentos:

3. Prove por indução que o número total de movimentos para o jogo com dois grupos de n peças é $2n + n^2$."

Fonte: Elaborado pelos autores.

Comentamos que para esse jogo, a estratégia de vitória requer um maior esforço para a generalizar a contagem; isso requer que funções cerebrais atuem plenamente, permitindo atuar no sentido de chegar ao objetivo.

Discussão e considerações

As atividades aqui apresentadas foram propostas em alguns momentos de estudo e desenvolvimento de aulas e sinalizaram que a mobilização de habilidades mentais e atividade cerebral facilitam o aprendizado, estimulam o raciocínio, a concentração, a criatividade, potencializando a aprendizagem dos indivíduos. Os jogos, tanto físicos quanto virtuais, são ferramentas instrucionais que divertem enquanto motivam, e contribuem com o aprendizado e o aumento da capacidade de retenção do conteúdo, além de propiciarem o exercício de funções mentais e intelectuais do indivíduo que joga. Ao jogar, o indivíduo entra em um mundo paralelo de “faz de conta” no qual estão presentes incertezas e desafios que devem ser ultrapassados em busca do entretenimento (Grando, 2000).

As teorias de aprendizagem, juntamente com os fundamentos da Neurociência Cognitiva, auxiliam o professor a compreender melhor como o aluno aprende, podendo, portanto, lançar mão de processos, atividades e recursos que facilitem a aprendizagem, colaborando com o desenvolvimento integral do mesmo enquanto indivíduo.

Ressaltamos que este trabalho não termina aqui, pois enquanto pesquisadores, em busca de aperfeiçoamento do nosso trabalho docente, consideramos importante aprofundar as pesquisas em ambientes físicos e virtuais, paralelamente à evolução dos estudos sobre Neurociência.

Concluímos que ao recorrer aos princípios da Neurociência, compreendendo os processos cerebrais, o professor entenderá melhor como o indivíduo aprende. Certamente o professor que ensina matemática, ampliará seu leque de ferramentas para pensar e planejar ações e intervenções, elaborar materiais e atividades mais efetivas, tendo, consequentemente, condições de promover um ensino, que resultará em uma melhor aprendizagem.

Referências

ALVARENGA, K. B. Contribuições das Neurociências para a Educação Matemática. **In: Memorias I CONVIBE-FORPRO** - Congreso Virtual Iberoamericano sobre formación de professores de matemática, ciencias y tecnologia. Natal: UFRN, 21-23 noviembre, 2018.

ALVARENGA, K. B. Ciência Cognitiva e Matemática. In: NEVES, Regina Pina da Silva; DÖRR, Raquel Carneiro (orgs.). **Cenários de pesquisa em Educação Matemática.** 1ª ed. São Paulo: Paco Editorial, 2020.

BARTOZSECK, A. B. **Neurociência na Educação.** Curitiba, 2003. Disponível em: http://nead.ucs.br/pos_graduacao/Members/419745-30/artigo%20neurociencias%20%20educacao.pdf. Acesso em: 12 abr. 2017.

BASTOS, J. A. (Org.) **O cérebro e a matemática**. 1. ed. São José do Rio Preto: Independente, 2008.

BORTOLI, B.; TERUYA, T. K. Neurociência e Educação: Os Percalços e possibilidades de um caminho em construção. **Imagens da Educação**, 7(1), 70-77, 2017.

BRASIL. **Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil**. Brasília: MEC; SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/volume3.pdf. Acesso em: 28 jun. 2020.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular: educação é a base**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em:

http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 28 set. 2020.

BRAVO, J. A. F. Neurociencias y enseñanza de la Matemática: prólogo de algunos retos educativos. **Revista Iberoamericana de Educación**, Madrid, n. 51/3, p. 1-12, 25 jan. 2010.

BUTTERWORTH, B; VARMA, S; LAURILLARD D. Dyscalculia: from brain to education. **Science**, v. 27, n. 6033, p. 1049-1053, 2011. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/51169475_Dyscalculia_From_Brain_to_Education. Acesso em: 29 jun. 2020.

COSENZA, R. M.; GUERRA, L. B. **Neurociência e educação**: como o cérebro aprende. Porto Alegre: Artmed, 2011.

CRUZ, L. H. C. Bases neuroanatômicas e neurofisiológicas do processo ensino e aprendizagem. 2016. In: **III Curso de Atualização de Professores de Educação Infantil, Ensino Fundamental e Médio.** A Neurociência e a Educação: como nosso cérebro aprende? Disponível em: https://www.repositorio.ufop.br. Acesso em: 26 out. 2020.

DAMÁSIO, A. **O erro de Descartes:** emoção, razão e o cérebro humano. Rio de Janeiro: Cia das Letras, 1995.

DEHAENE, S. **The Number Sense: how the mind creats mathematics**. 2. ed. New York: Oxford University Press, 2011.

DICAS E RESOLUÇÕES. Como resolver o jogo dos sapos - Teste de QI. Vídeo disponível no YouTube: https://www.youtube.com/watch?v=bvfnu1Y5VfE. Publicado em: 23 mai. 2017.

FALCO, Mariana; KUZ, Antonieta. **Comprendiendo el Aprendizaje a través de las Neurociencias, con el entrelazado de las TICs en Educación.** Revistas TE & ET, n°17, 2016.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, M. A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. **Boletim da SBEM**. SBM: São Paulo, a. 4, n. 7, 1990.

FIORI, N. **As neurociências cognitivas**. Petrópolis, RJ: Vozes, 2008.

GARDNER, H. **Frames of mind:** the theory of multiple intelligences. New York: Basic Books, 1983.

GAZZANIGA, M. S. *et. al*. **Neurociência Cognitiva**: a biologia da mente. Porto Alegre: Artmed, 2006.

GRANDO, R. C. **O conhecimento matemático e o uso de jogos na sala de aula**. Tese de Doutorado. Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Campinas, UNICAMP, 2000. Disponível em: http://repositorio.unicamp.br/jspui/bitstream/REPOSIP/251334/1/Grando_ReginaCelia_D.pdf. Acesso em: 15 out. 2020.

GUERRA, L. B. **O diálogo entre a neurociência e a educação: da euforia aos desafios e possibilidades**. Revista Interlocução, v. 4, n. 4, p. 3-12, 2011.

INÁCIO, S. R. L. **A importância das neurociências na aprendizagem e educação**. Disponível em: http:// www.artigos.com/artigos/humanas/educacao/a-importancia-da-neurociencia-na-aprendizagem-e-educacao.- 5206/artigo/. Acesso em: 6 nov. 2011.

IZQUIERDO, I. **A arte de esquecer**: cérebro e memória. 2. ed. Rio de Janeiro: Vieira & Lent, 2011.

KAUFMANN, L., WOOD, G., RUBINSTEN, O., HENIK, A. Meta-analyses of developmental fMRI studies investigating typical and atypical trajectories of number processing and calculation. **Developmental Neuropsychology**, v. 36, p.763–787, 2011.

KUCIAN, K. Developmental dyscalculia and the brain. In: BERCH, D. C.; GEARY, K.; MANN KOEPKE, K. (Eds.), Mathematical cognition and learning: V. 2. **Development of mathematical cognition: Neural substrates and genetic influences**, p. 165–193, 2016. Elsevier Academic Press. Disponível em: https://doi.org/10.1016/B978-0-12-801871-2.00007-1. Acesso em: 10 jul. 2020.

LENT, R. **Cem bilhões de neurônios**: conceitos fundamentais de neurociência. 2. ed. São Paulo: Editora Atheneu, 2004.

MATURANA, H. R. **Emoções e linguagem na educação e na política**. Belo Horizonte: Editora UFMG. 2002.

MATURANA, H. R.; VARELA, F. **A árvore do conhecimento: as bases biológicas da compreensão humana**. 5. ed. São Paulo: Palas Athena, 2005.

MENON, V. Arithmetic in the child and adult brain. In: R. Cohen Kadosh; A. Dowker (Eds.), **The oxford handbook of numerical cognition**. Oxford: Oxford University Press, p. 1-23. 2014. Disponível em: https://med.stanford.edu/content/dam/sm/scsnl/documents/Menon_Arithmetic_in_the_Child_14.pdf. Acessado em: 15 jan. 2020.

METRING, R. A. **Neuropsicologia e aprendizagem: fundamentos necessários para planejamento do ensino**. Rio de Janeiro: Wak Editora, 2011.

MIGLIORI R. **Neurociências e Educação**. São Paulo: Editora Brasil Sustentável, 2013.

OLIVEIRA, M. A. D. **Neurologia básica**. Canoas, RS: ULBRA, 2005.

PIAGET, Jean. **O Juízo Moral na Criança**. São Paulo: Summus, 1994.

PONTE, J. P. Estudos de caso em educação matemática. **Bolema**, *25*, 105-132, 2006.

RAMOS, L. F. **Conversas sobre números, ações e operações**: uma proposta criativa para o ensino da matemática nos primeiros anos. São Paulo: Ática, 2009.

RAMOS, M. L. S.; MOHN, R.F.F.; CAMPOS, R.C. Vivendo e aprendendo a jogar: ensinando matemática por meio de jogos. **Educação Matemática em Revista**, Brasília, v. 24, n. 63, p. 91-107, jul/set. 2019. Disponível em: http://sbem.iuri0094.hospedagemdesites.ws/ revista/index.php/emr/article/view/1753. Acesso em: 20 out. 2020.

RELVAS, M. P. **Fundamentos biológicos da educação**. Rio de Janeiro: Wak, 2007.

RODRIGUES, P. F. S. Processos Cognitivos Visuoespaciais e Ambiente Visual Circundante: Implicações Educacionais. **Psicologia: Teoria e Pesquisa**. 32(4), 1-10, 2016.

RYKHLEVSKAIA, E.; UDDIN, L. Q.; KONDOS, L.; MENON, V. Neuroanatomical correlates of developmental dyscalculia: Combined evidence from morphometry and tractography. **Frontiers in Human Neuroscience**, v.3, n. 51, p. 3-51, 2009.

SAMÁ, S.; FONSECA, L. Projetos De Aprendizagem Sob As Lentes Da Neurociência Cognitiva: Possibilidade Para A Construção De Conceitos Estatísticos. **REVEMAT**, Florianópolis (SC), v.14, Edição Especial Educação Estatística, p.1-16, 2019.

SANTOS, F. H. **Discalculia do desenvolvimento**. São Paulo: Pearson, 2017.

SEIBERT, T. E.; GROENWALD, C. L. O. Contribuições das neurociências para a educação matemática de uma pessoa com necessidades educativas especiais intelectivas. **In: Revista Educação Especial** | v. 27 | n. 48 | p. 233-248 | jan./abr. 2014, Santa Maria. Disponível em http://www.ufsm.br/revistaeducacaoespecial. Acesso em 12 jun. 2021.

SILVA, S. L. D.; SCHEFFER, N. F. Aprendizagem matemática com jogos digitais online: um estudo fundamentado a partir da Neurociência. **In: Revista de estudos e pesquisas sobre o ensino tecnológico.** Educitec, Manaus, v. 05, n. 11, p. 04-15, jun. 2020

SILVA, S. L. D.; SCHEFFER, N. F. O jogo digital on-line e as funções cognitivas de atenção e memória em Matemática: um estudo em neurociências. **In: RBECM**, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 150-171, jan./jul. 2020

SILVA, W. **Discalculia:** Uma Abordagem à Luz da Educação Matemática. 2006. Monografia. p. 1- 45. Universidade Guarulhos, Guarulhos, 2006.

STERNBERG, R. J. **Psicologia cognitiva**. 4.ed. Porto Alegre: Artmed, 2008.

WEINSTEIN, M. C. A. Neurociência ajuda a ensinar matemática. **In: Revista Neuroeducação**, edição 241, agosto de 2014.

4 - A contagem na constituição do conceito de número: implicações para a sala de aula

Ana Maria Porto Nascimento
Cristiano Alberto Muniz
Márcia Rodrigues Leal

Introdução

Neste capítulo, parte-se da premissa de que a ação de contar é fundamental no processo de construção do conceito de número. Apresentam-se, então, algumas reflexões acerca das contribuições da oferta de situações de contagem para o avanço na constituição das quantidades numéricas, de modo a favorecer a aprendizagem da enumeração verbal, da relação entre palavra-objeto contado e entre ordem e cardinalidade. Para tanto, descreve-se algumas ações da criança, durante a construção de uma Coleção de Tampinhas[3], destacando a ação do professor e as possíveis modificações de sua forma de mediação no percurso de realização da contagem.

Indagamos sobre a aprendizagem de uma ação simples (física e mental) e ao mesmo tempo complexa, que é a quantificação de objetos em uma coleção. Realizamos uma delimitação conceitual quanto à quantificação discreta, no caso, de uma Coleção de Tampinhas, refletindo sobre a complexidade do conceito de número e dos procedimentos de contagem, enquanto processos sociocognitivos produzidos pelo sujeito aprendente. Nesse entendimento, tomamos a contagem não apenas como uma recitação (aportada sobre processos sociolinguísticos), mas como uma síntese cognitiva produzida processual e organicamente, por meio de habilidades que associam processos de verbalização, psicomotores, visuais e representacionais.

[3] O Projeto Coleção de Tampinhas teve como foco a construção do número em situações de contagem de objetos e produção de registros matemáticos. Projeto este que foi realizado durante o desenvolvimento da pesquisa de doutoramento da primeira autora deste capítulo, Nascimento (2016).

Por isso, o foco das reflexões, aqui apresentadas, se dividiu em observar a ação do sujeito em processo de aprendizagem e acompanhar as ações e intervenções do professor, pois, entende-se que essas são fundamentais para apoiar e mediar a constituição do conceito de número.

Concebemos que alfabetizar em matemática requer a compreensão dessa complexa síntese realizada pelo sujeito em processo de alfabetização matemática. Colecionar tampinhas exige da criança o desenvolvimento de habilidades implicadas na ação de contar como: a coordenação viso-motora-verbal e o desenvolvimento de esquemas mentais fundamentais para os processos de alfabetização, os quais devem sustentar os processos pedagógicos operados pelo professor alfabetizador.

Algumas reflexões teóricas

É possível entender a alfabetização matemática como um complexo processo de aprendizagem dos conceitos iniciais de matemática (Danyluk, 2002), relacionados a números, operações, grandezas, medidas, formas, localização, orientação, deslocamento, estatística, probabilidade e estimativa. Considera-se ser este um processo em que, no envolvimento cognitivo e socioemocional com situações problemas, a criança constrói e mobiliza os conceitos e suas representações, de modo que a construção da aprendizagem venha a requerer uma apropriação que é realizada pela criança no desenvolvimento da tarefa proposta.

No âmbito da alfabetização matemática, aspectos como a motivação, o engajamento, o encantamento, o desejo e a esperança pela atividade devem ser parte inerente à proposta de trabalho do professor alfabetizador. Nesse contexto, o protagonismo da construção feita pelo sujeito depende fortemente do quanto ele se engaja na atividade e do quanto se mobiliza emocional e cognitivamente, definindo, assim, o grau de intensidade e de mobilização do sujeito aprendente.

Notamos que esse processo se inicia fora do contexto escolar e continua sendo aperfeiçoado e ampliado, quando se ingressa na escola, seja por meio das experiências realizadas na Educação Infantil, seja nos primeiros anos escolares do Ensino Fundamental. Assim, alfabetizar-se matematicamente implica aprender a linguagem matemática, conhecer os objetos matemáticos, identificar, resolver e propor situações-problemas, desenvolver registros e argumentação oral lógica, comunicar as estratégias de solução e, principalmente, mobilizar os conceitos matemáticos em diferentes situações, ao longo da sua trajetória na Educação Básica, bem como no Ensino Superior.

Consideramos como base teórica para nossa compreensão em relação a constituição do conceito de número, as indicações de Piaget e Szeminska (1975) sobre a noção de inclusão e conservação; os estudos de Kamii (1990), Vergnaud (1990) e Panizza (2006), sobre o conceito de número; os resultados de pesquisas de Lerner Zunino (1995), sobre as hipóteses referentes a escrita e a leitura de números; e, ainda, as discussões de Spinillo (2014), sobre sentido numérico.

Destacamos algumas reflexões de Castro e Rodrigues (2008) sobre o sentido do número para as crianças. De acordo com as autoras, é por meio do uso em diferentes contextos que se desenvolve o sentido do número (Fuson, 1987 *apud* Castro, Rodrigues, 2008), tais como: o contexto da contagem oral, em que o sujeito realiza a enumeração dos termos da sequência sem intenção de contar; o contexto da contagem de objetos, neste caso, existe um objetivo de contar e, segundo as autoras, o sujeito pode já fazer uma associação entre os termos da sequência numérica e os objetos contados; o contexto da cardinalidade, neste cenário ao utilizar os termos, o sujeito pode dar conta de responder às perguntas "quantos tem", ou seja, de acordo com as autoras, já existe uma referência à numerosidade de um conjunto discreto de objetos; o contexto de medida, em que se tem a descrição da numerosidade em situações relativas a uma dimensão contínua.

Castro e Rodrigues (2008) identificam também um contexto ordinal, em que a partir de um ponto inicial específico, indica-se uma posição relativa a este ponto. E, ainda, tem-se o contexto não numérico, pois em determinadas situações utiliza-se os termos da sequência numérica para diferenciar ou identificar elementos particulares e indicação de códigos não numéricos. Esses diferentes contextos podem e devem ser explorados nas ações e intervenções do professor alfabetizador.

Em relação aos resultados discutidos por Fuson (1987), afirmam Castro e Rodrigues (2008) que, de modo geral, podemos considerar a sequência numérica como um dos mais importantes instrumentos das primeiras aprendizagens matemáticas. Segundo as autoras, trata-se de um processo estruturado em que as crianças constroem padrões referentes a segmentos da sequência numérica e desenvolvem capacidades de estabelecer relações entre os termos dos segmentos. Ao haver uma estabilização das relações, a sequência passa a ser compreendida e, a partir desse momento, a criança faz uso dela de modo flexível, resultando em procedimentos de contagem mais elaborados.

Ao referir-se ao campo da constituição do conceito de número pela criança, entendida enquanto sujeito ativo nos processos de construções de seus conceitos e procedimentos cognitivos, Muniz (2020) destaca o papel do processo de contagem, ressaltando a ideia de conceitualização matemática. O autor reafirma que a aprendizagem matemática se realiza nas experiências socioculturais que exigem a quantificação, a comparação, o enumeramento, a identificação de quantidades e quantias, sendo que algumas habilidades se encontram na base da psicogênese do processo de conceitualização matemática, especificamente dos 3 aos 10 anos de idade.

Neste contexto, para Muniz (2020) é essencial à criança poder: - realizar correspondência biunívoca(um-a-um); - recitar oralmente a contagem; - nomear a coleção ao identificar a quantidade, percebendo a inclusão hierárquica; - realizar o processo de zoneamento; - conservar a quantidade independente da posição dos objetos, da cor ou da forma. Sintetiza assim essas habilidades, reforçando que a contagem, como uma estratégia para quantificar, é uma atividade cognitiva complexa, alertando que o alfabetizador faça distinção entre a simples recitação oral e o ato de contar (Muniz, 2020). O alfabetizador deve, segundo Muniz (2020), oportunizar situações de quantificações, sejam elas discretas (objetos isolados, iguais ou não iguais, próximos ou longe, fixos ou móveis) ou contínuas (que requer a medida a partir de escolha prévia de uma unidade de medida). Para esse pesquisador, as tarefas que envolvem quantificação devem ser múltiplas e variadas, de modo a incentivar múltiplas estratégias de contagem.

E, mais especificamente em Bertoni (2007), em uma produção destinada à formação de professores dos anos iniciais, encontramos uma síntese a respeito de como ocorre o processo de enumeração. A autora chama a atenção para o fato de que as crianças apreciam decorar a cadeia numérica verbal e que "por volta dos dois anos, sabem "recitar" de 1 a 10 ou até mais" (Bertoni, 2007, p. 14). Ela afirma ainda, que a alfabetizadora pode usar a cadeia numérica verbal como instrumento auxiliar na aprendizagem dos números, desde que observe que:

> A aprendizagem da enumeração verbal dos números não pode se resumir a uma simples memorização de uma sequência de palavras ordenadas. Essa aprendizagem decorada é necessária no início da apropriação dos primeiros termos da cadeia, a saber: as unidades de 1 a 9, as dezenas e o nome dos números de 11 a 15. Fora isso, a criança deve descobrir e aplicar as regras linguísticas que sustentam a organização do sistema (Bertoni, 2007, p. 14).

Apoiada nas ideias das professoras belgas Delhaxhe e Godenir (1992), que realizam estudos sobre a construção de ideias matemáticas na Educação Infantil, Bertoni (2007) afirma que é preciso observar que a cadeia numérica verbal apresenta:

> - termos arbitrários (palavras em cadeia), estabelecidos por mera convenção, como um, dez, treze, quarenta, cem.
> - termos que têm uma expressão aritmética, em que a quantidade é expressa por uma decomposição aritmética dos termos usados.
> - uma estrutura que supõe a memorização de termos e de sua ordem, mas igualmente supõe a compreensão de regras de formação dos números expressas por uma decomposição (Bertoni, 2007, p. 14-16).

No entanto, a pesquisadora adverte que a aprendizagem da enumeração verbal dos números não pode se resumir a uma simples memorização de uma sequência de palavras ordenadas, pois o processo de enumeração envolve, ainda, a compreensão e a coordenação de diversas competências, assentando-se sobre quatro pontos fundamentais:

> 1. A utilização ordenada dos nomes da cadeia numérica: as palavras da cadeia numérica devem ser pronunciadas numa ordem permanente.
> 2. A correspondência única: para enumerar ou contar corretamente, é preciso não contar duas vezes o mesmo objeto e não esquecer nenhum. Cada objeto deve estar pareado a uma palavra, e a uma só, da cadeia numérica.
> 3. A organização da ordem de contagem (invariância ou conservação do número): a sucessão na qual os objetos da coleção devem ser contados não tem importância, mas é necessário que a criança saiba distinguir os que já contou dos que ainda deve contar.
> 4. O princípio cardinal: Contar não é somente ir dizendo os nomes dos números e aplicá-los, um após o outro, aos elementos. Contar é quantificar. O último número-palavra pronunciado designa a quantidade de objetos contidos na coleção. Essa última etiqueta, atribuída ao último objeto, tem um significado especial: ela nos informa a quantidade de elementos da coleção. Em termos matemáticos, ela nos informa qual é o cardinal da coleção (Bertoni, 2007, p. 14-16).

Segundo esta autora, as crianças deveriam utilizar as palavras-número para quantificar, isto é, para estabelecer precisamente a quantidade de objetos ou o número de elementos contidos em uma coleção (Bertoni, 2007), como é o caso, por exemplo, da Coleção de Tampinhas que será apresentada nas seções a seguir.

A partir dessas reflexões, que se apoiam em alguns referenciais teóricos, pode-se inferir que o professor alfabetizador, além de dominar os conceitos matemáticos, deve estar imerso no trabalho de pensar e planejar como aproximar o sujeito desses conceitos. Isso demanda um conhecimento pedagógico, psicológico e matemático, como afirma Schulman (1986), um conhecimento que engloba o domínio conceitual. Essas indicações teóricas e práticas podem apoiar a elaboração e implementação de ações e intervenções na sala de aula.

Contar, contar, contar, ..., e contar

O projeto "Coleção de Tampinhas" teve como foco a construção do número em situações de contagem de objetos e produção de registros matemáticos. Sendo realizado em uma escola pública da rede municipal de ensino, tendo como colaboradoras: oito professoras alfabetizadoras e duas coordenadoras pedagógicas, além dos estudantes das turmas de 2º e 3º ano, dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. As ações e intervenções deste projeto foram pensadas e planejadas nos horários destinados à coordenação. Nesses horários, reuniam-se as professoras, as coordenadoras e a pesquisadora. Os registros eram compartilhados e discutidos com o orientador de pesquisa.

A proposta de colecionar tampinhas surgiu quando foi observado que algumas situações de contagem estavam inseridas no plano de trabalho do professor alfabetizador, mas as ações e intervenções para exploração dessas situações, de modo a oportunizar o desenvolvimento das habilidades, apontadas nos aportes teóricos aqui apresentados e, tão necessárias à conceitualização do número de forma harmônica e compreensível, ainda careciam ser planejadas de forma a considerar as implicações teóricas em uma prática que consolidasse a aprendizagem esperada.

Nas turmas de 2º ano os planos previstos para o trabalho de *numerização*, ou seja, para mediar o processo de construção do conceito de número pela criança (Bertoni, 2007), indicavam que os números de 1 a 20 seriam estudados na primeira unidade. Essa delimitação tomava por base um diagnóstico assistemático feito pelas professoras e coordenadoras, que conheciam a escola em que as crianças haviam cursado o 1º ano e sabiam das dificuldades que poderiam impedir as crianças de ir além do número 20 na primeira unidade, pois, nem todas as crianças cursaram a Educação Infantil e ocorreram experimentações de alguns programas estaduais e federais que provocaram interrupções no curso de trabalho das alfabetizadoras, o que teve impacto na aprendizagem das crianças do 1º ano. Assim, durante as primeiras semanas as intervenções priorizaram a contagem de 1 a 10.

As crianças que estavam no 2º ano do Ciclo de Alfabetização já convivem, desde cedo, em diversas situações, com quantidades bem superiores a 20, como por exemplo, nos momentos de consulta ao calendário, vivência com pequenas compras, esporte, meios de comunicação, jogos, entre outros. Mesmo sem compreender a estrutura do Sistema de Numeração Decimal, as crianças conseguiriam avançar na contagem, na leitura e na escrita dos números, fazendo corresponder o nome do número com a quantidade contada, coordenando a verbalização e o gesto de apontar para o objeto contado, realizando o zoneamento dos objetos, revelando a noção de inclusão e conservação, conforme definem Piaget e Szeminska (1975) e mais recentemente Kamii (1990) e Vergnaud (1990).

O questionamento naquele momento, foi: como discutir com as professoras e convencê-las do potencial das crianças para contar além do 20, quantificar, relacionar quantidade e símbolo, sequenciar? Na terceira semana de aula, os conteúdos e objetivos ainda tinham como foco a sequência até 20.

A intenção de explorar a relação entre a quantidade e sua representação escrita, realizando a contagem com apoio em material manipulável, já havia sido expressa nos objetivos de alguns os planos de trabalho. No entanto, a perspectiva de protagonismo da criança ficava em cheque, uma vez que não era dada à ela a oportunidade de experienciar situação que permitisse coordenar o olhar, os gestos e a verbalização.

Nossa hipótese é que nem a observação ou a estrita verbalização são insumos cognitivos suficientes para engendrar os processos autorais da construção de esquemas mentais (Vergnaud, 1990) vitais para a aprendizagem do conceito de número.

No recorte do plano de trabalho apresentado a seguir na Figura 1, vimos que as ações rotineiras como exploração do calendário (números de 1 a 30 ou 31), exploração da chamada (quantidade de meninos e de meninas presentes ou ausentes na aula), ofereciam oportunidades de fazer matemática. Possivelmente por ser algo recorrente, tais ações pareciam estar no plano de aula de modo automático, com inserção nas rotinas pedagógicas de forma cartorial e, por conseguinte, perdendo seus sentidos originais, a saber, sua função de promover contextos reais e significativos de quantificação.

Essas propostas, vistas de outro modo, seriam potenciais espaços de aprendizagem de conceitos matemáticos como os de tempo, números, operações, lateralidade e espacialidade. No recorte do plano ainda se observa a proposta de contagem de palavras e versos do poema, mas na aula, isso ocorria de modo muito rápido, em descompasso com o tempo de aprendizagem da criança.

Figura 1. Plano de trabalho 2º ano.

Atividades de rotina: oração, músicas, conversa informal…,
Exploração do calendário: que dia é hoje? **quantos dias** faltam para o domingo? **quantos dias** da semana já se passaram? **quantos dias** faltam para terminar essa semana?
Exploração da chamadinha: organizar os nomes em grupos de vogais e consoantes, **contar** e questionar **quantos** nomes começam com vogais e **quantos** começam com consoantes, que grupo tem **mais** nomes, que grupo tem **menos**…
Momento deleite: Texto informativo - curiosidades sobre o João-de-barro Atividade de leitura e escrita:
Leitura natural, feita pela professora, do texto base
Leitura didática acompanhada pelos alunos através do texto fatiado colado no caderno
Contar e numerar os versos do poema
Solicitar que identifiquem no texto o **verso número 8**, registrá-lo no quadro, **contar** quantas palavras aparecem nessa frase, pintar os espaços entre as palavras, (...)

Fonte: Nascimento (2016, p. 102).

Salientamos nesta parte do plano a possibilidade de exploração do calendário. Observamos que nas quatro perguntas feitas às crianças, nota-se a presença do termo “quantos”, o que pode indicar o uso do calendário, não apenas para auxiliar a criança na percepção do tempo, mas para apoiar a contagem e propor operações. Podemos destacar que o “quantos” refere-se a dias. Além disso, no calendário a quantificação/contagem dos dias se faz em quadradinhos, em forma de uma trilha diferenciada, numerada sequencialmente. Assim, a criança conta quadradinhos espacialmente posicionados, em modo sequencial, tipo tabela de linhas e colunas, e fala em DIAS, o que acaba por revelar uma fenomenal possibilidade de construção de representação simbólica (contar a passagem temporal dos dias, contando quadradinhos), que é estrutura fundamental no processo de alfabetização global.

Os alfabetizadores, em alguns casos, deixam de observar este fato, acabando por transformar a exploração do calendário em uma ação rotineira, perdendo a oportunidade de explorar todo o potencial desse recurso pedagógico e cultural-matemático. Enfim, as noções implicadas no conceito de tempo, como sucessão e duração, baseadas na percepção, nem sempre eram trabalhadas. Essas observações nos provocam a reflexão sobre a formação inicial da alfabetizadora, uma vez que tal formação ainda carece de um espaço definido e institucionalizado, tanto nas *práxis* pedagógica, quanto na formação e nas orientações curriculares.

Quanto ao conceito de número, apesar de aparentemente ser o mais explorado nas turmas do Ciclo de Alfabetização, o seu processo de constituição ainda carece de ser melhor compreendido por algumas alfabetizadoras. A vivência de situações de contagem, como proposta para oportunizar a quantificação, a comparação de quantidades, a correspondência biunívoca, a construção das relações de ordem e inclusão hierárquica (Kamii, 1990; Panizza, 2006) algumas vezes não é tão valorizada, pois pode demandar tempo e espaço para dispor as crianças e os materiais de contagem e pode provocar uma certa "desordem" na sala que "tumultua" a aula, pois gera movimentos, debates, sonorização, conversas, argumentações, trocas, justificativas, discordâncias, para os quais alguns alfabetizadores ainda não estão aptos a considerar como essenciais nos processos de Alfabetização Matemática.

Ocorre que a não vivência dessas situações pode implicar no não desenvolvimento de habilidades que são a base para a constituição do conceito de número. Observa-se que a alfabetizadora não precisa se preocupar em informar a criança que irá, de forma estanque, explorar a ordem, a inclusão, a correspondência, a quantificação, a comparação; o mais importante são as ações e intervenções de modo que a criança possa vivenciar situações nas quais essas estruturas mentais possam se constituir, fazendo com que o conceito de número esteja em processo de formação.

A elaboração de um plano de trabalho que considere as especificidades do processo de formação de conceitos matemáticos exigiria da alfabetizadora entender o que significa alfabetizar, em especial, o que significa Alfabetização Matemática, sobretudo quanto ao protagonismo da criança em seu processo de construção de aprendizagens conceituais e procedimentais. Além de dominar os conceitos, seria necessário saber como aproximar a criança, que está no Ciclo de Alfabetização, desses conceitos. Isso demandaria que, em seu processo formativo o professor constituísse, de fato, um conhecimento pedagógico, psicológico e matemático do conteúdo a ser ensinado, concordando com Schulman (1986).

Em um dos planos de trabalho notamos que apesar do tempo da aula de matemática ser de uma hora e meia, estavam previstas: a construção de uma linha do tempo, a exploração oral de situações problemas, a abordagem da presença dos números no dia a dia e a proposição de situações que seriam resolvidas com uso do material concreto. Cada uma dessas atividades demandaria tempo para ser realizada pela criança que, repetimos, está no processo de se aproximar dos conceitos e mobilizá-los em situações escolares que têm uma natureza diferenciada das situações cotidianas.

E, é possível ver na Figura 2, que no primeiro e no segundo momento de uma aula, aparecem interessantes situações de contagem: contar quantas vezes a palavra "passarinho" aparece no texto, quantas letras tem essa palavra, quantas vogais e quantas consoantes, contar quantas vezes a letra P aparece no texto, entre outras.

Figura 2. Atividades previstas para a aula.

Leitura didática do texto base
Solicitar que alguns alunos identifiquem no texto a palavra-chave passarinho
Contar quantas vezes ela aparece, pedir que algum aluno mostre na tabela numérica o numeral correspondente. Leitura da palavra-chave: **passarinho.**
Destacar a primeira letra e a última da palavra-chave, **quantas** letras tem a palavra, **quantas** vogais e consoantes.
Contar quantas vezes a letra P aparece no texto
2°momento:
Após o intervalo fazer a leitura do livro **"A casa das dez furunfunfelhas"-** interpretação oral da história fazendo questionamentos relacionados aos conceitos matemáticos.
Observar na sala de aula objetos que podemos contar, o que há em quantidade 10, mais de 10, explorar a tabela numérica, calendário, propor algumas situações problemas (poderá utilizar material de contagem).
Desenvolvimento do jogo dominó de numerais e quantidades, falar sobre as regras, dividir a turma em grupos de 3 ou 4 e jogar com os alunos.
Exploração e realização da atividade no livro didático de matemática p.10 e 11.

Fonte: Nascimento (2016, p. 105).

Conforme exposto na Figura 2, registramos que antes do intervalo, durante a exploração do texto-base na aula de Português, foram propostas algumas atividades que poderiam ter sido mais aprofundadas no retorno das crianças. No entanto, momento seguinte - previsto no plano como "aula de matemática" -, o que se observa é a proposta de exploração do livro *A casa das dez furunfunfelhas*, com a intenção de levantar questionamentos relacionados aos conceitos matemáticos, além de explorar a tabela numérica, o calendário, o dominó e ainda uma situação problema do livro didático de Matemática. Logo, a questão que levantamos não é sobre a pertinência das tarefas, mas como a alfabetizadora estima o tempo necessário para que a criança compreenda a tarefa e a execute de forma consciente, sendo capaz de criar estratégias de resolução que mobilizem os conceitos exigidos em cada proposta.

No registro da Figura 2, fragmento do plano é possível perceber que muitas tarefas eram previstas para um tempo bastante limitado. Ressaltamos ainda, que na Figura 3, o que está em negrito foi um questionamento sobre a quantidade e a diversidade de conteúdo para as duas semanas, o que levanta preocupações sobre a viabilidade e a profundidade do trabalho pedagógico proposto.

Figura 3. Recorte do Plano de Trabalho.

Conteúdos:

Matemática ((Veja, parece-me muito conteúdo para 04 aulas - 2 aulas semanais??))

1. Sistema de numeração decimal.
2. Problemas envolvendo centena, dezena e unidade.
3. Sequência numérica até 100.
4. Escrita dos números por extenso.
5. Estimativa.
6. Noções de adição.
7. Formas geométricas planas.

Objetivos:

- Desenvolver o cálculo mental e a estimativa de resultados;
- Realizar a contagem de números até 100, observando as regularidades da sequência com o apoio da tabela numérica, estabelecendo relação entre número e quantidades;
- Resolver situação problemas envolvendo unidade, dezena e centena adicionando-lhe a ideia de juntar e acrescentar.
- Escrever o nome dos números por extenso;

Fonte: Nascimento (2016, p. 107).

Mesmo que não de forma intencional ou consciente, no plano de trabalho foram previstas situações em que a ação de quantificar estava presente e todo esse conjunto de situações poderia contribuir para aprendizagem (Vergnaud, 1990). A questão que não era levada em conta referia-se ao tempo de aprendizagem e a ação da criança nesse processo, muitas vezes não previstos e não imaginados aprioristicamente pelo alfabetizador, o que tornava o processo de mediação pedagógica um fenômeno complexo, pois somente no diálogo, ao longo do processo de construção pela criança, é que o educador pode tecer seus processos pedagógicos de interação mediadora ou seja suas ações e intervenções.

Diante dessas observações, no encontro de estudos, foi colocado em discussão o significado da alfabetização em matemática e iniciamos pelo conceito de número, pois houve a opção de não interferir na lógica sequencial de trabalho com os conteúdos. Foi então, apresentado ao grupo algumas situações resultantes de pesquisa, em que crianças de uma escola pública, em condições semelhantes às vivenciadas pelas crianças daquela escola, conseguiram envolver-se em situações de contagem e avançar na quantificação e na representação das quantidades, inclusive com a leitura da tabela numérica de 1 a 100 e de números maiores que 100.

Disponibilizamos para o grupo algumas orientações de Bertoni (2007), Muniz (2007, 2014), Toledo (2009), Zunino (1995) e propusemos uma tarefa acessível a todas as crianças: fazer coleções de tampinhas. Elas iriam colecionar tampinhas, quantificá-las, registrar as quantidades individuais e as quantidades do total da sala. Mesmo reticentes e sem saber o que poderia acontecer, as professoras aceitaram a proposta. Esse fato nos remeteu às afirmações de Skovsmose (2008) sobre “zona de risco” contraposta a “zona de conforto”.

Enfim, o grupo inseriu no plano de trabalho o projeto “Coleção de Tampinhas”. O desenvolvimento do projeto consistiu em dividir a turma em grupos e solicitar que cada um deles trouxesse a quantidade de tampinhas de garrafas *pet* que conseguissem juntar. Na aula, as crianças organizadas em grupos, iriam contar as tampinhas de cada participante do grupo e registrar o total a cada dia. Foi reservado um momento na aula de matemática, em um dia da semana, para realizar a contagem das tampinhas e o registro das quantidades de cada grupo.

Nas turmas de terceiro ano as atividades iniciaram já com o registro em tabelas (Figura 4). Observamos que nessas turmas as atividades eram mais sistemáticas, pois, as crianças cursaram o 2º ano na escola, então, eram, de acordo com as coordenadoras, mais preparadas e poderiam ser mais exigidas.

Figura 4. Recorte do Plano de Trabalho.

4º momento: Matemática

- 1º passo- Dividir a turma em grupos e solicitar que eles façam a contagem das tampinhas de sua coleção, façam o registro na ficha que cada grupo deve ter.

QUADRO DE REGISTRO DA COLEÇÃO DE TAMPINHAS

NOME	DATA	DATA	DATA	DATA	DATA	DATA	TOTAL INDIVI.
TOTAL GERAL DO DIA							TOTAL GERAL

2º Passo-fazer análise e problematização dos resultados. Quem tem mais tampinhas? Esta quantidade e mais ou menos que cem? O grupo (A)tem este(x) valor, de quanto eles precisam para chegar a tanto (x)? ...

Fonte: Nascimento (2016, p. 108).

Como o potencial das crianças ainda era desconhecido pelas professoras, o trabalho tornou-se muito complicado, pois as crianças traziam as tampinhas e as professoras tinham de conferir com cada uma das crianças as quantidades individuais e depois ajudar no registro das quantidades dos pequenos grupos e da tabela. Isso fez com que a atividade ocupasse mais tempo do que o esperado pelas alfabetizadoras. Refletimos porque não atribuir ao coletivo tal tarefa, desenvolvendo processos autorregulatórios, tão importantes para o desenvolvimento da autonomia intelectual matemática. Na Figura 5, que se segue, tem-se as atividades do 2º ano.

Figura 5. Recorte do Plano de Trabalho para o 2º ano.

2º momento:
Relembrar a proposta feita no início da aula de fazer uma coleção de tampinhas.
Apresentar aos alunos uma coleção (tampinhas, palitos, cartas, figurinhas, bilas, canudos) e dizer que você não sabe quantos tem, por isso precisa da ajuda deles para contar.
Dividir a turma em 4 ou 5 grupos e distribuir uma quantidade indeterminada de objetos da sua coleção para que os alunos contem e registrem essa quantidade em uma folha. A professora irá acompanhar os grupos para observar as estratégias de contagem utilizadas pelos grupos.
Após a contagem, cada grupo irá apresentar o resultado e registrar no quadro o numeral.
Observando os resultados dos grupos registrados no quadro fazer os questionamentos:
- Quantos objetos o grupo 1 contou, o grupo 2, o 3...? – Que grupo contou mais, qual contou menos? -Houve grupos com a mesma quantidade? – Que número indica a maior quantidade? – Que número indica a menor quantidade? – E agora, como vamos fazer para saber quantos objetos tem no total?
Deixar que os alunos apresentem as soluções.
Lançar o desafio da estimativa: Se juntarmos os objetos de todos os grupos, quantos teremos no total?
Registrar no quadro a estimativa de cada grupo para que no final da contagem possa fazer comparação entre as estimativas e o resultado real.
((Será que não é bom dá um tempo para que eles tentem encontrar o total? Usem estratégias próprias como proposto o objetivo 3... o professor pode acompanhar os grupos sem pressa para ver o que vai acontecer.))
Escrever no quadro a operação que será realizada ex: 25+32+28+37. **((Esperar um pouco))**
Fazer junto com os alunos a adição dos objetos de todos os grupos da seguinte forma, ex: o grupo 1 contou 25 objetos e o grupo 2 contou 32, então temos 25+32. Explicar que eu já tenho 25 e por isso não preciso contar de novo essa quantidade, para adicionar a outra quantidade 32 basta continuar contando a partir do número que vem depois do 25 e assim sucessivamente com os valores dos demais grupos até terminar de fazer todas as somas e chegar ao resultado final.
Questionar como se escreve o número, localizar na tabela, escrever como se lê, e ver qual grupo que acertou na estimativa ou mais se aproximou do resultado real.
Para casa: Atividade no livro de matemática p. 52 e 53.

Fonte: Nascimento (2016, p. 109).

Destacamos que o que está em negrito nesta Figura 5 são as observações sobre a quantidade de atividades, de modo a alertar para uma aparente ou real “pressa” em concluir sem dar tempo à criança. Nos encontros de coordenação, houve uma insistência em chamar atenção para a possibilidade de dar mais liberdade às crianças e tentar fazer com que um ajudasse o outro na contagem. Para fundamentar essas intervenções, foi disponibilizado algumas indicações da Teoria de Vygotsky (2000) e da Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1990). Mesmo assim, a imagem da matemática como algo difícil e da criança como alguém que ainda está distante deste conhecimento, somada à visão do professor como o único responsável em garantir o ensino, não incentivou o intercâmbio de conhecimentos entre as crianças. Isso sobrecarregou as professoras. Quando foi chamado a atenção para o fator tempo, houve uma tentativa de tranquilizar o grupo, discutindo as muitas possibilidades de exploração das operações, durante a ampliação da Coleção de Tampinhas. Por mais paradoxal que possa parecer, muitas coisas estavam acontecendo com as crianças que desmobilizaram as professoras.

Figura 6. Nomear cada objeto contado

Fonte: Nascimento (2016, p. 110).

Figura 7. Contagem em pequenos grupos.

Fonte: Nascimento (2016, p. 110).

As situações envolviam e encantavam as crianças, assim elas desejavam mais e mais, conversavam e ficavam eufóricas (Figuras 6 e 7). Diante dessa atitude, as professoras ficavam angustiadas, pois, de certa forma, o “domínio da sala” fugia de suas mãos. Parece-nos que o que inquietava as alfabetizadoras era a necessária mudança de concepção sobre a constituição de ambiente alfabetizador, sobretudo, alfabetizador matemático, em que as trocas, os discursos, as ações devem sobrepor-se ao silêncio e a inatividade.

Afinal, a pesquisa revelou o quanto o aprender é jogar, é implicar-se, é confrontar, é argumentar, é correr riscos, é (des)silenciar-se, é hipotetizar, é acreditar, é empoderar, aspectos mais poderosos e importantes na alfabetização que os próprios objetos matemáticos, sendo estes apenas instrumentos para o desenvolvimento global, o que deve ser a luz focal do processo de alfabetização de nossas crianças.

A fim de diminuir a angústia e o cansaço provocados pela necessidade de acompanhar cada grupo na contagem das quantidades, refletiu -se com a coordenação e o grupo de alfabetizadoras sobre como dar mais autonomia para as crianças, respeitar, valorizar, potencializar, colocá-las como centro dos processos pedagógicos, enfim, como dividir as tarefas com elas. No avançar do trabalho com a Coleção de Tampinhas, o qual se estendeu por quatro meses, foram criadas situações de sistematização, como instrumento de registro escrito das possíveis aprendizagens que estariam acontecendo. Lembrando que projetos pedagógicos como o das TAMPINHAS favorecem um movimento de geração de conhecimento matemático fora dos ditames curriculares e de formação, pois mobilizam muitos saberes, com dinâmicas e aprofundamentos bem diversos, com amplitude do conhecimento matemático, fora do controle pedagógico e curricular da escola, afinal, o projeto é das crianças, sendo assim, elas vão mobilizando e demandando novas aprendizagens matemáticas não planejadas a priori pelas alfabetizadoras.

As tarefas foram elaboradas para explorar os quadros de registro (Figura 8) feitos pelos pequenos grupos e o quadro de registro da turma:

Figura 8. Atividade elaborada pelas professoras do 3º ano.

COLEÇÃO DE TAMPINHAS

1. Observe o quadro de registros da coleção de tampinhas do 2º ano E:

GRUPOS	1º DIA	2º DIA	3º DIA	4º DIA	Total
1	12	35	189	47	
2	28	105	13	75	
3	46	127	54	32	
4	10	62	17	134	
5	20	71	4	27	

a. Calcule o total de cada grupo e registre no quadro.

b. Represente com palavras cada resultado, veja o exemplo:

52: cinquenta e dois

Total grupo 1:____________________

Total grupo 2:____________________

Total grupo 3:____________________

Total grupo 4:____________________

Total grupo 5:____________________

c. Qual grupo trouxe a maior quantidade de tampinhas?__________

d. Qual grupo trouxe a menor quantidade de tampinhas?__________

e. Juntando as tampinhas do grupo 4 com o grupo 3, quantas tampinhas tem? Represente com o cálculo:__________

Fonte: Nascimento (2016, p. 111).

As contagens continuaram com as alfabetizadoras buscando animar, organizar, estimar e apoiar as atividades matemáticas que pertencem às crianças e, por isso, os estes tanto valorizaram e se engajaram nas muitas ações exigidas pelo projeto, o qual ofertou aprendizagens matemáticas significativas para todos. Tratou-se, portanto, de um importante espaço e momento de formação que permitiu rever algumas concepções sobre os modos de tecer um ambiente alfabetizador da matemática. Ao mesmo tempo que acontecia a contagem das tampinhas, foi possível trabalhar com o conceito de unidades e dezenas e com as operações de adição e subtração, pois as tampinhas foram agrupadas de dez em dez e utilizadas como recurso de apoio à contagem.

A contagem avançou muito, foi preciso ampliar a tabela numérica e, mesmo sem afixar um cartaz (Tabela Numérica) com os números até 500 ou mais, foi possível explorar a lógica de constituição das palavras-números. Por exemplo, de 1 a 10 as palavras-números mostram-se como algo novo: um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito, nove e dez. Depois do 20, tem-se 21 (vinte e um), em que o "e" faz o papel do sinal + (mais) e evidencia a composição aditiva entre o vinte e o um, compondo o 21, isso ocorre do 21 ao 29, e nos outros intervalos entre as dezenas exatas, exigindo que seja informado o nome das dezenas exatas. Mas, entre o 10 e o 20, as palavras- números, oferecem maior dificuldade, como o 17 (DEZ e SETE = 17), pois elas não expressam, em sua escrita, a composição aditiva.

Após observar essa característica na sequência do 21 (vinte e um) ao 29 (vinte e nove), daí em diante o "dificultador" é apenas aprender o nome das dezenas exatas, por exemplo, entre o 20 e o 100, tem-se as palavras: vinte, trinta, quarenta, cinquenta, sessenta, setenta, oitenta, noventa. Observa-se que o trinta inicia com as mesmas letras que o três (3 dezenas), o quarenta com as mesmas letras que o quatro (4 dezenas), o cinquenta com as mesmas letras que o cinco (5 dezenas), o sessenta com as mesmas letras que o seis (6 dezenas), oit -enta, nov -enta. Como dissemos, as palavras-números entre o 10 e o 20 são mais complexas em Português. O nome do 11 (onze) poderia ser algo próximo de "dez e um", o doze de "dez e dois", o treze de "dez e três", o quatorze de "dez e quatro", o quinze de "dez e cinco".

A partir do número dezesseis, a criança encontra maior apoio na língua materna, pois, a palavra número dez- e - seis = dezesseis, expressa melhor a composição aditiva (10 + 6), ocorre o mesmo com o dezessete, o dezoito e o dezenove. Ao chegar no número vinte, a criança precisa da ajuda do adulto para falar o nome do número, observando que isso ocorre em todas as dezenas exatas. Isso coaduna com os aportes teóricos aqui apresentados e ressaltamos o que Castro e Rodrigues (2008) afirmam sobre as crianças construírem padrões referentes a segmentos da sequência numérica e desenvolverem capacidades de estabelecer relações entre os termos dos segmentos.

Algumas considerações

O objetivo deste capítulo foi apresentar algumas reflexões a respeito das contribuições do processo de contagem para o avanço na constituição das quantidades numéricas. Foi possível observar que na dinâmica de constituir uma coleção de objetos foram mobilizadas situações de contagem de quantidades superiores a 100, isso implicou em mudanças na natureza das ações e intervenções das alfabetizadoras, ao constatarem o envolvimento das crianças no projeto Coleção de Tampinhas.

Como as crianças não têm "amarras", expressavam espontaneamente as suas hipóteses sobre o nome dos números. Sendo assim, como não foram impostos limites na quantidade de tampinhas, aconteceu de um menino em uma turma do 2º ano trazer mais de 500 tampinhas. Neste momento, houve o desafio às alfabetizadoras de planejar as ações para ensinar as crianças a dizer os nomes dos números além do 100. A tabela numérica que ficava afixada na sala e que, a princípio era até 50, depois passou a ser até 100 e depois até 200. As práticas desenvolvidas neste projeto, expandiram e romperam com algumas concepções.

Foi discutido com as alfabetizadoras sobre o apoio que a língua materna poderia oferecer à constituição da linguagem matemática, essa indicação mostrou algo que elas julgaram inovador, pois ainda não tinham se atentado a essa especificidade e não viam o nome do número como uma palavra que precisava ser aprendida. Por isso mesmo, tratava-se de uma palavra não ensinada, indicando a necessidade de pensar e planejar uma proposta de intervenção que contemplasse a leitura das palavras-números.

Ademais refletimos que o desenvolvimento da pesquisa foi espaço e oportunidade de formação e mudança de concepções acerca da constituição da alfabetização matemática. O diálogo com as professoras revelou esse novo entendimento e, como elas já mostravam ter domínio das técnicas de ensinar a leitura das palavras, logo se animaram para adaptar ou criar técnicas para ensinar a leitura das palavras-número. Isso contribuiu muito para as crianças avançarem na contagem.

Os resultados do projeto Coleção de Tampinhas, foram importantes para as aprendizagens profissionais e para embasar as possíveis mudanças, o que não evita as oscilações que podem continuar acontecendo a cada nova exigência de planejar ações e intervenções para o ensino de um conteúdo. Ressalta-se que esse trabalho teve início com dúvidas quanto à evolução das crianças na contagem, na denominação dos números, na escrita dos números e após quatro meses prevaleceu a certeza de que elas conseguem e têm muita disposição para aprender. Ao mesmo tempo, vimos que precisamos de tempo para a leitura, o registro das nossas aprendizagens, a elaboração de nossas aulas, de modo a realizar a seleção de tarefas, a experimentação dos recursos didáticos, o estudo das propostas do livro didático e a avaliação do que é proposto para ser ensinado e do que é aprendido pelas crianças.

Referências

BERTONI, Nilza Eigenheer. **Educação e linguagem matemática II**: Numerização. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

CASTRO, Joana Pacheco de; RODRIGUES, Marina. O sentido do número no início da aprendizagem. In: BROCARDO, SERRAZINA, L, ROCHA. **O sentido de número**: reflexões que entrecruzam teoria e prática. Editora Escolar. Lisboa, 2008.

DANYLUK, Ocsana. **Alfabetização matemática**: as primeiras manifestações da escrita infantil. Porto Alegre: Sulina, 2002.

DELHAXHE, Arlette; GODENIR, Anne. **Agir avec le nombre**. Bruxelas: Labor, 1992.

FUSON, Karen. **Children's counting and concepts of number**. New York: Springer-Verlag., 1987.

JOSSO, Marie-Christine. **Experiências de vida e formação**. Trad. José Claudino e Júlia Ferreira. São Paulo: Cortez, 2004.

KAMII, Constance. **A criança e o número**. Campinas: Papirus, 1990.

LONGAREZI, Andrea Maturano, SILVA, Jorge Luiz. Pesquisa-formação: um olhar para sua constituição conceitual e política, **Revista Contrapontos,** Eletrônica, v. 13, n. 3, p. 214-225, set. - dez. 2013.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Módulo 1 - Pedagogia**: Educação e Linguagem Matemática. PEDeaD, 2004. Disponível em: http://sbembrasil.org.br/sbembrasil. Acesso em: 12 set. 2024.

MUNIZ, Cristiano Alberto. Papéis do brincar e do jogar na Alfabetização Matemática. In: BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Ministério da Educação, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Matematização na infância**: indicadores para a alfabetização. Rede Pedagógica. EaD. Brasília, 2020.

NASCIMENTO, Ana Maria Porto. **A pesquisa como instrumento de mediação num ambiente de aprendizagem matemática**: aprende a criança, aprende a professora e aprende a pesquisadora. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de Brasília, 2002.

NASCIMENTO, Ana Maria Porto. **A construção coletiva de uma práxis emancipatória em alfabetização matemática**. 232 fls, 2016. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação. Universidade de Brasília, 2016

PANIZZA, Mabel. **Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais:** análise e propostas. Trad. Antônio Feltrin. Porto Alegre: Artmed, 2006.

PERRELLI, Maria Aparecida de Souza; REBOLO, Flavinês; TEIXEIRA, Leny Rodrigues Martins; NOGUEIRA, Eliane Greice Davanço. Percursos de um grupo de pesquisa-formação: tensões e (re)construções. **Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos**, Brasília, v. 94, n. 236, p. 275-298, jan. - abr., 2013.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, Alina. **A gênese do número na criança**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar Editora, 1975.

PIAGET, J.; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. 3. ed. Tradução de: OITICICA, C. M. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

SCHULMAN, Lee. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Research**, n. 15 (2), pp. 4-14, 1986.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática crítica**: A questão da democracia. Campinas, SP: Papirus, 2001. 160 p.

SPINILLO Alina Galvão. Uso e função dos números em situações do cotidiano. In: BRASIL. Secretaria de Educação Básica. **Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa**. Ministério da Educação, Diretoria de Apoio à Gestão Educacional. Brasília: MEC, SEB, 2014.

TOLEDO, Marília; TOLEDO, Mario. **Teoria e prática de matemática**: como dois e dois. São Paulo: FTD, 2009.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**. V. 10, n. 2.3, pp. 133-170, Pensée Sauvage: Grenoble, França, 1990.

VYGOTSKY, Lev. **Pensamento e Linguagem**, São Paulo: Martins Fontes, 2000.

ZUNINO, Délia Lerner. **A matemática na escola**: aqui e agora. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

5 - Contagens e sistema de numeração decimal: mapeamento das aprendizagens de estudantes do 1º e 2º anos do Ensino Fundamental

Raimunda de Oliveira
Simone Alves Côrtes

Introdução

O Sistema de Numeração Decimal (SND) é produto da criação humana, fruto de um longo processo histórico, e sua aprendizagem exige ação pedagógica intencional e sistemática. Esse processo, embora se inicie em diferentes contextos sociais e culturais, encontra na escola um espaço privilegiado de sistematização, aprofundamento e socialização do conhecimento. É no currículo, nas práticas pedagógicas cotidianas e nas formações docentes que se consolidam as condições para que os estudantes compreendam não apenas o funcionamento do sistema numérico, mas também sua relevância histórica, social e científica. Assim, a escola assume papel fundamental, sem desconsiderar que a construção de saberes matemáticos é atravessada por múltiplas experiências vividas dentro e fora dela.

A capacidade de percepção e distinção de pequenas quantidades, até quatro ou cinco elementos, que, segundo Piaget e Szeminska (1981), ocorre sem a utilização da contagem, é inata ao ser humano. Entretanto, ao longo do processo de desenvolvimento da humanidade e da organização em sociedade, as necessidades de quantificar, enumerar e comunicar grandes quantidades demandaram formas mais elaboradas de representação, exigindo estruturas cognitivas como o agrupamento e a noção de valor posicional. Esse movimento histórico e cultural culminou na construção do Sistema de Numeração Decimal (Curi, 2011).

Segundo Ifrah (2005), o SND foi desenvolvido pelos indianos a partir de um corpo de conhecimentos advindos de diferentes partes do mundo, processo que se configura como parte da história da própria humanidade. Difundido há mais de mil anos, o SND alterou a maneira como os seres humanos registravam quantidades e realizavam cálculos.

É por meio dos números, organizados em um sistema, que, em nossa sociedade, ordenamos, expressamos quantidades, medidas e relações espaciais. O SND, por sua constituição, é compreendido como um sistema notacional composto por regras de funcionamento — como o agrupamento, o valor posicional, o princípio aditivo e o princípio multiplicativo —, e não apenas como um código. Seu uso envolve processos mentais complexos que vão além da simples memorização, requerendo a atribuição de sentidos e significados, e não apenas a materialização de representações mecânicas ou a decodificação automática dos símbolos numéricos (Tiggemann, 2010).

Nesta circunstância, a aprendizagem das regularidades e propriedades do SND pela criança demanda tempo, e sua sistematização ocorre, especialmente, em situações escolares. Kamii (1995), ao esclarecer as origens do conhecimento segundo Piaget, afirma que as fontes do raciocínio lógico-matemático são internas ao sujeito e que o conhecimento do número resulta de um processo de abstração reflexiva, no qual a criança estabelece relações e constrói significados a partir de suas próprias ações.

Enquanto atividade cognitiva reflexiva, a aprendizagem numérica exige que a criança seja fortemente protagonista de suas descobertas, elaborando hipóteses, testando estratégias e reorganizando suas concepções a partir das interações com os objetos de conhecimento e com os outros. Em certo sentido, a construção das estruturas numéricas implica uma reconstrução, pela criança, da própria história da matemática, processo que Piaget denominou de recapitulação.

Kamii (1995, p. 26) afirma ainda que "o número não é uma coisa conhecida inatamente, por intuição ou empiricamente, pela observação". Enquanto a contagem pode ser realizada apoiada na observação imediata, o conceito de número é abstrato, no sentido de ser construído mentalmente pelo sujeito epistêmico, a partir de um processo de abstração reflexiva. Isso significa que o número não se reduz a um dado empírico disponível no ambiente, mas emerge da ação da criança em contextos de quantificação, comparações, ordenações e sequenciações, nos quais ela elabora relações e reorganiza suas concepções.

A aprendizagem do Sistema de Numeração Decimal (SND) pela criança tem início nas experiências de contagem, na percepção e no registro de quantidades e no estabelecimento das relações entre quantidade e número, incluindo as comparações entre diferentes conjuntos. Contudo, é a partir das reflexões sobre as regularidades e propriedades do sistema que a criança avança para a sistematização de sua aprendizagem, construindo compreensões mais complexas e significativas acerca do funcionamento do SND.

Os objetos de conhecimento associados aos processos de ensino-aprendizagens das contagens e do SND já foram amplamente pesquisados e são extensas as contribuições consideradas na escrita desse texto, na literatura e pesquisas nacionais com foco nesse objeto de conhecimento são considerados produções de referência: Kamii (1995), Fayol (1996), Lener e Sadovsky (1996) e Curi (2011).

Apesar de acreditar ser um campo de pesquisa com resultados e apontamentos profícuos, este artigo é fruto de acompanhamento pedagógico realizado, nos anos de 2023 e 2024, em duas escolas, uma pública e outra privada. Nessas escolas, apesar das diferentes estruturas e dicotomias nas propostas organizativas das instituições, as concepções de ensino eram muito similares, centradas no processo de alfabetização da língua materna e com escassos planejamentos voltados à aprendizagem matemática.

No relato dos professores, emergem dos discursos dificuldades em relação à compreensão do processo de ensino-aprendizagem dos números naturais e das orientações curriculares que permeavam a prática docente, o que inviabilizava uma organização intencional de aulas voltadas para as necessidades dos estudantes. No processo de acompanhamento, a formação continuada dos professores, com estudos de protocolos dos estudantes e casos de sala de aula, contribuiu para o desenvolvimento profissional dos dois grupos de professores.

No entanto, neste texto, focaremos na proposta de intervenções por meio de grupos produtivos e reagrupamentos de turmas, voltadas ao avanço das aprendizagens das crianças. Considerando essas questões, este capítulo pretende discutir possibilidades de mapeamento das aprendizagens e intervenções pedagógicas propostas aos estudantes do 1º e 2º anos do Ensino Fundamental, de modo a favorecer a aprendizagem das contagens e das regras do Sistema de Numeração Decimal.

Contagens e sistema de numeração decimal: proposições curriculares e contribuições de pesquisas

As produções de D'Ambrósio (1999) e Skovsmose (2007) defendem a ideia de que a aprendizagem matemática na escola deve estar relacionada à necessidade de se utilizar o conhecimento matemático como meio de compreender, analisar e interpretar os diferentes contextos sociais e de vida dos estudantes, de modo a instrumentalizar o sujeito para agir na realidade na qual se insere, o que vai ao encontro do significado do termo didática, enquanto provocação.

Corroborando com este modo de conceber o ensino de Matemática, as orientações curriculares propostas pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC), orientadora da construção dos currículos no Brasil, apontam como uma das competências a ser desenvolvida pelos estudantes na área de Matemática: "utilizar processos e ferramentas matemáticas, inclusive tecnologias digitais disponíveis, para modelar e resolver problemas cotidianos, sociais e de outras áreas de conhecimento, validando estratégias e resultados" (BRASIL, 2018, p. 267).

Nesse sentido, os números presentes na vida em sociedade, em tantos e mais variados espaços e, necessários para a atuação na sociedade desde a tenra idade, precisam ser foco de um ensino assentado em diferentes contextos, de modo que os estudantes reflitam, analisem e os compreendam em diferentes situações, apropriando-se progressivamente da sua funcionalidade e desenvolvendo práticas operatórias cada vez mais complexas de manipulação.

Ademais, segundo Curi (2013), a memorização de sequências numéricas e/ou escritas, sem compreensão dos números cada vez maiores, é resultado de um ensino que pouco considera as hipóteses que as crianças realizam sobre quantificações e suas representações não têm auxiliado as crianças no enfrentamento de situações matemáticas básicas.

Segundo a BNCC, a aprendizagem de números naturais, nos dois primeiros anos do Ensino Fundamental, está assentada em dois grupos correlacionados de habilidades - um grupo relacionado ao processo de contagem, no qual se encontram processos de quantificar, ler, escrever, comparar e ordenar em um dado intervalo numérico; e um segundo grupo relacionado aos princípios do SND, envolvendo processos de compor, decompor, identificação do papel do zero e do valor posicional no mesmo intervalo numérico, bem como o agrupamento em base 10 (BRASIL, 2018).

O primeiro grupo de habilidades está em desenvolvimento mesmo antes da criança adentrar na escola e, segundo Kamii (1995), encontra-se em um primeiro estágio relacionado aos processos de ordenamento e inclusão. Esse estágio perpassa pela correspondência biunívoca - que requer a construção da coordenação viso-motora-verbal, realizada ao longo do processo de contagem e quantificação -, e avança em níveis mais elevados a outros processos, como a conservação de quantidade. Esses recursos fundamentam a estrutura lógico-matemática do número e são construídos gradativamente pela criança ao estabelecer relações entre os mais variados tipos de ações e objetos.

Nesse contexto, entendemos que é no pensamento ativo que se desenvolve a análise reflexiva, a qual possibilita que o conceito de número seja compreendido, mas nesse estudo ocorre associação do número à recitação e à representação. Somente decorar uma cadeia verbal de números não sustenta a aprendizagem de uma quantidade nos processos de quantificação de quantidades discretas e contínuas, apoiada no complexo domínio da contagem, mas é parte importante no reconhecimento dos princípios de organização das sequências numéricas.

Fayol (1996) destaca que, na contagem de 20 a 99, os princípios de construção linguística exercem papel fundamental, pois a criança vai descobrindo e aplicando regularidades que facilitam a representação de conjuntos numéricos. No entanto, esse processo não se resume a uma enumeração "decorada", mas está relacionado à identificação de padrões da língua materna aplicados às relações matemáticas estabelecidas. Um exemplo disso ocorre quando a criança, ao dizer *dezenove*, apoia-se na fala para compreender que esse termo representa a quantificação de dez mais nove, articulando simultaneamente aspectos linguísticos e matemáticos.

Nas contribuições de Fayol (1996), podemos destacar ainda que as habilidades de contagem não dependem do acesso e compreensão da conservação de quantidade de forma prévia, ou seja, a criança vai nesse arco de conceitualização do número, desenvolvendo gradualmente as estruturas lógicas, a recitação e o estabelecimento da relação número e quantidade, de forma paralela e progressiva.

Com relação aos processos de compor, decompor, identificação do papel do zero e do valor posicional, vinculados à aprendizagem do SND, segundo grupo de habilidades, disposto pela BNCC (BRASIL, 2018), em um primeiro momento ligados à quantificação e, no segundo, ligados às regularidades do sistema, como apontado anteriormente, Lerner e Sadovsky (1996) apontam que esse é um período de aprendizagem marcado por conflitos entre as hipóteses que a criança já construiu em torno das experiências vividas com números e as descobertas que vai realizando a partir de tarefas de investigação.

Essas autoras propõem apontamentos interessantes sobre o pensamento matemático das crianças: elas aprendem primeiro a escrita de números da base 10, como o próprio 10, o 100, e o 1.000, e, posteriormente, constroem os intervalos, levantam hipóteses relacionadas à quantidade de algarismos e sua magnitude (Lerner; Sadovsky, 1996). Esses teoremas ajudam no processo de aprendizagem, mas um terceiro, que destaca que as crianças supõem que a numeração escrita se vincula estritamente à falada, é um obstáculo a ser investigado e requer intervenção dos professores. De acordo com a pesquisa das autoras, para que a percepção das regularidades do SND pelas crianças emerja, são necessários quatro grupos de atividades, a saber: 1) operar com manipulação de quantidade; 2) operar com comparação; 3) produção de escritas e 4) interpretação de escrita, propostos em situações de resolução de problemas que requeiram o estabelecimento de relações.

Esse movimento evidencia que a construção do conhecimento numérico não é linear nem imediata, mas se constitui em um processo dinâmico, de avanços, recuos e reestruturações cognitivas, no qual a criança atribui sentido às regularidades do sistema e reelabora suas compreensões. Nesse contexto, torna-se relevante recorrer às contribuições de diferentes pesquisadores, que, em suas investigações teóricas e pedagógicas, têm iluminado aspectos fundamentais do ensino e da aprendizagem do SND. Para melhor visualizar essas contribuições, apresentamos a seguir um quadro-síntese (Quadro 1), que reúne os principais aportes de Piaget e Szeminska (1981), Kamii (1995), Fayol (1996), Lerner e Sadovsky (1996) e Curi (2011, 3013), explicitando tanto suas bases teóricas quanto às implicações pedagógicas para a prática docente.

Quadro 1. Quadro-síntese: Contribuições teóricas sobre o ensino do SND

Autor(a)	Ano	Principais contribuições teóricas	Implicações pedagógicas
Piaget e Szeminska	1981	O número não se origina da contagem, mas da correspondência biunívoca e recíproca entre elementos. Defende que o pensamento infantil passa por estágios de desenvolvimento, nos quais a criança constrói ativamente conceitos por meio da abstração reflexiva.	A prática pedagógica deve propor situações que considerem os estágios de desenvolvimento e possibilitem à criança agir, comparar, ordenar e refletir, reconstruindo o conceito de número de forma ativa.
Kamii	1995	Desenvolve as ideias de Piaget e afirma que o conceito de número está ligado a processos como ordenação e inclusão, passando pela correspondência biunívoca e avançando para a conservação de quantidade. O número é fruto da reflexão da criança sobre suas ações.	O ensino deve ir além da recitação de sequências, favorecendo situações de ação-reflexão em que a criança construa gradativamente a estrutura lógico-matemática do número, em interações com objetos e contextos variados.
Fayol	1996	Destaca a relação entre linguagem e número, principalmente na contagem de 20 a 99, em que a criança descobre regularidades linguísticas aplicadas à matemática. Ressalta que habilidades de contagem podem se desenvolver paralelamente à compreensão da conservação de quantidade.	O professor deve propor atividades que integrem a dimensão linguística e matemática, ajudando a criança a identificar regularidades na numeração e a articular a relação número-quantidade sem depender apenas da memorização.
Lerner e Sadovsky	1996	Enfatizam os conflitos entre hipóteses infantis e novas descobertas sobre o número. Mostram que as crianças primeiro aprendem a escrita de números-base (10, 100, 1000) e depois os intervalos, levantando hipóteses sobre quantidade de algarismos e magnitude. Identificam também obstáculos, como a ideia de que a numeração escrita se vincula estritamente à falada.	Propõem grupos de atividades para favorecer a percepção de regularidades do SND, sempre em situações de resolução de problemas que desafiem e ampliem as hipóteses da criança.
Curi	2011, 2013	Analisa o SND como um produto histórico-cultural cuja aprendizagem exige a compreensão de regularidades, a construção de agrupamentos e a noção de valor posicional.	Destaca a importância de valorizar as hipóteses infantis sobre quantificação e representação, propondo práticas escolares sistemáticas que ultrapassem a memorização e promovam a compreensão conceitual do SND em sua complexidade.

Fonte: Elaborado pelas autoras a partir de pesquisa bibliográfica.

À luz das contribuições teóricas e das implicações pedagógicas sintetizadas no quadro anterior, é importante destacar que a BNCC (BRASIL, 2018) também destaca, em suas orientações curriculares, a importância do ensino do valor posicional como uma das propriedades centrais do Sistema de Numeração Decimal. O documento propõe que esse trabalho seja iniciado já no 1º ano do Ensino Fundamental, a partir de situações que envolvem a composição e decomposição de números de até duas ordens. No 2º ano, esse percurso é ampliado para a composição e decomposição de números naturais até 1000, favorecendo a construção progressiva de significados em torno do agrupamento e da posição dos algarismos no sistema.

Considerando essas proposições curriculares, articuladas às contribuições das pesquisas que investigam a construção do número e a aprendizagem do SND, é possível delinear pontos essenciais que precisam ser observados no processo de ensino-aprendizagem. Tais pontos permitem avaliar não apenas a memorização de sequências ou representações numéricas, mas, sobretudo, o nível de compreensão conceitual que os estudantes alcançam em relação às propriedades do sistema. Esses aspectos, detalhados na próxima seção, constituem-se como referenciais importantes para o acompanhamento e a análise do desenvolvimento das aprendizagens numéricas nos anos iniciais.

Mapeamento dos indícios de aprendizagens dos estudantes

No ato de avaliar, de acordo com Gatti (2003), primeiro é importante estabelecer um conjunto de critérios de avaliação que reflita os objetivos das proposições de ensino. Em seguida, é possível elaborar uma tabela que descreva os níveis e suas características, com base nas expectativas da tarefa proposta. O próximo passo envolve a escolha de uma forma adequada de fornecer feedback aos alunos. A partir disso, o professor define a sistemática mais adequada para registrar e revisar o progresso dos alunos.

Considerando o âmbito da avaliação das aprendizagens, em sua fase de diagnóstico e de fluxo continuado, voltados à obtenção de informações sobre os avanços e dificuldades do grupo de alunos, concordamos com Gatti quando destaca que:

> Essas avaliações continuadas têm, pois, o objetivo de ajudar a direcionar e redirecionar o trabalho do professor em seu dia a dia, podendo, pela atuação deste, contribuir também para que os alunos compreendam e superem suas dificuldades ou ampliem seus conhecimentos (Gatti, 2003, p. 208).

A partir dessas contribuições, para avaliar as aprendizagens dos estudantes foram destacados níveis que demarcam um conjunto de habilidades desenvolvidas e que fomentaram possibilidades de análise das produções dos estudantes, por meio de critérios, conforme apresentado no Quadro 2.

Quadro 2. Níveis de desenvolvimento das aprendizagens relacionadas a contagem.

Níveis	Habilidades desenvolvidas
Pré-recitação	Estabelece relações de comparação entre objetos, observando suas propriedades. Classifica objetos e figuras de acordo com suas semelhanças e diferenças.
Recitação	Recita os números, estabelecendo correspondência biunívoca entre o número falado e a quantidade, classificando os contados e os não contados.
Representação	Registra números ditados. Relaciona números às suas respectivas quantidades e identifica o antes, o depois e o entre em uma sequência.
Quantificação	Conta, de maneira exata ou aproximada, utilizando diferentes estratégias como o pareamento e outros agrupamentos Expressa medidas (peso, altura etc.), construindo gráficos básicos. Compara números naturais em situações cotidianas, com e sem suporte da reta numérica. Compõe e decompõe número por meio de diferentes adições ou subtrações. Descreve, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão, os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, com padrões de contagem em diferentes bases, inclusive na base 10. Realiza contagens de múltiplos de dez: 10 em 10, 100 em 100, 1000 em 1000.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

No Quadro 2, o foco de avaliação são as habilidades apresentadas pelos estudantes ao realizarem tarefas de contagem e manipulação de coleções. De um nível para outro, considera-se progressivo, por exemplo: o estudante considerado no nível de Representação, desenvolveu as habilidades atribuídas ao nível anterior, a Recitação, e ao nível atual. Dessa forma, o aluno do nível de Quantificação desenvolveu todas as habilidades listadas, propostas para a análise.

Para turmas que já iniciaram os estudos voltados às propriedades do Sistema de Numeração Decimal, os níveis são ampliados, e as regras e características desse sistema são avaliadas, conforme apresentado no Quadro 3 a seguir:

Quadro 3. Níveis de desenvolvimento das aprendizagens relacionadas ao SND.

Níveis	Habilidades desenvolvidas
Agrupamento na base 10	Compõe número por meio de adições sucessivas com ou sem suporte de material manipulável, compreendendo a passagem de uma ordem para a seguinte, por exemplo: a cada 10 unidades, componho 1 dezena.
Desagrupamento na base 10	Decompõe número por meio de subtrações sucessivas com ou sem suporte de material manipulável, compreendendo a passagem de uma ordem para a seguinte, por exemplo: a cada 1 dezena equivale a 10 unidades.
Compreensão do valor posicional	Associa equivalências de quantidades, com ou sem suporte de material manipulável, a partir da compreensão das regras do SND, por exemplo: 10 dezenas = 1 centena = 100 unidades. Compara e ordena números naturais pela compreensão de características do sistema de numeração decimal (valor posicional e função do zero). Emprega na resolução de problemas e manipulação de quantidades, composição e decomposição de acordo com as regras do SND.

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Para a avaliação, foram considerados intervalos numéricos já estudados pelos estudantes. No caso das turmas de 1º ano que haviam estudado o intervalo de contagem 1 a 100, por exemplo, esse quantitativo máximo foi considerado para avaliação.

Contexto e participantes

O presente estudo foi realizado nos anos de 2023 e 2024, em duas escolas, uma pública com 7 turmas, sendo três do 1º ano e quatro do 2º ano, e uma privada, com outras 4 turmas, sendo duas do 1º ano e duas do 2º ano. Os participantes foram cerca de 234 estudantes, 11 professoras regentes, duas coordenadoras pedagógicas, uma de cada instituição e uma consultora pedagógica especialista da área de matemática, que realizou estudos formativos com o grupo e análises de observações e protocolos dos estudantes junto às professoras regentes e coordenadoras.

Instrumentos e procedimentos de avaliação

Os instrumentos e procedimentos de avaliação utilizados foram divididos em dois grupos: tarefas coletivas e tarefas individuais. As tarefas coletivas foram compostas por jogos, brincadeiras e desafios para grupos. Nesse momento, o professor foi orientado a observar os alunos por grupos e registrar os indícios apresentados.

No grupo de tarefas coletivas, na avaliação de estudantes das contagens (Quadro 1) foram usados:

- Comparação e classificação de objetos e coleções de tampinhas e outros objetos com critérios indicados e outros criados pelos estudantes.
- Brincadeiras e músicas de recitação de sequências.
- Ditado de quantidades com palitos e fichas numeradas para associação número/quantidade.
- Desafios de construção de retas numeradas com e sem apoio no quadro numérico.
- Desafios de composição e decomposição de quantidades de diferentes formas com uso de palitos e outros materiais.
- Jogos com trilhas numeradas e uso de dados para avanço no percurso.

Nas tarefas coletivas, para avaliação de estudantes do Sistema de Numeração Decimal (Quadro 2), foram usados:

- Jogo Duas Mãos: proposto no Caderno de Jogos do Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa - PNAIC[4] (BRASIL, 2014). O uso desse jogo foi de avaliar a compreensão de agrupamento, na base 10, como recurso de contagem.
- Jogo Esquerdinha: proposto no Caderno 3 do PNAIC (BRASIL, 2014). O uso do jogo foi de avaliar o nível de compreensão dos estudantes em relação ao valor posicional no SND, o registro e a composição por meio de somas sucessivas.

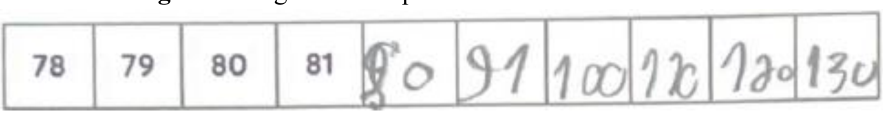
[4] Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC) foi um programa do Governo Federal implementado nos anos de 2014 a 2018, com o objetivo de alfabetização de todas as crianças até os oito anos de idade. Foi uma iniciativa do Ministério da Educação que partiu dos dados levantados pelo Censo 2010 e teve aporte de incentivos financeiros e assistência técnica e pedagógica.

- Jogo Placar Zero: proposto no Caderno 3 do PNAIC (BRASIL, 2014). O uso do jogo foi de avaliar o nível de compreensão dos estudantes em relação ao valor posicional no SND, o registro e a decomposição por meio de subtrações sucessivas.

Nas tarefas individuais, os professores atenderam cada aluno por vez e propuseram tarefas com registro escrito pelo estudante. Nesse momento, os estudantes foram incentivados a realizar, após a explicitação dos comandos, as tarefas conforme acreditavam e a registrar suas hipóteses. Foram realizadas as tarefas:

- Complete a sequência: identificar o padrão e continuar a sequência.

Figura 1. Registro de sequência do estudante C - 2º ano.



Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

- Comparação de quantidades registradas.

Figura 2. Registro de comparação do estudante D - 1º ano.

Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

- Ditado de caça-números.

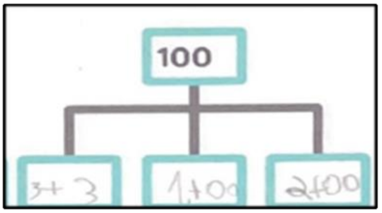
Figura 3. Ditado caça-números do estudante D - 1º ano.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

- Desafios de composição de quantidades de diferentes formas.

Figura 4. Desafios de composição de quantidades de diferentes formas do estudante C - 2º ano



Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

- Ditado de números.

Figura 5. Escrita do número 801do estudante E - 2º ano

Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

Os alunos do 1º ano só realizaram as tarefas coletivas voltadas para análise das contagens (Quadro 1), uma vez que ainda não tinham vivenciado aulas com o foco na composição e decomposição ou investigação sobre valor posicional. O intervalo numérico avaliado nesse ano foi de 1 a 70.

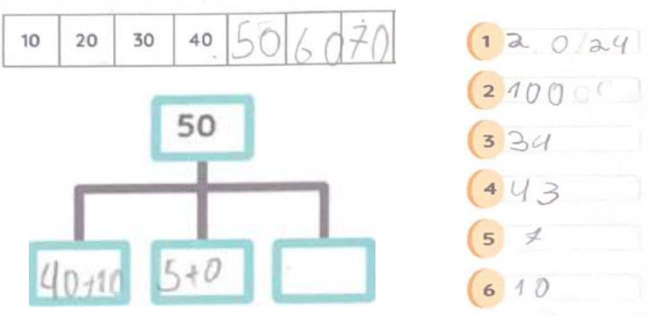
Com os estudantes de 2º ano, todos os níveis foram avaliados dentro do intervalo numérico 1 a 500. A partir desses conjuntos de tarefas avaliativas, foi possível mapear as aprendizagens dos estudantes. As análises foram feitas pelas professoras regentes, equipe de coordenação pedagógica e consultora especialista.

Análise dos dados

Para este trabalho, vamos relatar as análises de informações realizadas com as turmas de 1º e 2º anos de 2024. A aplicação das avaliações aconteceu no mês de agosto. O processo de análise dos protocolos dos estudantes aconteceu em reuniões orientadas pela consultora especialista junto às professoras regentes e coordenadoras. A ideia era categorizar os registros e erros das crianças pelas categorias propostas.

Os estudantes do 1º ano foram, em sua maioria, classificados no nível Representação. A maioria dos estudantes, classificados nesse nível, conseguiram, por exemplo, acertar os números ditados e continuar, com proficiência, as sequências memorizadas, mas nas atividades de composição seja escrita ou nas tarefas coletivas propostas não conseguiam apresentar conservação de quantidade para grupos de até 70 elementos.

Figura 6. Trechos de protocolos do Aluno G do 1º ano.



Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

Essas análises levaram as professoras a refletirem sobre as propostas de ensino muito centradas em tarefas de correspondência número/quantidade e de forma linear, com poucos desafios de construção de relações, manipulação e operacionalização de quantidades que permitissem às crianças avançarem para processos cognitivos mais complexos. Nos processos mecanizados, os estudantes apresentaram êxito, mas nos desafios de comparação de números naturais em situações diversas e de composição e decomposição de números por meio de diferentes adições ou subtrações, emergiram muitas dificuldades.

Na busca pela superação deste ensino mecanizado, Lerner e Sadovsky (1996, p. 122) sugerem um trabalho didático que considere a abordagem da numeração escrita em toda a sua complexidade: "do uso à reflexão e da reflexão à busca de regularidades, esse é o percurso que propomos reiteradamente".

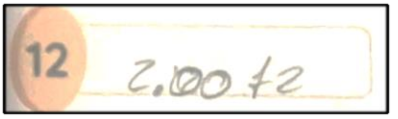
Nas turmas de 2º ano, houve variação na categorização dos estudantes, mas com grande concentração dos estudantes entre os níveis Quantificação e Agrupamento, apontando que a maioria dos estudantes não conseguiu realizar decomposição de quantidades por subtrações sucessivas, mesmo com apoio de material manipulável, como palitos.

Essa constatação foi confirmada pela dificuldade que os estudantes apresentaram na resolução de problemas de subtração que envolve desagrupamento, mesmo sem uso de algoritmo formal. Por essa razão, a BNCC não propõe antes do fim do 2º ano do Ensino Fundamental.

Nesse contexto, os debates apontaram que as crianças transitam das contagens para as aprendizagens dos princípios do SND sem a compreensão esperada. Nesse contexto, torna-se importante que as situações de ensino proporcionem a oportunidade de explorar tanto "a organização do próprio sistema" quanto descobrir "as características da estrutura numérica que ele representa", incluindo "significados numéricos – os números, a relação de ordem e as operações aritméticas envolvidas em sua organização" (Lerner; Sadovky, 1996, p. 124). Ou seja, considerando e valorizando o protagonismo das crianças na construção e validação das lógicas associadas à quantificação e estrutura do número. O professor deve ainda analisar se o material didático disponível colabora no sentido da promoção dessas aprendizagens, promovendo a seleção adequada de recursos e tarefas a serem propostas.

As questões de escrita apoiadas na oralidade, conforme indicado nas pesquisas de Fayol (1996) e Lerner e Sadovsky (1996), apareceram de forma recorrente no 2º ano, como exemplificado na escrita do estudante C do 2º ano, na Figura 7.

Figura 7. Escrita do número 212 estudante C - 2º ano.



Fonte: Arquivo cedido pelas professoras regentes.

Nesses casos, as análises dos protocolos apontaram que esses erros não decorrem de representação simples de números, mas estão associados à compreensão do princípio aditivo do SND.

Para além dos acertos e das aprendizagens até aqui construídas, a escrita evidencia que a criança realiza hipóteses sobre escritas numéricas. A escrita apresenta tanto acertos quanto erros: leu o primeiro 2 como duzentos; leu o doze corretamente. Nesse caso, a síntese da escrita é que demanda avanço, sem, contudo, negar as aprendizagens já realizadas. Dessa forma, as intervenções deveriam estar associadas à composição de quantidades por adições sucessivas, com uso de suporte de material manipulável, e à compreensão da passagem de uma ordem para a seguinte.

A pesquisa realizada por Lerner e Sadovsky (1996) mostra que o estudante apresenta esse tipo de registro em decorrência da economia de escrita de um número em nosso SND, tornando implícitas as suas regularidades, principalmente para aqueles que ainda não as dominam.

Diante do quadro de análises realizadas em todas as turmas, foram propostas intervenções pedagógicas, ora voltadas para estudantes individualmente, ora para a organização de agrupamentos produtivos ou reagrupamentos de turmas. Na sessão seguinte, reunimos algumas das intervenções propostas.

Intervenções pedagógicas

A criança começa o processo de sistematização do SND ao quantificar e registrar quantidades maiores - que envolvem várias de dezenas e centenas - , pois, ao quantificar e registrar quantidades pequenas, não necessariamente precisa compreender o valor posicional, o agrupamento em base 10, o uso de apenas dez símbolos para a representação de qualquer quantidade, o zero como marcador de ordem vazia, o princípio aditivo, e o princípio multiplicativo. Isso nos mostra a importância da ação docente intencionalmente planejada para que os estudantes construam as propriedades do SND.

Em sala de aula, importa ao professor planejar e propor tarefas que levem à reflexão acerca das propriedades do SND. Jogos matemáticos, problemas e tarefas que possibilitam a reflexão sobre os agrupamentos, sequências numéricas, conservação de quantidades, composição numérica, reconhecimento de números, comparação de quantidades, registros numéricos devem estar presentes na rotina da sala de aula dos anos iniciais. Quanto mais variadas e sistemáticas as experiências nas tarefas, jogos matemáticos e problemas propostos aos estudantes, melhor será a consolidação dos conceitos relacionados ao SND.

Nesse contexto, planejar a ação pedagógica é imprescindível. Esse planejamento abrange desde o ambiente físico até a transformação da sala de aula em ambiente colaborativo e investigativo, bem como o planejamento e a escolha das tarefas a serem propostas aos estudantes. Entretanto, professor deve compreender que grande parte da mediação não é passível de antecipação, tendo em vista o protagonismo da criança na atividade matemática. Dessa forma, o professor deve buscar dialogar, compreender e, no contexto, mediar, apoiar e intervir.

Pensando na construção do conceito de número e das propriedades do SDN, no que tange ao ambiente de sala de aula, ao planejar é importante que o professor propicie um ambiente problematizador e investigativo, no qual seja privilegiado o diálogo, o levantamento de hipóteses, o compartilhamento de diferentes formas de pensar e estratégias na resolução de um problema. Segundo Kamii e Housman (2002):

> Quando outras crianças expressam outros pontos de vista, são obrigadas a descentrar, ou coordenar suas próprias perspectivas com as dos outros. em outras palavras, quando as crianças trocam pontos de vista com outras, elas não podem continuar egocêntricas e ilógicas, pois são obrigadas a comparar as relações que estão fazendo àquelas que os outros estão fazendo (Kamii, Housman, 2002, p. 56).

Importa que os estudantes, em sala de aula, vivenciem um ambiente em que a troca de experiências, o diálogo e a investigação sejam privilegiados.

Quanto ao ambiente físico, interessa que a sala de aula tenha diversificados e diferentes portadores numéricos como:

- quadros numéricos;
- calendários (mensal e anual), relógios e linhas do tempo;
- gráficos e tabelas construídos com os estudantes;
- materiais de contagem variados, material dourado;
- régua de crescimento e balanças;
- termômetro ambiental;
- relógios;
- cartazes com relação número-quantidade;
- cartazes com receitas trabalhadas;
- cartazes com soluções das crianças aos problemas propostos.

Os materiais e recursos podem ser expostos a partir da realização de tarefas afins. Esses aspectos ambientais mencionados compreendem parte do planejamento do professor, e são elementos colaboradores da aprendizagem de número e do SND. O trabalho planejado em sala de aula com as propriedades do SND é essencial para a aprendizagem dos estudantes.

Nesse cenário de pesquisa apresentado e das análises dos níveis apresentados pelos estudantes, foram encaminhados momentos interventivos para orientar o planejamento de ações necessárias para o desenvolvimento conceitual dos estudantes.

Estudantes em nível de Pré-recitação demandam propostas que os levem a reconhecer sequências numéricas – essencial para a contagem. Esse processo é semelhante à memorização da ordem alfabética na alfabetização: a criança que conhece a sequência das letras no alfabeto e reconhece as letras não está necessariamente alfabetizada, mas essas habilidades de reconhecimento são imprescindíveis para a leitura e a escrita. No caso dos números, músicas, parlendas, brincadeiras que envolvam cantar uma sequência são boas estratégias.

Todo tipo de atividade em que as crianças cantam ou recitam juntas sequências numéricas auxilia o estudante em fase pré-recitativa, por favorecer a memorização de sequências numéricas faladas, que acontece por imitação. Tarefas de representação de quantidades contadas e que busquem estabelecer a relação número-quantidade em situações significativas são muito necessárias nesse nível. As atividades devem variar: tarefas nas quais apenas se cante a sequência; tarefas em que as crianças contam juntas uma coleção, as em que se fala o número ao mesmo tempo em que se aponta ou se observa o símbolo correspondente, todas as que envolvam contagens, aquelas que envolvam representações das contagens realizadas, contagem dos colegas inseridas na rotina, jogos de contagem de coleções. Em tarefas coletivas e nas individuais que envolvam as ações de contagem, o professor pode mediar tarefas em que os estudantes percebam a organização do que foi contado e o que ainda não foi contado em uma coleção.

Desse modo, importa propor diversas tarefas de quantificação, enumeração e representação de pequenas quantidades para que os estudantes avancem, atreladas à exploração dos números em diferentes situações, despertando o interesse das crianças em estabelecer relações com e sem uso de coleções.

No caso de crianças que se encontram no nível da Recitação, o avanço depende de tarefas que ampliem as contagens e as representações. É hora de intensificar explorações de quadros numéricos e sequências numéricas registradas, tais como calendário, álbum de figurinhas, uso regular da fita métrica e outros instrumentos de medida. São adequadas propostas como jogos de tabuleiro com trilhas a serem percorridas, contagens dos dias dos meses no calendário. São necessárias tarefas de comparação entre pequenas quantidades (quem tem mais? Quem tem menos?). Nesse nível, permanecem as tarefas de contagem, enumeração e representação, avançando para maiores quantidades, acima de 20 elementos, além das tarefas de comparação de quantidades.

Para crianças no nível da Representação, cabem as tarefas dos níveis anteriores, ampliando-se as quantidades exploradas e suas representações. Também é necessário iniciar propostas de tarefas que envolvam reta numérica em jogos, por exemplo. Tarefas de desafios de composição numérica e de quantidades devem fazer parte da rotina, nesse caso, estratégias como a composição de valores monetários a partir de atividades de poupança coletiva e mercadinho são interessantes, dentre outras. No caso de contagem de valores monetários e outras atividades significativas, pode-se iniciar as contagens em diferentes bases (2 em 2, 5 em 5, por exemplo). Neste momento, o trabalho com todo tipo de sequências é necessário, e já se exploram sequências recursivas de números e exploração das regularidades na escrita de quantidade diversas.

Com crianças que estão no nível da Quantificação, é importante explorar contagens e composição de quantidades cada vez maiores e em bases mais variadas. Quadros numéricos e retas numéricas que tenham padrões diferentes de 1 em 1, comparações e composições de quantidades também maiores. Para esse nível, cabe a exploração de jogos que envolvam valores nos quais se diferencia a quantidade contada da quantia ou valor atribuído – como no caso de jogos de varetas ou de dinheiro, explorando os princípios aditivos e multiplicativos do SND.

Quando se trata do trabalho com o SND, a exploração das propriedades do sistema faz-se muito necessário. Se faz importante o trabalho com o agrupamento em base 10 até próximo do 100. Nesse caso, o jogo de agrupamento dos palitinhos, neste nível, é importante que haja a representação das quantidades correspondentes.

Pensando em intervenções, para as crianças que fazem agrupamentos em base 10 até a composição da dezena, inicia-se o trabalho com o desagrupamento. Este deve ser feito paulatinamente e, novamente, o jogo dos palitos é um excelente recurso, explorando tanto a ação de agrupar quanto a ação de desagrupar quantidades de acordo com o intervalo estudado, sempre trazendo desafios com números maiores para avaliar as hipóteses das crianças.

Para crianças que já desagrupam, jogos que exploram agrupamentos e desagrupamentos com palitos, avançando para outros materiais, como Material Dourado, fichas coloridas com valores na base 10 e ábacos, são necessários. Nesse contexto, o professor deve explorar com mais ênfase a função do 0 como marcador de ordem sem quantidades. O trabalho com as fichas escalonadas na representação das quantidades deve ser enfatizado, já que este recurso explora o valor posicional e os princípios aditivo e multiplicativo do SND.

Para crianças que compreendem o valor posicional, é necessária a ampliação do quantitativo numérico em estudo. Resolução de problemas de quantificação, como jogos de exploração numérica com a calculadora, é indicada nessa fase.

Discussão e considerações

Alguns referenciais teóricos atribuem as aprendizagens de contagem e dos princípios do SND, associadas às primeiras noções de lógica e geometria, ao termo Alfabetização Matemática.

Discordamos do uso do termo alfabetização ligado à Matemática, pois, além de ter origem na palavra alfabeto, ele designa as aprendizagens de leitura e escrita da língua materna. Na prática, esse termo tem colocado os processos de ensino-aprendizagem matemáticas nos primeiros anos de escolarização em um plano muito inferior ao da rotina de alfabetização, ou pior, alguns professores interpretam que avanços nos processos de alfabetização garantem progressos no desenvolvimento do sentido numérico e de resolução de problemas, o que sabemos que não é verdade.

Um processo de desenvolvimento das aprendizagens matemáticas, com compreensão das produções dos estudantes e das suas necessidades de aprendizagens, propicia a qualificação nas aprendizagens e, nos primeiros anos de escolarização, garante, pelo menos, o acesso dos estudantes aos seus direitos de aprender e de ler, interpretar e se comunicar com o mundo por meio da linguagem matemática.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf. Acesso em: 09 mai. 2024.

CURI, Edda. Práticas e reflexões de professoras numa pesquisa longitudinal. **Rev. Brasileira de Estudo e Pedagogia.** (online), vol. 94, p. 474-500, mai/ago 2013.

CURI, Edda. **Sistema de Numeração Decimal:** uso cotidiano e aprendizagens escolares. In: Conferência Interamericana de Educação Matemática - CIAEM, 13., 26 a 30 de junho, Recife. Anais. Mídia eletrônica. 2011

D'AMBROSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, M. A. (Org.) P**esquisa em Educação Matemática: concepções & perspectivas.** São Paulo: Editora UNESP, 1999. p. 97-116.

FAYOL, Michel. **A Criança e o Número:** da contagem à resolução de problemas. Porto Alegre: Artes Médicas, 1996.

GATTI, Bernardete A. O professor e a avaliação em sala de aula. **Estudos Em Avaliação Educacional,** (27), 97–114. 2003. Disponível em: https://doi.org/10.18222/eae02720032179. Acesso em: 05 out. 2024.

IFRAH, George. **Números: a história de uma grande invenção**. Tradução Stella Maria de Freitas Senra. 11. ed. São Paulo: Globo, 2005. 367 p.

KAMII, Constance. **A criança e o número.** 20. ed. Campinas: Papiros, 1995.

KAMII, Constance; HOUSMAN, Leslie Baker. **Crianças pequenas reinventam a aritmética: Implicações da teoria de Piaget**. 2. ed. Porto Alegre. ArtMed. 2002.

LERNER, D.; SADOVSKY, P. O sistema de numeração decimal um problema didático. In: PARRA, Cecília.; SAIZ, Irma. (Org.). **Didática da Matemática.** Porto Alegre: Artmed. 1996.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Crítica:** incerteza, Matemática, Responsabilidade. São Paulo: Cortez. 2007.

PIAGET, Jean; SZEMINSKA, A. **A gênese do número na criança**. Rio de Janeiro: Zahar, 1981.

TIGGEMANN, Iara Suzana. Pontos de encontro entre os sistemas notacionais alfabético e numérico. **Revista Psicopedagogia**, v. 27, n. 83, p. 288-297, 2010. Disponível em: https://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-84862010000200014&lng=pt&nrm=iso. Acesso em: 01 out. 2024.

6 - A contagem na constituição do conceito de número: implicações para a sala de aula

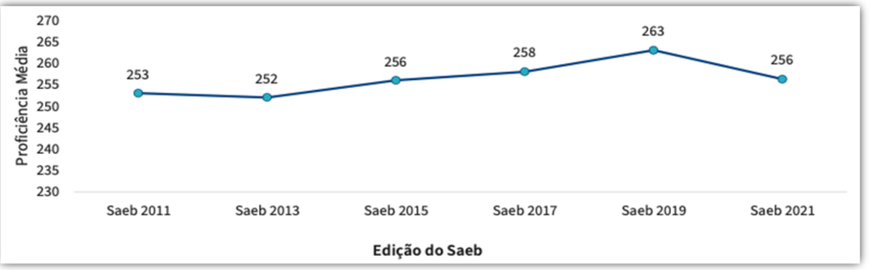
Edmo Fernandes Carvalho
Ana Maria Porto Nascimento
Fabio Nunes da Silva

Introdução

O processo de ensino e de aprendizagem no domínio dos números e operações, por vezes, pode ser considerado algo simples e natural para se aprender. Ainda assim, é possível identificar, nas avaliações de larga escala realizadas no Brasil, a existência de lacunas na aprendizagem de saberes nesse domínio matemático.

A despeito dessas lacunas, nota-se que a Prova Brasil (Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) consiste em um instrumento avaliativo que permite mapear o que foi aprendido pelo estudante e, por consequência, evidenciar o que foi ensinado pelos professores. Para que se tenha uma ideia desse mapeamento, pode-se considerar o relatório do Instituto Nacional de Pesquisas Educacionais (INEP), cujo gráfico está apresentado na Figura 1, que mostra o desempenho dos estudantes do nono ano do Ensino Fundamental. Na edição 2015 o desempenho foi de 256 pontos e na Edição de 2021 tornou a ser 256 pontos.

Figura 1. Evolução das proficiências médias no SAEB - Matemática 9º ano



Fonte: Relatório INEP 2021.

A partir da observação dos dados apresentados na Figura 1, entendemos que se faz necessário analisar quais seriam as razões pelas quais, em 10 anos (2011 - 2021), as médias de proficiência não tiveram aumento significativo, ainda que devamos considerar os impactos da Pandemia do Covid-19 nos resultados da avaliação 2021.

Além disso, cabe ressaltar que, em experiências de acompanhamento de práticas de Estágio Supervisionado nas classes dos anos finais do Ensino Fundamental, não raro nos deparamos com estudantes do sexto ao nono ano com dificuldades em conteúdos básicos de matemática, os quais deveriam, por princípio, ter sido aprendidos nos anos iniciais. Desse modo, entendemos haver a necessidade de refletir a respeito da aprendizagem, do ensino e da não aprendizagem de Matemática. Para tanto, localizamos, inicialmente, que as principais dificuldades apresentam-se tendo em vista a performance dos alunos na Prova Brasil nos últimos dez anos em todas as unidades temáticas: Números e Operações, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística.

O estudo dos conteúdos previstos nas unidades temáticas por nós destacadas contempla, de modo geral, as operações aritméticas fundamentais. Sendo assim, optamos por discutir as praxeologias e os momentos de estudo com foco no objeto matemático "Expressões Numéricas", uma vez que elas exigem o domínio tanto das operações numéricas quanto das regras matemáticas. Além disso, escolhemos analisar episódios de uma aula sobre Expressões Numéricas realizada em uma classe do sexto ano do Ensino Fundamental, a partir de uma ferramenta teórica específica, a saber, a noção de momentos de estudo proposta por Yves Chevallard (1999, 2002, 2015).

Desse modo, objetivamos a partir da análise da narrativa de uma aula, caracterizar os seus momentos de estudo, destacando o trabalho sobre a técnica e o discurso que a justifica, na tentativa de evidenciar como os referidos momentos se desassociam nas práticas institucionais.

Referencial teórico

A discussão que empreendemos aqui está alicerçada no marco teórico da Didática da Matemática, especificamente amparada na Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), à qual nos referimos por TAD.

Sob a lente da TAD, nosso foco foi a identificação dos momentos de estudo ou momentos didáticos de uma aula na qual o professor de uma classe ensina o conteúdo "Expressões Numéricas". De modo mais particular, nossa análise se detém sobre a possível existência, na aula, de dois desses momentos de estudo, a saber: o trabalho sobre a técnica de resolução de tarefas que abordam o tema expressões numéricas; e o tecnológico-teórico, ou seja, o discurso de justificação das técnicas utilizadas.

A busca por identificar esses dois momentos didáticos se deve ao reconhecimento de um fenômeno didático que tem sido abordado em nossas investigações, desde o ano de 2014: a Incompletude da Atividade Matemática Institucional (IAMI) (Farias; Carvalho; Teixeira, 2019). Essa noção foi extraída das proposições de Chevallard (1999) a respeito da necessidade de indissociabilidade dos momentos didáticos do trabalho sobre a técnica e tecnológico-teórico. Desse modo, detivemos nosso estudo na análise de episódios da referida aula, identificando os momentos a partir das ações de seus atores e de detalhes narrados do ponto de vista do observador. Além disso, demos continuidade à caracterização do fenômeno IAMI, podendo, assim, apresentar uma noção a seu respeito que permitisse caracterizá-lo e defini-lo.

Essas análises, por sua vez, foram complementadas a partir da confrontação entre os dados extraídos da narrativa da aula e os dados quanto ao que está prescrito para o ensino do saber que integra a unidade Temática Números e Operações na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018).

Orientações curriculares para o ensino de números e operações

Considerando que nosso ponto de partida foram os dados de uma avaliação externa, referentes ao período de 2011 a 2021, que inclui um período anterior à publicação da BNCC, entendemos ser necessário abordar o que está prescrito nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de Matemática

(BRASIL, 1998). No terceiro e quarto ciclos, os PCN trazem entre seus princípios norteadores o fato de que: “A atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas, mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade” (BRASIL, 1998, p. 56).

Outrossim, as prescrições da BNCC para a unidade temática “Números e operações” estão alinhadas com a expectativa de que os estudantes possam resolver problemas envolvendo as operações fundamentais com diferentes tipos de números (naturais, inteiros e racionais), de maneira a reconhecerem os significados desses números e a utilizar estratégias variadas para a resolução das operações (BRASIL, 2018). Há, ainda, um destaque para a necessidade de aprofundamento da noção de número, o que deve ser feito por meio de diferentes situações, mostrando a insuficiência de conhecer um único conjunto numérico para resolvê-las.

Além disso, vale destacar que a BNCC, assim como os PCN, não apresenta as expressões numéricas como objeto do saber a ser ensinado de forma explícita, uma vez que esse tema pode ser compreendido como ferramenta para trabalhar as operações fundamentais por meio da resolução de problemas. Em outras palavras, as expressões numéricas podem ser pensadas e utilizadas como instrumentos para atribuir significado à Matemática, pois envolvem operações aplicadas aos números conhecidos (Silva, 2009).

Quando nos referimos a uma Expressão Numérica, a compreendemos como um modo de expressar uma determinada situação problema, utilizando linguagem matemática: números, operações e sinais de associação, conforme podemos observar na Figura 2. O cálculo dessa expressão deve considerar uma ordem de prevalência e propriedades operatórias, trazendo como resultado apenas um número (Freitas, 2014). Assim, entendemos que, de modo geral, a expressão numérica é uma forma de expressar, traduzir ou descrever matematicamente uma situação (Ramos, 2002, p. 21).

Figura 2. Expressão numérica com diferentes sinais de associação.

1 Tiago recebeu **30** reais de mesada. Gastou **3** reais na compra de um gibi e **5** reais na excursão da escola. Felizmente, ele recebeu os **7** reais que havia emprestado a Edu, pois assim comprou um presente de aniversário para sua mãe no valor de **25** reais. Será que ainda sobrou dinheiro com Tiago?
Vamos expressar essa situação de duas maneiras:

Primeira maneira

- A mesada menos o valor do gibi: $\mathbf{30} - \mathbf{3} = 27$
- O que sobrou menos o valor da excursão: $\mathbf{27} - \mathbf{5} = 22$
- O que sobrou mais o que Edu pagou: $\mathbf{22} + \mathbf{7} = 29$
- Esse total menos o presente da mãe: $\mathbf{29} - \mathbf{25} = 4$

Segunda maneira

$$\overset{\text{mesada}}{\mathbf{30}} - \underset{\text{gibi}}{\mathbf{3}} - \overset{\text{excursão}}{\mathbf{5}} + \underset{\text{Edu}}{\mathbf{7}} - \overset{\text{presente da mãe}}{\mathbf{25}} = 27 - 5 + 7 - 25 = 22 + 7 - 25 = 29 - 25 = 4$$

Assim, ainda sobraram 4 reais para Tiago.

Fonte: Giovanni Junior (2022, p. 68).

Na situação representada na Figura 2, as operações aritméticas fundamentais receberam destaque linha a linha, de modo a facilitar a compreensão do algoritmo que seria apresentado na sequência. Essa é uma forma de destacar, na organização didática do livro, a ordem de prevalência das operações, associada a um contexto que se aproxima das vivências que os estudantes podem experimentar.

Indubitavelmente, situações como a da expressão numérica mencionada anteriormente são fruto do trabalho prescrito nos PCN, nos quais já se sinalizava uma necessidade de mudança de paradigma educacional, o que tem sido objeto de algumas discussões em educação. No contexto da Didática da Matemática, seguindo a orientação da escola francesa, temos discorrido a respeito de reconstrução de praxeologias matemáticas, despontando como uma demanda no processo de ensino e, consequentemente, de aprendizagem, considerada em qualquer eixo ou domínio matemático.

Desse modo, entendemos que manipular os números e as operações vai além do que tem sido noticiado como prática dominante nas instituições de ensino. Percebemos indícios de que há uma manipulação de coisas prontas, a partir do uso de ferramentas matemáticas sem reflexão da prática matemática, o que caracteriza o fenômeno Incompletude da Atividade Matemática Institucional (IAMI) (Farias; Carvalho; Teixeira, 2019).

Ademais, os PCN indicam a necessidade de práticas ancoradas na ampliação dos significados, corroborando com nossa argumentação quanto à análise das narrativas de uma aula sobre o tema expressões numéricas. Apontam, nesse caso, para a necessidade de indissociabilidade entre os momentos didáticos, principal ponto de nossa discussão.

> Assim, é fundamental que os alunos ampliem os significados que possuem acerca dos números e das operações, busquem relações existentes entre eles, aprimorem a capacidade de análise e de tomada de decisões, que começam a se manifestar. Também é necessário explorar o potencial crescente de abstração, fazendo com que os alunos descubram regularidades e propriedades numéricas, geométricas e métricas. Com isso criam-se condições para que o aluno perceba que a atividade matemática estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (Brasil, 1998, p. 63).

Quanto à atividade matemática mencionada nos PCN, fazemos uma correlação com a atividade matemática institucional, denominação utilizada nas investigações em Didática da Matemática. Além disso, apesar de as expressões numéricas não se configurarem como objeto de forma explícita e obrigatória nos PCN e na BNCC, elas têm uma vinculação profunda com o processo de resolução de problemas e com a escrita em linguagem matemática descritos nesses documentos (Ottes; Fajardo, 2017). As habilidades de resolver problemas e expressar-se em linguagem matemática, por sua vez, são ingredientes importantes no desenvolvimento da atividade matemática em uma instituição. Ainda nesse contexto, recomenda-se investigar o desenvolvimento do pensamento numérico, o qual deve se materializar por meio da exploração de situações de aprendizagem que levem o aluno a:

> *ampliar e construir novos significados para os números naturais, inteiros e racionais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de alguns problemas históricos que motivaram sua construção;
>
> * resolver situações-problema envolvendo números naturais, inteiros, racionais e a partir delas ampliar e construir novos significados da adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação;
>
> * identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos

> números naturais, racionais e inteiros, indicadas por diferentes notações, vinculando-as aos contextos matemáticos e não-matemáticos;
>
> * selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta (Brasil, 1998, p. 64).

Entendemos que, na base da constituição desse pensamento numérico, devemos incluir o processo de indissociabilidade do trabalho sobre as técnicas (ferramentas matemáticas para a resolução de tarefas) em relação ao discurso que as justifica. É nessa perspectiva que discorremos, nas próximas seções, a respeito das análises dos momentos didáticos nas narrativas de uma aula.

Além disso, não podemos realizar as análises supramencionadas sem identificarmos especificamente o que de fato a BNCC, que amplia concepções já aparentemente avançadas dos PCN, orienta. Dentre as recomendações presentes na BNCC estão as situações de estudo do desenvolvimento histórico dos saberes, a proposição de problemas que deve ser resolvida pelos estudantes e, ainda, a elaboração e resolução feitas pelos estudantes, em situações de contextos diversos, tais como contagem, ordenação, codificação e decodificação, com a compreensão de regras que caracterizam o sistema de numeração em uso (BRASIL, 2018).

Situações como as mencionadas podem, no nosso entendimento, caracterizar posturas ou gestos de estudos que integram os momentos de trabalho sobre a técnica e tecnológico-teórico. Desse modo, podemos apontar essas situações como mobilizadoras do processo de atenuação da incompletude da atividade matemática institucional no nível do estudo de conceitos e procedimentos matemáticos.

No entanto, as prescrições apontadas nos PCN e na BNCC não são fatores de restrição para as práticas institucionais docentes e discentes. Existe um campo aberto para incorporar outras situações informais que possibilitam aos estudantes compreenderem as bases das regras de cálculo com os números inteiros pela observação de regularidades e aplicação das propriedades das operações com os naturais (BRASIL, 1998), indicando um certo grau de compreensão do discurso que justifica as técnicas utilizadas para resolução dos cálculos já apresentados nos PCN.

Inferimos que as propostas apresentadas nos PCN podem contribuir efetivamente para estimular e aperfeiçoar os procedimentos de cálculos aritméticos. Outrossim, cabe um destaque quanto à relação das expressões numéricas com a noção de campo conceitual (Vergnaud, 2009), uma vez que esse objeto, fruto de uma criação didática, pertence a diversos campos conceituais, especialmente aos aditivos e multiplicativos. Outro aspecto que merece atenção, segundo Ottes e Fajardo (2017) é o fato de uma expressão numérica ser composta por estruturas aditivas ou multiplicativas, sendo que a escrita de uma expressão na forma algébrica envolve a síntese das operações aritméticas, no sentido de compreensão do ordenamento das operações enquanto a resolução dessas expressões envolve a compreensão das estruturas e propriedades relativas à Matemática do Ensino Fundamental.

Momentos de estudo no processo de ensino e aprendizagem de expressões numéricas

Nossa atenção volta-se aos dados contidos no protocolo de uma aula sobre Expressões Numéricas realizada em uma classe de sexto ano do ensino fundamental. Tendo em vista os diálogos entre professor e estudantes, confrontamos o vivenciado com o esperado institucionalmente, discussão esta que é realizada na perspectiva dos momentos de estudo ou didáticos (Chevallard, 2002). Cabe salientar que nosso interesse está na análise das praxeologias apresentadas por atores da instituição, não se tratando, assim, de uma análise do que é pessoal, mas do que caracteriza o saber-fazer matemático daquela instituição, a qual, por sua vez, dá conta das condições de sobrevivência do saber que estão em jogo nela.

Apresentamos, deste modo, um modelo de análise de praxeologias didáticas e matemáticas denominado modelo de momentos de estudo. Ele consiste em examinar os momentos de estudo e técnicas de implementação utilizados, elucidando tanto quanto possível a construção da técnica pertinente a uma tarefa e ao ambiente tecnológico-teórico que a justifica (Chevallard, 2002). Trata-se do fenômeno didático da incompletude da atividade matemática institucional no contexto do estudo dos conceitos e uso de ferramentas matemáticas.

Por meio da análise de alguns episódios (trechos da aula) tentamos elucidar os seguintes momentos de estudo: o primeiro encontro ou reencontro com uma organização matemática pontual; o momento exploratório; o momento tecnológico-teórico; o momento de institucionalização e o de avaliação. Todos eles podem não surgir em uma mesma aula transcrita, ou mesmo podem não se apresentar nessa mesma ordem, o que não significa dizer que eles não existam naquela prática institucional descrita naquele fragmento, mas que eles indicam apenas o fato de não terem ficado evidentes por essa narrativa.

Segundo Chevallard (2002), tais momentos do estudo participam da análise de um processo modelado pelo esquema hebartiano e permitem destacar o caminho a partir do qual uma resposta com selo institucional $R^{\heartsuit}$ é produzida $(S (X, Y, Q) \rightarrow M) \rightarrow R^{\heartsuit}$. Vale ressaltar que, no referido esquema, os momentos de estudo estão na transição do tripleto S (X, Y, Q) ao meio M e à resposta $R^{\heartsuit}$.

Ademais, tão importante quanto destacar as respostas produzidas em um determinado meio é compreender o que leva X a estudar, Y a ajudar nesse processo de estudo, de resolução de uma Questão (Q) ou uma situação problema e o que constitui o meio (M), que viabiliza o estudo de uma obra (matemática no contexto dessa aula).

Metodologia

A abordagem metodológica do presente estudo é de natureza qualitativa (Creswell; Creswell, 2007), em que buscamos a compreensão dos efeitos de fenômenos didáticos por meio das praxeologias matemáticas construídas em uma aula. Quanto aos métodos utilizados, Chevallard (2015) denomina essa abordagem de Praxeologias de Pesquisa em Didática, que é uma classificação geral. Nela, o foco está na tentativa de estudar as praxeologias matemáticas em instituições para o ensino de saberes matemáticos, configurando, dentre outras coisas, as condições alcançadas, bem como as restrições para o desenvolvimento da atividade matemática dos sujeitos, de modo a caracterizar como as pessoas promovem mediações sobre os objetos do conhecimento.

O estudo foi parte de um projeto guarda-chuva de um grupo de investigação em didática das ciências, matemática e tecnologias, em escolas do ensino fundamental, em classes do sexto ano, nas quais se localizavam as expressões numéricas como objetos do conhecimento a serem ensinadas. Os sujeitos colaboradores da investigação foram professores e estudantes na faixa etária de 10 a 12 anos.

Os professores das turmas eram também membros do grupo de pesquisa, o que assemelhou o método utilizado na produção dos dados às etapas iniciais de uma Engenharia Didática clássica (Artigue, 1988). O objeto do conhecimento, considerado uma criação didática no contexto institucional, era trabalhado nas turmas do sexto ano logo após o as operações aritméticas fundamentais com números naturais e racionais.

Os excertos do protocolo que utilizamos neste capítulo são recortes de aulas que tiveram seus áudios e vídeos gravados por membros do grupo de pesquisa, em um trabalho de ergonomia cognitiva, conduzido pelo líder do grupo e de um pesquisador francês especialista nesse tema. Apesar de as gravações em áudio e vídeo permitirem a análise posterior de praxeologias dos colaboradores, o objetivo das gravações era a análise daquilo que poderia ser considerado a respeito da instituição. Sendo assim, interessou mais identificar, por exemplo, um momento de trabalho da técnica na classe colaboradora do estudo, pela identificação de que isso é um padrão da turma, do que pelo fato de ter ocorrências isoladas, ainda que essas ocorrências tipifiquem melhor o momento didático em jogo.

Apresentação e análise dos dados

A escolha de apresentar os momentos de estudo na aula torna a discussão dos dados mais clara. Desse modo, identificamos primeiro o momento de encontro dos estudantes com a Organização Matemática (OM) proposta pelo professor regente da classe.

Entre dois e três minutos da aula, o professor, após passar algumas orientações para a classe, realiza a leitura de um problema que estava estampado em um cartaz com algumas outras informações. Consideramos este o primeiro momento de encontro com uma Organização Matemática Pontual (OMP), uma vez que foi nele que a turma, juntamente com o professor, debruçou-se sobre a leitura para posterior resolução da tarefa proposta, como pode ser observado no trecho que se segue:

> *Professor*: Um aluno foi a essa papelaria e comprou três cartolinas, uma cola, uma tesoura, quatro lápis, uma régua e oito folhas de ofício. Sabendo que esse aluno pagou a conta com uma nota de 20 reais, quanto … quanto ele recebeu de troco? (Leitura do problema que estamos chamando de OMP).

A partir da leitura do excerto, observamos que, de imediato, os estudantes, ao terem o primeiro encontro com a OMP, responderam em coro que o troco era cinquenta centavos, o que ocorreu na forma interrogativa. Contudo, percebemos que mesmo no enunciado do problema faltam informações que constam no cartaz afixado pelo professor em uma das paredes da sala, próxima ao quadro.

Estudantes: Cinquenta centavos? (Resposta em coro dos estudantes aos 3:27 minutos).

A resposta apresentada pelos estudantes não dá indícios do momento de trabalho sobre a técnica, que muito nos interessa para efeito da análise do fenômeno didático da incompletude da atividade matemática institucional no contexto da compreensão desse saber. Somente quando eles estão sob a mediação do professor, partem para uma tentativa de resolução, mobilizando os conhecimentos adquiridos anteriormente à aula, utilizando ferramentas matemáticas que constituem seus repertórios, momento que vamos considerar como de trabalho da técnica.

Ao analisar o protocolo da aula (narrativa da aula), identificamos se esse momento de trabalho sobre a técnica existiu nas práticas institucionais, tendo em vista o contexto específico dessa aula, considerando as praxeologias matemáticas e didáticas deduzidas pelos fragmentos, expostos no Quadro 1, em que os números na primeira coluna à esquerda indicam a divisão dos trechos do episódio, o estudante é identificado por E.

Quadro 1. Episódio trabalho sobre a técnica.

79	12:05 a 15:14	Professor	Os cálculos colocados aqui, eu imagino que E6 tenha ... colocou aqui é 55 + 55 + 55 é referente a ... hein ...? 3 cartolina não é?	Professor aponta para o cartaz onde está a quantidade de cartolina a ser comprada.
80	12:14 a 12 :15	E6	É.	Vídeo não mostra a aluna
81	12:06 a 12:27	Professor	Depois ela colocou aqui estas 3 cartolinas, mas não colocou sinal, eu vou colocar em preto é uma adição.... aqui de preto. Eu vou colocar deve ser mais, adição. Mais, ela fez aqui deve ser adição.	Professor coloca o sinal de adição na operação
82	12:28 a 12:44	Professor	5 + 5 + 5, 15 vai 1. 5 + 5 + 5 e 1, 16, aí ela lançou uma vírgula aqui, não sei como, querendo dizer que as 3 cartolinas vale 1 e 65.	Professor efetua a operação no quadro.
83	12:45 a 12:56	Professor	Aqui ela realizou nova soma, também vou colocar o sinal de mais. 5 + ela colocou zero, 10 vai 1.	Professor coloca o sinal da adição na operação.
84	12:57 a 13 :00	Professor	Também vou colocar o sinal de mais. E3 nem E4 estão olhando para cá.	Professor ao se voltar para os alunos, percebe a distração dos dois alunos

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Pela narrativa e praxeologia matemática descritas, o protagonismo no momento didático deduzido do quadro acima é do professor, visto que este ator é quem desenvolve, no quadro branco, uma resolução que deverá ser seguida como modelo pelos estudantes. As ferramentas matemáticas utilizadas são registradas pelas narrativas do quadro e pelos estudantes nos seus cadernos, no entanto, não conseguimos, a partir da descrição, identificar como foi o trabalho dos discentes, como é possível observar nos fragmentos expostos no Quadro 2.

Quadro 2. Resolução de tarefa pelo professor

86	13:04 a 13:20	Professor	... com 1 que foi mais seis, sete mais 2 nove. 5, 14 com mais 4 dezoito, com mais 4,22 vai 2 .. .. não foi?	Professor se volta para a aluna e faz a pergunta.
87	13:20 a 13:35	Professor	1 + 1 dois e 3 cinco e dois 7 com mais 2 que foi, nove. Mostra que... a compra que o aluno fez foi quanto?	Professor olhando para a turma, mostra a relação de material contida no problema.
88	13:36 a 13:39	Professor	Esse montante que ela colocou aqui é de 20. Aqui ó.	Professor demonstra no quadro, uma mão com o piloto no quadro e a outra mão com o dedo indicador para os alunos
89	13 :4 a 13:43	Professor	E o que ela deu para pagar a conta.	Professor se volta para a aluna e faz a pergunta
90	13 :44 a 13:49	Professor	E aqui, ela fez o que? Uma subtração não foi?	Professor se volta para a aluna e faz a pergunta
91	13:50 a 13:53	Professor	Ela fez a subtração dos 20 (vinte) e tirou nove e vinte e ficou com quanto?	Professor demonstra a operação no quadro.
92	13:53 a 13:56	E11	Responde dez e oitenta	A aluna responde, mas não aparece no vídeo

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

A técnica concreta utilizada por esses atores (estudantes e professor), representada por τ, pode ser escrita:

> R$20,00 (quantia inicial que um aluno levou a papelaria) menos R$9,20 (somatório dos valores dos objetos comprados) é igual a R$10,80.
> 20 – 9,20 = 10,80 (Expressão numérica correspondente à situação).

Vale ressaltar que, como na parte inicial do protocolo, não são descritos os valores contidos no cartaz, temos apenas a soma dos objetos comprados pelo aluno, o que não revela o algoritmo do objeto trabalhado nessa aula, a expressão numérica.

Talvez seja um equívoco afirmarmos que o momento do Quadro 1 seja o de trabalho de organização matemática (da técnica). Diante do suposto protagonismo docente nesse episódio, caberia, por um lado, considerarmos que o professor, tendo tomado para si a responsabilidade de apresentar uma técnica e sobre ela realizar algumas formalizações, caracteriza o momento de institucionalização do objeto do conhecimento. Por outro lado, os gestos docentes ao realizar a resolução da tarefa no quadro branco podem corresponder, conjuntamente com a participação dos estudantes, questionando-os sobre as ferramentas matemáticas que deveriam ser utilizadas, ao momento de exploração da tarefa, o qual expressa a emergência da técnica.

Esse momento de institucionalização é definido por Chevallard (2002) como aquele em que o estudante tem que corrigir suas estratégias, o que é um gesto de estudo de suma importância para que não sejam cristalizadas nas praxeologias matemáticas, ferramentas inconsistentes do ponto de vista da epistemologia geral da matemática (aquilo que é considerado oficial e que se aproxima da matemática vista pelos professores em cursos de formação docente). Foi o que parece ter ocorrido quando o professor pôs em teste as estratégias utilizadas pelos estudantes fazendo registros no quadro. No entanto, o referido protocolo é fruto da gravação da aula analisada, o que não nos permite observar os registros feitos pelos estudantes em seus cadernos.

Percebemos, na aula, indícios desse momento de institucionalização, estimulado pelo professor nos trechos que seguem descritos no Quadro 3:

Quadro 3. Diálogo sobre outra estratégia de resolução do problema.

114	15:19 a 15:21	Professor	Mas eu vou fazer também de outra maneira.	Professor apaga o quadro
115	15:22 a 15:29	Professor	Veja como eu poderia fazer, e eu acho que já fizeram algo parecido. Veja, o que você fez, tá certo viu….E4.	Continua a ação anterior.
116	15:30 a 15:32	Professor	Muito bem, mas poderia ser feito assim, observe.	Professor se dirige ao cartaz.
117	15:33 a 15:48	Professor	Um aluno foi a papelaria... como nós já vimos todos esses dados, e comprou 3 cartolinas, 1 cola, 1 tesoura, 4 lápis, 1 régua e 3 folhas de ofício. Sabendo que este aluno pagou a conta com uma nota de R$ 20,00, quanto ele recebeu de troco?	Professor ler o problema no cartaz.

Fonte: Dados da pesquisa (2020).

Reforçamos que caso o professor registrasse uma expressão em que as operações realizadas estivessem representadas em determinada ordem, poderia ter se aproximado do objeto matemático que supostamente pretendia explorar, como ocorre, por exemplo, em:

> 3 x o valor de uma cartolina + o valor de uma cola + o valor de tesoura + 4 x o valor de um lápis + o valor de uma régua + 3 x o valor de uma folha de ofício.

A correção, juntamente com a discussão do problema mostrada nos quadros 2 e 3 pode ser entendida, dentro da perspectiva defendida por Chevallard (2002), tanto como o momento de institucionalização, o que para nós parece ser o mais evidente, quanto como o momento do trabalho da organização matemática, desde que o exercício esteja corrigido, uma vez que é nessa circunstância que vemos materializada a técnica. Podemos, assim, tratar da existência do momento de trabalho da técnica, o qual tem uma participação tímida no protocolo da aula com o tema expressões numéricas.

Ao se perguntar a respeito do que vale ou do que foi construído frente a uma tarefa proposta, o aluno apresenta um gesto de estudo condizente, como o que ocorre no momento de avaliação (Chevallard, 2002). O professor insere no meio didático outra tarefa, agora denominando-a de expressão numérica, podendo conduzir o estudante a gestos condizentes com esse momento didático, como pode ser observado no Quadro 4. No entanto, cabe ressaltar que não surgem, em nenhum dos trechos subsequentes, indícios de que os estudantes tenham refletido sobre o que fica das técnicas de propriedades desse objeto do conhecimento em estudo.

Vale destacar que esses diferentes momentos didáticos discutidos aqui, ainda que tenhamos tentado apresentar a partir de uma certa ordem estabelecida, têm uma ordem natural arbitrária, isso porque, segundo Chevallard (2002) eles são, em primeiro lugar, uma realidade funcional dos gestos de estudo e não uma realidade cronológica.

Ademais, a construção do momento tecnológico-teórico, como já discutimos, confunde-se com o momento agora cronológico, em que o professor apresenta propriedades matemáticas para resolução do problema dado, apresentando-o por meio de uma expressão numérica, sendo que não temos clareza quanto à sua representação até que seja dada aos alunos uma nova tarefa (OMP).

Discussão e considerações

Da análise realizada a respeito dos episódios que constituíram a aula sobre o tema "expressões numéricas", tomando como referência a noção de momentos didáticos, com foco em dois desses momentos, a saber, o técnico-prático e o tecnológico-teórico, devemos destacar uma lacuna que apontamos como base de um fenômeno didático denominado de incompletude da atividade matemática institucional, ou seja, a solidariedade epistemológica entre esses dois momentos, como uma exigência didática chave (Chevallard, 2002).

Um detalhe importante a se destacar nessas práticas institucionais diz respeito à concentração no papel do professor, quanto à condução e quase que única responsabilidade pelo desenvolvimento da aula no que tange ao bloco tecnológico-teórico das praxeologias descritas no protocolo que apresentamos ao longo do texto. Essa parece ser uma restrição institucional importante, pois limita o papel do estudante a contemplador de um monumento matemático, em muitos casos, impedindo que ele realize sua autonomia didática, no sentido de ser corresponsável pelos gestos de estudo necessários para sua aprendizagem.

De modo geral, em nossa prática, o trabalho da técnica e o discurso tecnológico-teórico encontram-se dissociados e talvez isso justifique o fato de, na aula analisada, não ter ficado claro o objeto matemático que o professor se propôs a ensinar. Desse modo, ao destacar os momentos de estudo, refletimos a respeito da necessidade de buscar metodologias que superem essa desassociação entre os dois momentos analisados. Uma forma de trabalho indicada em vários documentos curriculares atuais é a resolução de situações problemas, em que as expressões numéricas funcionam como ferramentas para representar matematicamente tais situações.

Permanecem as preocupações e indagações em relação ao ensino e à aprendizagem destes objetos do saber: os números e as operações aritméticas, os quais, no sexto ano, apresentam-se como algo de difícil compreensão pelos estudantes, mesmo depois de terem cursado do primeiro ao quinto ano do Ensino Fundamental e, nesse período, de acordo com o prescrito nas diretrizes curriculares, terem estudado estes objetos. De certo modo, tem-se mostrado como um processo de ensino complexo, sendo um aspecto que merece atenção dos pesquisadores em Educação Matemática.

Uma reflexão pertinente para a formação inicial do professor que ensina matemática é a qualidade da relação das pessoas que ensinam essa disciplina com as regras matemáticas. Além disso, há que se considerar a habilidade de relacionar a língua materna e a linguagem matemática, pois a praxeologia do professor, estudada neste texto, não denotou relação da leitura da situação com a correspondente expressão numérica que representa essa situação. É, portanto, necessário investir no desenvolvimento desta relação saudável entre o futuro professor e as regras matemáticas, de modo que consiga justificar e compreender a linguagem matemática.

Referências

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, v. 9, n. 3, p. 281-308, 1988.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. Brasília: MEC / SEF, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. **Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira** (Inep). Resumo Técnico: Censo Escolar da Educação Básica 2021. Disponível em: https://download.inep.gov.br/educacao_basica/saeb/2021/resultados/relatorio_de_resultados_do_saeb_2021_volume_1.pdf. Acesso em: 23 de set. 2024.

CHEVALLARD, Yves. L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. **Recherches en Didactiques des Mathématiques**, v. 19, n. 2. Grenoble: La Pensée Sauvage, 1999. p. 221- 266.

CHEVALLARD, Yves. Organiser l'étude 1. Structures et fonctions, In: J.-L. DORIER et al.(Eds.). **Actes** de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques, Corps, 21–30 Août 2001, La Pensée Sauvage, Grenoble, 2002, pp. 3–22.

CHEVALLARD, Yves. **Sur les praxéologies de recherche en didactique**. 2015. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Notes_pour_les_PRD_2.pdf. Acesso em: 14 ag. 2017.

CRESWELL, John W.; CRESWELL, David. **Projeto de Pesquisa**: Métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução Luciana de Oliveira da Rocha. 2. ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

FARIAS, L. M. S.; CARVALHO, E. F.; TEIXEIRA, B. F. O trabalho com funções à luz da incompletude do trabalho institucional: uma análise teórica. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 20, n. 3, jan. 2019. ISSN 1983-3156. Disponível em: https://revistas.pucsp.br/emp/article/view/40112. Acesso em: 23 ago. 2024.

FREITAS, H. S. **Expressões numéricas e suas abordagens em livros didáticos de matemática do 6 º ano do ensino fundamental**. 2014. 110 f. Dissertação (Mestrado em Educação). Instituto de Educação, Universidade Federal de Mato Grosso, Cuiabá, 2014.

GIOVANNI JUNIOR, J. R. **A Conquista da Matemática**: 6º ano, ensino fundamental, anos finais. 1 ed. São Paulo: FTD, 2022.

OTTES, A. B.; FAJARDO, R. Um olhar sobre a hierarquia das quatro operações aritméticas nas expressões numéricas. **Educação Matemática Debate**, Montes Claros, v. 1, n. 2, maio/ago. 2017. Disponível em: https://www.periodicos.unimontes.br/index.php/emd/article/view/30/20. Acesso em: 30 ago. 2024.

RAMOS, Luzia Faraco. **O que fazer primeiro?** 18. ed. São Paulo: Ática, 2002.

SILVA, G. C. M. da. **O ensino e aprendizagem de expressões numéricas para o ensino fundamental com a utilização do jogo contig 60**. 2009. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo. 2009

VERGNAUD, G. **A Criança, a Matemática e a Realidade**: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009.

7 - O ensino de números inteiros na formação inicial de professores de Matemática: ações e reflexões em um curso de teoria dos números

Lineu da Costa Araújo Neto

Introdução

O objetivo principal de um curso de licenciatura no Brasil é formar profissionais para atuar no magistério da educação básica. De acordo com a Resolução CNE/CP nº 4, de 29 de maio de 2024, que dispõe sobre as diretrizes curriculares nacionais para a formação inicial em nível superior de profissionais do magistério da educação escolar básica,

> [...] os cursos de formação inicial deverão garantir nos currículos conteúdos específicos da respectiva área de conhecimento ou interdisciplinares, seus fundamentos e metodologias, bem como conteúdos relacionados aos fundamentos da educação [...] deverá ser garantida, ao longo do processo, efetiva e concomitante relação entre teoria e prática, ambas fornecendo elementos básicos para o desenvolvimento dos conhecimentos e habilidades necessários à docência (Brasil, 2024).

Todavia, vários trabalhos enfatizam a desarticulação entre a teoria ensinada na universidade e a prática adotada em sala de aula no processo de formação inicial do professor de Matemática. Conforme atestam Moreira e David (2003, 2005), Fiorentini (2005), Gatti (2009), Moreira (2012), Fiorentini e Oliveira (2013), Moreira e Ferreira (2013), Volkman, Pereira e Luccas (2019) e Barichello e Firer (2021), alguns problemas merecem ser destacados no caso da licenciatura em Matemática:

a) A desarticulação entre as disciplinas específicas do bacharelado em Matemática (Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica, Álgebra Linear, Análise, Álgebra, Variável Complexa, Probabilidade, entre outras), que ocupam uma parcela significativa do currículo da licenciatura, as disciplinas pedagógicas oferecidas pela Faculdade de Educação (Organização da Educação Brasileira, Didática Fundamental, entre outras) e as disciplinas da área de Educação Matemática (estágios curriculares supervisionados e outras disciplinas práticas específicas da licenciatura), que são relegadas à parte final do curso. Trata-se de uma estrutura curricular que guarda resquícios do modelo 3 + 1, em que os licenciandos cursariam três anos de matérias específicas do bacharelado e um ano de matérias voltadas à didática e à prática pedagógica;

b) A falta de conexão entre a matemática acadêmica – aquela que é concebida pelos matemáticos profissionais que produzem novos conhecimentos matemáticos e é ensinada aos licenciandos em disciplinas específicas oferecidas pelo Departamento de Matemática, caracterizada por apresentar a Matemática de forma axiomática, abstrata, conceitual e com ênfase nas demonstrações de teoremas –, e a matemática escolar – aquela que será ensinada pelos egressos da licenciatura nas escolas da educação básica;

c) As lacunas na formação matemática dos ingressantes e dos egressos da licenciatura no que concerne à matemática aprendida ao longo dos 12 anos da escolarização básica;

d) A crença de que a matemática escolar é simples e conhecida e, como tal, não precisa ser ensinada na licenciatura;

e) A crença de que ter um conhecimento sólido da matemática acadêmica é uma condição suficiente para dominar a matemática escolar;

f) A formação acadêmica dos professores formadores, que, em sua maioria, são doutores em Matemática Pura ou Aplicada, sem uma devida experiência com a área de Educação Matemática.

Dessa forma, cria-se um círculo vicioso no qual o licenciando entra no curso de Matemática com uma formação matemática precária e, ao sair dele, além de não ter suprido tais lacunas, ainda não aprende a matemática necessária para a sua futura prática docente. Ou seja, o futuro professor de Matemática vai acabar ensinando como lhe foi ensinado, de forma algorítmica e com foco em regras e macetes desprovidos de significado, baseando suas aulas nos livros didáticos e nas lembranças das aulas de professores que o marcaram ao longo de sua trajetória escolar. Mas, afinal, para que serve fazer um curso superior na formação do futuro professor de Matemática? Qual será o impacto efetivo da licenciatura na sua futura prática docente em sala de aula?

Nessa perspectiva, o objetivo deste trabalho é fazer a conexão entre a matemática acadêmica e a matemática escolar a partir de uma proposta pedagógica inovadora do autor como docente da disciplina *Teoria dos Números 1* oferecida pelo Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (MAT/UnB). A escolha desse tema da matemática acadêmica está atrelada à minha trajetória acadêmica e profissional na UnB, inicialmente como ex-aluno da referida disciplina durante o bacharelado em Matemática, depois como bolsista de iniciação científica e mestre na área e, atualmente, como formador de futuros professores de Matemática para a educação básica.

Para situar as diferentes percepções - como aluno, professor e formador - acerca da Teoria dos Números, inicialmente faz-se necessário descrever a importância dessa disciplina no âmbito da educação básica, da licenciatura em Matemática e da pesquisa em Educação Matemática.

A Teoria dos Números na Educação Básica e no Ensino Superior

Ao perguntar a um leigo como ele definiria a Matemática, é muito provável que sua resposta seja similar a algo do tipo "é a ciência que estuda os números", visto que o primeiro contato dele com a área se dá por meio dos processos de contagem com números naturais, o qual se estende ao longo de todo o processo de escolarização básica com o estudo das propriedades e operações com números inteiros, racionais, reais e complexos.

Em particular, os números naturais e os números inteiros ocupam uma posição central no currículo de Matemática da educação básica. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento oficial atualmente vigente que normatiza o conjunto de aprendizagens essenciais a serem desenvolvidas pelos estudantes ao longo de todas as etapas de escolarização (educação infantil, ensino fundamental e ensino médio) da educação básica, o estudo dos números naturais inicia-se no 1º ano do ensino fundamental e permeia o currículo escolar até o 5º ano, culminando no 6º e 7º anos com o estudo dos números inteiros a partir das noções de ordenação, associação com pontos da reta numérica, operações de adição, subtração e multiplicação, divisão euclidiana, critérios de divisibilidade, números pares e ímpares, múltiplos e divisores, números primos e compostos e máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum (BRASIL, 2018).

A importância de tais tópicos sinaliza a relevância de que tais conceitos sejam contemplados em uma disciplina de graduação destinada a formar futuros professores de Matemática para a educação básica. Tal disciplina, que estuda as propriedades do conjunto dos números inteiros $Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ e de seus subconjuntos (por exemplo, o conjunto dos números naturais $N = \{1, 2, 3, \dots\}$, o conjunto dos números primos $P = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$ etc.), representa a área da matemática acadêmica conhecida por Teoria Elementar dos Números, doravante chamada apenas de Teoria dos Números. Seu estudo formal remonta à Grécia Antiga, a partir dos trabalhos de Pitágoras (século VI a. C.) e de Euclides (aproximadamente 300 a. C.), e atualmente possui aplicações em diferentes áreas do conhecimento tais como segurança de dados, criptografia, códigos corretores de erros, assinaturas digitais, análise de complexidade de algoritmos, entre outras.

Há várias razões para estudar Teoria dos Números na licenciatura em Matemática. Primeiramente, diferentemente de outras disciplinas da matemática acadêmica, a Teoria dos Números é uma área que é familiar ao licenciandos por abordar, de modo axiomático, rigoroso e conceitual, assuntos já estudados ao longo da educação básica de maneira procedimental e superficial. Em segundo lugar, tal disciplina é um terreno fértil para o aluno ter um primeiro contato com os vários tipos de demonstrações (direta, indireta, redução ao absurdo e por indução) que caracterizam o raciocínio lógico-dedutivo tão importante em Matemática. Em terceiro lugar, ela é uma "ponte" entre o pensamento aritmético (popularmente conhecido como "fazer contas") e o pensamento algébrico (compreensão dos conceitos e padrões numéricos) (Lins; Gimenez, 1997). Finalmente, tal curso é uma oportunidade única na formação do futuro professor de Matemática para que ele vivencie o pensar e o fazer matemática ao testar hipóteses, fazer conjecturas, tentar validar um raciocínio, buscar generalizar e desvendar padrões, além de usar o pensamento crítico e criativo na resolução de problemas.

Todavia, a maneira com que tal campo de estudos é trabalhado na educação básica e no ensino superior é diametralmente oposta: enquanto no 6º e 7º anos do ensino fundamental ele é abordado de modo prático, concreto e contextualizado, no âmbito universitário o seu enfoque é predominantemente teórico, abstrato e formal, com ênfase em definições e demonstrações de teoremas, o que evidencia a ausência de uma preocupação com a formação do futuro professor de Matemática da educação básica.

Embora seja um campo de estudo ainda incipiente na área de Educação Matemática, o processo de ensino e aprendizagem da Teoria dos Números tem sido contemplado em várias pesquisas nacionais e internacionais nos últimos anos.

No âmbito internacional, podemos citar o trabalho precursor da pesquisadora canadense Rina Zazkis, que tem estudado o papel da Teoria dos Números na formação de futuros professores de Matemática nos Estados Unidos, Canadá, Reino Unido e Itália, com ênfase na estrutura multiplicativa e na divisibilidade dos números inteiros, contemplando, principalmente, o *Teorema Fundamental da Aritmética* (*TFA*) e conceitos correlatos tais como múltiplos e divisores, números primos e compostos, critérios de divisibilidade, máximo divisor comum (m.d.c.) e mínimo múltiplo comum (m.m.c.) (Zazkis; Campbell, 1996a, 1996b, 2002, 2006; Zazkis, Liljedahl, 2004).

Já no cenário nacional, merece destaque, pelo seu pioneirismo, a tese de doutoramento de Marilene Ribeiro Resende (Resende, 2007) pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Após analisar as propostas curriculares da disciplina de Teoria dos Números para a licenciatura em Matemática em 12 universidades brasileiras e os 10 livros didáticos mais citados da referida disciplina e realizar entrevistas semiestruturadas com 7 professores e pesquisadores de Teoria dos Números e da Educação Matemática, ela procurou ressignificar a Teoria dos Números no currículo da licenciatura em Matemática.

A partir dos trabalhos de Zazkis e Resende, emergiram recentemente vários trabalhos acerca da Teoria dos Números no Brasil, contemplando, entre outros conteúdos, o uso de atividades lúdicas para ensinar o *TFA* a alunos do 6º ano do ensino fundamental (Barbosa, 2008), o estudo de equações diofantinas por alunos do ensino médio (Pommer; Pommer, 2013; Silva; Brito; Sousa, 2020), os conhecimentos mobilizados por licenciandos em Matemática por meio de sequências didáticas acerca do conteúdo de números primos e do *TFA* (Fonseca, 2015), os conhecimentos acerca da divisibilidade de números inteiros (problemática da divisão por zero, definição de divisibilidade, *Algoritmo da Divisão de Euclides*, números pares e ímpares) abordados por livros didáticos e mobilizados por licenciandos em Matemática (Mandler, 2016), os conhecimentos de grupos de licenciandos de Matemática acerca de equações diofantinas (Amorim; Pietropaolo; Galvão; Silva, 2020; Hartmann; Silva; Binotto, 2023), os conhecimentos especializados mobilizados por professores formadores de licenciandos acerca do *Algoritmo da Divisão de Euclides* e do conceito de ordem nos inteiros (Almeida, 2020), os conhecimentos especializados e as concepções de professores de Matemática em exercício acerca do *TFA* (D'Almeida, 2021), os conhecimentos de licenciandos acerca do *TFA* (Barbosa, 2021) e os conhecimentos mobilizados por licenciandos acerca do *Algoritmo da Divisão de Euclides* (Melo; Oliveira, 2023).

Vê-se, pois, que as pesquisas na área de Teoria dos Números têm preconizado tópicos contemplados pela BNCC para o 6º e 7º anos do ensino fundamental. A fim de situar como tais conteúdos são abordados no ensino superior, vamos restringir nossa atenção agora à estrutura curricular do curso de Teoria dos Números oferecido atualmente pelo MAT/UnB.

O ensino tradicional de Teoria dos Números na Unb

Teoria dos Números 1 é uma disciplina de 4 créditos (60 horas) oferecida semestralmente em caráter obrigatório para alunos de licenciatura em Matemática e eletiva para os demais estudantes (em geral, discentes dos bacharelados em Matemática, Ciência da Computação, Engenharia da Computação, Engenharia Elétrica, Engenharia Mecatrônica e Engenharia de Redes de Comunicação). Desde 2001, quando comecei a lecionar tal disciplina, ela tem sido ministrada por apenas 6 professores, dos quais 3 com doutorado na área, 2 com doutorado em Álgebra (Teoria dos Grupos) e 1 com doutorado em Educação.

Sua ementa está dividida em três módulos, conforme o quadro a seguir:

Quadro 1. Ementa e programa do curso de Teoria dos Números 1 do MAT/UnB.

Módulo	Ementa	Programa
1	Indução Matemática e Divisibilidade em Z	Princípio da Boa Ordenação, Princípio da Indução Matemática (1ª e 2ª formas), noções de múltiplos e divisores, números primos e números compostos, m.d.c. e m.m.c., Algoritmo da Divisão de Euclides, Método das Divisões Sucessivas para o Cálculo do m.d.c., equações diofantinas lineares, TFA e aplicações (crivo de Eratóstenes)
2	Aritmética Modular	Definição e propriedades de congruências, sistemas completos e reduzidos de resíduos, critérios de divisibilidade, Pequeno Teorema de Fermat, Teorema de Euler, Teorema de Wilson, Teorema Chinês dos Restos e aplicações (códigos de barras, noções de criptografia, entre outras)
3	Tópicos Adicionais	Funções aritméticas $\sigma(n), \tau(n)$ e $\varphi(n)$, números poligonais, perfeitos, de Fermat, de Mersenne, de Fibonacci e triplos pitagóricos, raízes primitivas, símbolo de Legendre e Lei da Reciprocidade Quadrática de Gauss

Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observamos que o conteúdo do módulo 1 contempla todo o conteúdo de Aritmética sugerido pela BNCC para o 6º e 7º anos do ensino fundamental. Tal conteúdo remonta à obra *Os Elementos* do matemático Euclides de

Alexandria (aproximadamente 300 a. C.), uma coleção de 13 livros (capítulos), dos quais 3 deles abordam os tópicos essenciais da Aritmética a partir de uma visão geométrica dos números naturais (para Euclides, um número natural era a medida de um segmento de reta), a saber: o Livro VII contempla os conceitos de divisibilidade, números primos e números compostos, números perfeitos, m.d.c. e m.m.c., algoritmo da divisão e o método das divisões sucessivas para o cálculo do m.d.c., o Livro VIII, propriedades de sequências de números em progressão geométrica, e o Livro IX, as demonstrações da infinitude de P e do TFA e uma condição necessária para que um número natural seja perfeito. Além de *Os Elementos* de Euclides, outra obra importante contemplada no módulo 1 é *Arithmetica*, um compêndio de 13 livros (capítulos) escrito pelo matemático Diofanto de Alexandria (aproximadamente 250 d. C.), no qual eram propostos e resolvidos problemas aritméticos em Z (as chamadas *equações diofantinas*).

O módulo 2, por sua vez, é dedicado ao estudo da obra *Disquisitiones Arithmeticae*, escrita pelo eminente matemático alemão Carl Friedrich Gauss (1777-1855) em 1801, que começa com a importante definição de congruência módulo n, perpassa por propriedades da aritmética modular e culmina com um dos teoremas mais importantes da Teoria dos Números – a *Lei da Reciprocidade Quadrática* –, a qual é estudada no módulo 3, juntamente com as funções aritméticas e os números notáveis.

Embora haja uma bibliografia-padrão sugerida pela Ementa e Programa da disciplina MAT0038 – Teoria dos Números 1 (Universidade de Brasília, 2024), cada professor costuma adotar os livros de sua preferência. No meu caso particular, opto pelas notas de aula de Maier (2005) e pelos livros de Alencar Filho (1988), Santos (2011), Coutinho (2014), Silva e Gomes (2018) e Hefez (2022), dentre outros.

Apesar de não ter pré-requisitos e de abordar alguns conceitos já conhecidos desde o ensino fundamental, tal disciplina está alocada no 3º semestre do fluxo da licenciatura em Matemática, de modo que o aluno já deve ter tido contato com algumas matérias no âmbito da matemática acadêmica, a saber: Cálculo 1, Geometria Analítica, Cálculo 2 e Introdução à Álgebra Linear. Espera-se, pois, que o estudante já tenha adquirido uma certa maturidade matemática no que concerne ao raciocínio lógico-dedutivo inerente à construção da Matemática. Todavia, não é o que se observa na prática.

Desde a minha época com aluno e mesmo depois como professor da disciplina, tenho constatado que *Teoria dos Números 1*, cujo modelo de ensino está ancorado no tripé “definição + teorema + demonstração”, ainda é uma disciplina temida pelos estudantes em virtude do seu grau elevado de formalismo e abstração. Afirmações que no ensino fundamental eram introduzidas por meio de exemplos e, como tal, eram aceitas naturalmente, agora devem ter sua veracidade comprovada por meio de demonstrações, o que acaba "frustrando" os alunos acostumados ao modelo tradicional de ensino da Matemática em que qualquer resultado deve apenas ser memorizado e reproduzido por meio de regras e fórmulas, sem questionamentos.

A título de ilustração, quando preciso demonstrar em sala de aula que "dados dois números naturais a e b, então existem únicos q (quociente) e r (resto) tais que $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$" (*Algoritmo da Divisão de Euclides*), "todo número natural $n > 1$ pode ser escrito, de forma única, como um produto de números primos (TFA)", "P é infinito" ou " um número natural n é múltiplo de 3 se, e somente se, a soma de seus algarismos é múltipla de 3", noto que muitos alunos perdem o interesse imediatamente na aula, visto que eles não entendem como resultados "óbvios" no 6º e 7º anos do ensino fundamental agora precisam ser verificados rigorosamente por meio de argumentos matemáticos encadeados logicamente que, por vezes, eles acham demasiadamente complicados e enfadonhos.

Mas, afinal, como a Teoria dos Números acadêmica deve ser ensinada nos cursos de licenciatura em Matemática de modo a subsidiar a prática docente do futuro professor de Matemática nas salas de aula da educação básica? Para responder a esse questionamento, pretendo indicar um caminho que tenho adotado em minha prática docente desde 2014 de forma a minimizar as dificuldades encontradas pelos alunos durante a disciplina.

Uma abordagem inovadora para o ensino da Teoria dos Números

A fim de aproximar a Teoria dos Números acadêmica da Teoria dos Números escolar, julgo ser pertinente adotar uma metodologia ancorada nas principais tendências da área de Educação Matemática. Nesse contexto, eis algumas estratégias didático-metodológicas que tenho adotado em minha prática docente para tornar tal disciplina mais acessível e atraente para os licenciandos:

a) Uso de problemas famosos na área, com auxílio da História da Matemática:

Segundo Coutinho (2014, p. 11-12), "os problemas de Teoria dos Números se caracterizam pela simplicidade dos enunciados, mas enorme dificuldade das demonstrações, que exigem frequentemente grande engenhosidade e virtuosidade técnica". Nesse sentido, quando vou ensinar o conteúdo de números primos e conteúdo de equações diofantinas, costumo enunciar três resultados para que os alunos possam pensar acerca de sua veracidade antes de eu fornecer a resposta:

1) Há infinitos primos p para os quais $p + 2$ também é primo.
2) Todo número par maior do que 2 pode ser escrito como uma soma de dois números primos.
3) A equação $x^n + y^n = z^n$, com $n \in N, n \geq 3$, não possui solução com $x, y, z \in N$.

Como os três problemas supracitados têm enunciados curtos e de fácil entendimento, os alunos ficam empolgados quanto à possibilidade de resolvê-los de forma rápida e direta. Para o problema 1, os alunos logo produzem pares de primos que "resolvem" o problema: $(3,5), (5,7), (11,13), (17,19), (29,31), (41,43), (59,61)$ etc. Para o problema 2, por tentativa e erro, os alunos obtêm: $4 = 2 + 2, 6 = 3 + 3, 8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7 = 5 + 5, 12 = 5 + 7, 14 = 7 + 7, 16 = 5 + 11$ etc. Já para o problema 3, que é uma generalização do *Teorema de Pitágoras* $x^2 + y^2 = z^2$, os alunos não conseguem produzir nenhum resultado.

Para a surpresa dos alunos, digo a eles que até o presente momento ninguém conseguiu demonstrar os problemas 1) e 2) (apesar de todas as evidências a favor), razão pela qual eles não podem ser considerados teoremas matemáticos. Trata-se apenas de conjecturas (ou problemas em aberto): o problema 1), que remonta à obra *Os Elementos* de Euclides, é conhecido com a *Conjectura dos Primos Gêmeos*, enquanto o problema 2, que foi proposto por Christian Goldbach (1690-1764) em uma carta enviada a Leonhard Euler (1707-1783) em 1742, é denominado de *Conjectura de Goldbach*. Já o problema 3, proposto pelo magistrado e matemático amador francês Pierre de Fermat (1601-1665) em 1637 e demonstrado pelo matemático inglês Andrew Wiles apenas em 1995, ou seja, 358 anos depois, é chamado de o *Último Teorema de Fermat* é considerado um dos problemas mais famosos (e difíceis) da Teoria dos Números (Singh, 2014).

Além desses 3 problemas, outro que costuma atrair a atenção dos alunos é o seguinte problema acerca da reprodução de coelhos proposto e resolvido pelo matemático italiano Leonardo de Pisa (1180-1250), vulgo *Fibonacci*, em sua obra *Liber Abaci* (1202):

> Um casal de coelhos recém-nascidos foi colocado em um lugar cercado. Determinar quantos casais de coelhos ter-se-ão após um ano, supondo que não haja mortes ou fuga de coelhos se, a cada mês, cada casal de coelhos produza outro casal e que cada casal se torne reprodutivo dois meses após o seu nascimento (Hefez, 2022, p. 27-28).

A resposta a esse último problema permite definir a famosa sequência de *Fibonacci* $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \ldots)$, a qual é definida pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\{F_1 = 1 \; F_2 = 1 \; F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \forall\, n \geq 3,$$

em que F_n denota o n-ésimo termo da sequência.

Ao mencionar tais episódios da História da Matemática, acabo mostrando aos licenciandos que a Matemática é um saber em permanente construção, o que acaba cativando o aluno. Tal contextualização histórica evidencia a importância da História da Matemática como recurso pedagógico para o ensino da Matemática, corroborando os estudos de Groenwald e Sauer (2005), de Groenwald, Sauer e Franke (2005) e de Miguel e Miorim (2017).

b) Uso de tecnologias digitais de informação e comunicação (TDICs):

Ao abordar curiosidades sobre números primos, costumo sugerir aos licenciandos que consultem o site https://t5k.org/ (*The Prime Pages*), no qual encontrarão vários problemas em aberto acerca de números primos. Além disso, sugiro o site https://www.mersenne.org (*Great Internet Mersenne Prime Search*), no qual eles podem fazer o *download* de um programa a fim de buscar números primos com muitos dígitos. No momento, o maior número primo conhecido é dado por $2^{82.589.933} - 1$, que possui 24.862.048 dígitos e foi descoberto em 21/12/2018. Isso reforça a relevância do uso da informática como ferramenta metodológica para o ensino da Matemática (Borba; Penteado, 2017).

c) Uso de exemplos do dia a dia e curiosidades matemáticas:

Para motivar os estudantes e garantir que eles assumam uma postura ativa na busca pelo conhecimento, costumo utilizar conceitos de números primos e congruências para explicar a matemática por trás dos números que constituem o CPF e os códigos de barras, além do funcionamento do método criptográfico de chave pública RSA, criado em 1977 por Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, um dos mais usados em transações comerciais online, segurança de e-mails e proteção de dados pessoais tais como senhas, cartões de crédito, passaporte etc.

Além desses exemplos, costumo explorar curiosidades matemáticas visando tornar o processo de aprendizagem da Teoria dos Números mais dinâmico, divertido e significativo. Dentre elas, podemos citar:

1) A origem do nome do *Google*, mecanismo de busca mais usado para pesquisas na Internet.

Eu explico aos licenciandos que tal buscador teve seu nome inspirado no número *googol*. Tal número, inventado em 1938 por Milton Sirotta, aos 9 anos de idade, sobrinho do matemático norte-americano Edward Kasner, equivale a 10^{100}, ou seja, o dígito 1 seguido de 100 zeros.

2) Verificar que todo palíndromo numérico (ou seja, qualquer sequência de dígitos que pode ser lida indiferentemente da esquerda para a direita e vice-versa) com um número par de dígitos é múltiplo de 11.

Após utilizar exemplos particulares tais como 55, 2002 e 666666, os quais são verificados facilmente como múltiplos de 11 com o uso de uma calculadora, acabo escolhendo um palíndromo geral do tipo $abcdeedcba$ para verificar que ele é divisível por 11 por meio do critério de divisibilidade por 11, visto que a soma alternada de seus dígitos é zero, o qual é múltiplo de 11.

3) Verificar que $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, qualquer que seja $n \in N$.

Trata-se da fórmula que fornece a soma dos n primeiros números naturais. No ensino médio, tal fórmula é abordada no estudo de progressões aritméticas. Já em Teoria dos Números, ela é utilizada como um exemplo a ser verificado pelo Princípio da Indução Matemática.

No entanto, para motivar os alunos, eu conto o fato verídico de um caso particular de tal fórmula (para $n = 100$), a qual foi verificada por Gauss durante uma aula de Aritmética, aos 9 anos de idade, sem fazer contas. De fato, ele concluiu que $1+2+3+\cdots+100 = 5.050$ apenas observando que $1+100 = 2+99 = 3+98 = \cdots = 50+51 = 101$, o que totalizava 50 pares de soma 101, ou seja, 5.050. Indubitavelmente, uma prova cabal da genialidade do prodígio Gauss, um dos maiores (se não, o maior) matemáticos de todos os tempos, que acabou cunhando a célebre frase “A Matemática é a rainha das Ciências, e a Teoria dos Números é a rainha da Matemática”.

4) Determinar o dia da semana em que nasceu o professor Lineu Neto (02/05/1973).

Trata-se de uma aplicação da aritmética modular (mais especificamente, da congruência módulo 7). Inicialmente, deixo os licenciandos livres para tentar pensar em alguma solução criativa para tal problema, sem auxílio da Internet. Depois de algum tempo, para surpresa geral, eu explico que tal problema pode ser resolvido pelo Teorema de Zeller, o qual determina qual é o dia da semana correspondente a uma determinada data passada ou futura (no caso, eu nasci em uma quarta-feira).

5) (Retirado de Singh, 2014, p. 113) Explicar qual é a vantagem evolutiva de o ciclo de vida da cigarra da *Magicicada Septendecim* ser um número primo (no caso, 17 anos debaixo da terra).

Como 17 é um número primo, ele é divisível apenas por 1 e 17. Nesse caso, para que os predadores dessa espécie pudessem se alimentar de tais cigarras, eles deveriam ficar 17 anos sem tal alimento, o que acarretou a extinção deles.

Essas e outras curiosidades têm apresentado excelente receptividade por parte dos licenciandos, pois eles as veem como exemplos palpáveis de que há muito a ser explorado na Matemática do cotidiano.

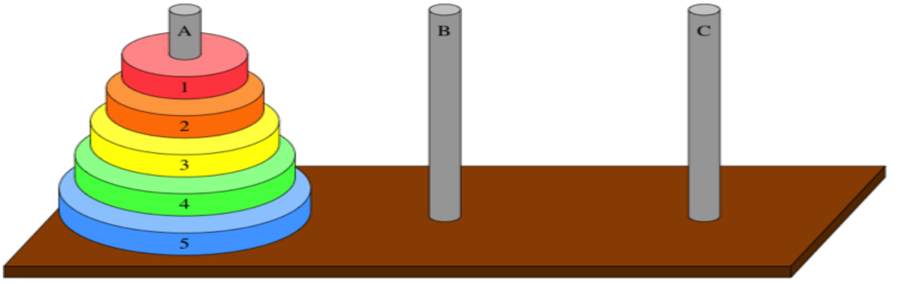
d) Uso de jogos e matemática recreativa:

De acordo com Grando (2004), Groenwald e Sauer (2005), Groenwald, Sauer e Franke (2005), Sá (2007), Lopes e Gimenez (2009), Muniz (2014), Posamentier e Krulik (2014) e Wall (2014), a ludicidade - contemplando a utilização de jogos, brincadeiras, "mágicas" e desafios conectados a problemas do cotidiano - é um apelo irresistível para instigar os estudantes a se engajarem em atividades matemáticas no contexto da sala de aula. Nessa perspectiva, sugiro três exemplos interessantes:

1) Torre de Hanói: (Sá, 2007, p. 72-73; Hefez, 2022, p. 24-26)

Tal jogo consiste em três hastes verticais A, B e C, fincadas em uma base de madeira, e de um certo número de discos de madeira, de diâmetros diferentes, furados no centro. Inicialmente, os discos estão todos enfiados na haste A, sendo que o menor disco está acima dos demais. A figura a seguir ilustra a situação em que há 5 discos na haste A:

Figura 1. Torre de Hanói



Fonte: Khan Academy (https://pt.khanacademy.org/computing/computer-science/algorithms/towers-of-hanoi/a/towers-of-hanoi)

O objetivo do jogo é mover todos os discos de A para C, respeitando-se às seguintes regras: apenas um disco (o que estiver acima dos demais) pode ser movido de cada vez, e um disco maior nunca pode ser colocado sobre um disco menor.

Eu utilizo tal jogo para dar uma aplicação lúdica do Princípio da Indução Matemática, no qual, a partir de casos particulares, buscamos generalizar uma verdade matemática no âmbito do conjunto dos números naturais. No caso em questão, queremos obter uma fórmula que forneça o número mínimo de movimentos para completar o jogo em função do número de discos. Denotando por n o número de discos e por $P(n)$ o número mínimo de movimentos em função de n, os licenciandos obtêm, por tentativa e erro, os seguintes casos particulares: $P(1) = 1, P(2) = 3, P(3) = 7$ e $P(4) = 15$. Isso os leva a inferir que, no caso geral, devemos ter $P(n) = 2^n - 1$. Todavia, por se tratar apenas de uma hipótese, ela deve ser comprovada rigorosamente usando a técnica de demonstração por indução matemática.

2) Adivinhar um número natural de 3 algarismos usando uma calculadora (Sá, 2007, p. 1-2):

Problemas do tipo "Pense em um número" tendem a motivar os licenciandos. Nesse caso específico, cada aluno deve seguir os seguintes passos:

I. Escrever em uma folha de papel um número de 3 algarismos;
II. Repetir o mesmo número ao lado do número original, de modo a formar um número de 6 algarismos;
III. Dividir o número de 6 algarismos do passo II por 7 (repare que a divisão é exata);

IV. Dividir o quociente obtido no passo III por 11 (repare que a divisão é exata);

V. Dividir o quociente obtido no passo IV por 13 (repare que a divisão é exata), obtendo o número original de 3 algarismos que foi pensado pelo estudante.

3) Adivinhar a idade do aluno e a de um familiar usando uma calculadora (Sá, 2007, p. 3-4).

Trata-se de mais um problema do tipo "adivinhação". Nesse caso específico, cada aluno deve seguir os seguintes passos:

I. Escrever a idade do familiar (com dois dígitos);

II. Multiplicar a idade do familiar por 2;

III. Somar 5 ao resultado do passo II;

IV. Multiplicar o resultado do passo III por 50;

V. Se em 2024 o aluno já fez aniversário, então deve-se somar 1774 ao produto obtido no passo IV. Caso contrário, deve-se somar 1773;

VI. Subtrair do resultado do passo V o ano de nascimento do aluno, obtendo um número de 4 algarismos, sendo que os dois primeiros indicam a idade do familiar escolhido e os dois últimos, a idade do aluno.

Os licenciandos tendem a ficar incrédulos diante da "mágica" que aparece nas adivinhações 2) e 3). Para eles, há algum "truque" matemático que lhes escapa aos olhos e garante a veracidade do resultado. Apenas quando "desvendo o segredo" é que eles se convencem que a "mágica", na verdade, é o resultado de manipulações aritméticas envolvendo operações com números naturais.

e) Uso de problemas motivadores:

A metodologia de resolução de problemas para introduzir conceitos da Teoria dos Números possibilita que o aluno se torne o protagonista na construção do seu próprio conhecimento, pois a função do professor é apenas conduzi-lo, de forma colaborativa e dialógica, na busca pela resposta correta. Nesse contexto, o quadro a seguir exemplifica alguns tópicos da disciplina e os respectivos problemas motivadores que costumo utilizar em sala de aula:

Quadro 2. Problemas motivadores em Teoria dos Números.

Tópico a ser ensinado	Problema motivador
Máximo divisor comum	Uma sala retangular medindo $3m$ por $4{,}25m$ deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. Supondo que não haja espaço entre ladrilhos vizinhos, determinar a dimensão máxima (em cm) de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho e o número de ladrilhos necessários para completar tal tarefa.
Mínimo múltiplo comum	No alto de uma torre de televisão, três luzes piscam com frequências diferentes. A 1ª pisca 20 vezes por minuto, a 2ª, 12 vezes por minuto, e a 3ª, 15 vezes por minuto. Em um certo instante, as luzes pescam simultaneamente. Determinar após quantos segundos elas voltarão a piscar juntas novamente.
Equações diofantinas lineares	1. (Adaptado de Silva e Gomes, 2018, p. 160) Verificar se é possível gastar exatamente R$ 167,00 na compra de dois medicamentos A e B cujos preços unitários são, respectivamente, R$ 43,00 e R$ 5,00. 2. (Retirado de Maier, 2005, p. 32-33) Um teatro vende ingressos e cobra R$ 18,00 por adulto e R$ 7,50 por criança. Em uma noite, arrecadou-se R$ 900,00. Determinar quantos adultos e quantas crianças assistiram ao espetáculo, sabendo que eram mais adultos do que crianças. 3. Verificar se a reta $4x + 2y = 1$ pode ser desenhada em um quadro quadriculado de modo a passar exatamente sobre um ou mais vértices desses quadrados.
Pequeno Teorema de Fermat	Determine o resto da divisão de $2^{5432675}$ por 13.
Teorema de Euler	Determine os dois últimos algarismos de 3^{256}.
Teorema Chinês dos Restos	(Problema de astronomia adaptado de Coutinho, 2014, p. 119) Três satélites passarão sobre o céu de Brasília esta noite: o 1° à 1 hora da madrugada, o 2°, às 4 horas da madrugada, e o 3°, às 8 horas da manhã. Sabe-se que cada satélite tem um período diferente para completar uma volta ao redor da Terra: o 1° leva 13 horas, o 2°, 15 horas, e o 3°, 19 horas. Determinar quantas horas decorrerão, a partir da meia-noite, até que os três satélites passem sobre o céu de Brasília simultaneamente e depois de quantas horas eles voltarão a passar juntos após a primeira aparição simultânea.

Fonte: Elaborado pelo Autor (2025).

A quase totalidade desses problemas pode ser encontrada em livros didáticos utilizados na disciplina e servem para fomentar o interesse dos licenciandos ao se depararem com um conteúdo abstrato que será ensinado em seguida. De um modo geral, problemas como os apresentados para introduzir os conceitos de m.d.c., m.m.c., equações diofantinas e o *Teorema Chinês dos Restos*, por estarem vinculados a situações do mundo real, são úteis para os licenciandos no processo de conectar a matemática acadêmica à matemática escolar.

Discussões e considerações

De 2001 a 2013 lecionei *Teoria dos Números 1* de forma tradicional, ou seja, privilegiando características da matemática acadêmica tais como a abstração, o formalismo e a ênfase em conceitos, definições, teoremas e suas respectivas demonstrações. Já nos últimos dez anos tenho procurado ministrar tal disciplina utilizando abordagens metodológicas diferenciadas com o auxílio das novas tendências da área de Educação Matemática – resolução de problemas, uso das TDICs, ludicidade, aspectos da História da Matemática, entre outras –, de forma a enfatizar as conexões entre a matemática acadêmica e a matemática escolar.

Ainda que o índice de reprovação na disciplina não tenha se alterado substancialmente ao longo dos anos, tendo em vista que muitos alunos continuam achando *Teoria dos Números 1* um curso difícil e com alto grau de exigência, a partir de minha experiência docente e dos dados coletados juntos aos estudantes por meio de depoimentos informais durantes as aulas desde 2014, é possível destacar que eles têm tido boas impressões acerca da nova metodologia adotada no processo e aprendizagem da referida matéria. Segundo eles, a "nova" *Teoria dos Números 1*, diferentemente de outras disciplinas da matemática acadêmica, oferece subsídios para a atuação do futuro professor de Matemática no contexto da sala de aula da educação básica.

Nesse sentido, é preciso que o currículo do curso de licenciatura em Matemática na UnB seja reformulado de modo a conceber a importância da matemática escolar, cujo ensino possui suas próprias características e complexidades, as quais não podem passar despercebidas na formação inicial dos licenciandos em Matemática. Urge, pois, que seja feito um esforço para que as disciplinas específicas do bacharelado "dialoguem" com as disciplinas específicas da licenciatura, de modo a melhor preparar o licenciando para as reais demandas do contexto escolar. A proposta adotada em *Teoria dos Números 1* pode servir de inspiração nessa difícil empreitada.

Referências

ALENCAR FILHO, Edgard. **Funções Aritméticas e números notáveis**. São Paulo: Nobel, 1988.

ALMEIDA, Marieli Vanessa Rediske. **Conhecimento especializado sobre divisibilidade do formador de professores que ensina Teoria dos Números para estudantes de licenciatura em Matemática**. 2020. 204 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2020.

AMORIM, Marta Élid; PIETROPAOLO, Ruy César; GALVÃO, Maria Elisa Esteves Lopes; SILVA, Angélica da Fontoura Garcia. Uma sequência de atividades para o ensino de equações diofantinas: possibilidades para ampliar a base de conhecimentos de futuros professores de matemática. **Acta Scientiae**, v. 22, n. 5, p. 207-226, 2020.

BARBOSA, Gabriela dos Santos. **O Teorema Fundamental da Aritmética**: jogos e problemas com alunos do sexto ano do ensino fundamental. 2008. 304 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

BARBOSA, Gabriela dos Santos. Formação inicial de professores de Matemática: um estudo do conceito sobre o Teorema Fundamental da Aritmética. **Revista de Educação Matemática**, v. 18, p. e021030, 2021. DOI: 10.37001/remat25269062v18.

BARICHELLO, Leonardo; FIRER, Marcelo. Quanta matemática escolar é conhecida pelos egressos dos cursos brasileiros de Licenciatura? **Zetetiké**, v. 29, p. 1-24, 2021.

BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy. **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília: MEC, 2018.

BRASIL. Ministério da Educação. Resolução CNE/CP nº 4, de 29 de maio de 2024. Dispões sobre as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação Inicial em Nível Superior de Profissionais do Magistério da Educação Escolar Básica (cursos de licenciatura, cursos de formação pedagógica para graduados não licenciados e cursos de segunda licenciatura). **Diário Oficial da União**, Brasília, DF, 3 jun. 2024, p. 26-29.

COUTINHO, Severino Collier. **Números Inteiros e Criptografia RSA**. Rio de Janeiro: SBM, 2014.

D'ALMEIDA, Joice. **As concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética de professores de Matemática da rede pública paulista, sob o olhar da teoria APOS**. 2021. 255 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2021.

FIORENTINI, Dario. A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. **Revista de Educação**, n. 18, p. 107-115, 2005.

FIORENTINI, Dario; OLIVEIRA, Ana Teresa de Carvalho Correa. O lugar das matemáticas na licenciatura em matemática: que matemáticas e que práticas formativas? **Bolema**, v. 27, n. 47, p. 917-938, 2013.

FONSECA, Rubens Vilhena. **Números Primos e o Teorema Fundamental da Aritmética**: uma investigação entre estudantes de licenciatura em Matemática. 2015. 154 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2015.

GATTI, Bernardete Angelina. Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em Pedagogia, Língua Portuguesa, Matemática e Ciências Biológicas. In: GATTI, Bernardete Angelina; NUNES, Marina Muniz (Org.). **Coleção Textos Fundação Carlos Chagas**. São Paulo: FCC/DPE, 2009.

GRANDO, Regina Célia. **O jogo e a matemática no contexto da sala de aula**. São Paulo: Paulus, 2004.

GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira; SAUER, Lisandra de Oliveira. Desenvolvendo o pensamento aritmético utilizando os conceitos da Teoria dos Números. **Acta Scientiae**, v. 7, n. 1, p. 93-101, 2005.

GROENWALD, Cláudia Lisete Oliveira; SAUER, Lisandra de Oliveira; FRANKE, Rosvita Fuelber. A História da Matemática como recurso didático para o ensino da Teoria dos Números e a aprendizagem da Matemática no ensino básico. **Paradigma**, v. 26, n. 2, p. 35-55, 2005.

HARTMANN, Andrei Luís Berres; SILVA, Laís Cristina Pereira; BINOTTO, Rosane Rossato. Equações diofantinas lineares por meio da resolução de problemas: possibilidades para cursos de licenciatura em matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 25, n. 3, p. 322-343, 2023.

HEFEZ, Abramo. **Aritmética**. Rio de Janeiro: SBM, 2022. (Coleção Profmat).

LINS, Romulo Campos; GIMENEZ, Joaquin. **Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI**. Campinas, SP: Papirus, 1997.

LOPES, Antônio José; GIMENEZ, Joaquin. **Metodologia para o ensino da Aritmética**: competência numérica no cotidiano. São Paulo: FTD, 2009.

MAIER, Rudolf Richard. **Teoria dos Números – notas de aula**. Brasília: UnB, 2005.

MANDLER, Marnei Luís. A Teoria dos Números na formação inicial do professor de Matemática: conexões entre o conhecimento específico e o conhecimento matemático para o ensino na escola básica. In: ENCONTRO BRASILEIRO DE ESTUDANTES DE PÓS-GRADUAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 20., 2016. **Anais...** Curitiba: XX EBRAPEM, 2016, p. 1-12.

MELO, Carlos Ian Bezerra; OLIVEIRA, João Luzeilton. O algoritmo da divisão na formação inicial do professor de matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 25, n. 3, p. 344-372, 2023.

MIGUEL, Antônio; MIORIM, Maria Ângela. **História na Educação Matemática**: propostas e desafios. Belo Horizonte: Autêntica, 2017.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti. 3 + 1 e suas (In)Variantes: reflexões sobre as possibilidades de uma nova estrutura curricular na licenciatura em matemática. **Bolema**, v. 26, n. 44, p. 1137-1150, 2012.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. Matemática escolar, matemática científica, saber docente e formação de professores. **Zetetiké**, v. 11, n. 1, p. 57-80, 2003.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; DAVID, Maria Manuela Martins Soares. O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. **Revista Brasileira de Educação**, n. 28, p. 50-62, 2005.

MOREIRA, Plínio Cavalcanti; FERREIRA, Ana Cristina. O lugar da matemática na licenciatura em matemática. **Bolema**, v. 27, n. 47, p. 981-1005, 2013.

MUNIZ, Cristiano Alberto. **Brincar e jogar**: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2014.

POMMER, Wagner Marcelo; POMMER, Clarice Peres Carvalho Retroz. Equações diofantinas lineares no ensino médio: um tema mobilizador de estratégias aritméticas & algébricas. **Cadernos da Pedagogia**, v. 6, n. 12, 2013.

POSAMENTIER, Alfred S.; KRULIK, Stephen. **A arte de motivar os estudantes do ensino médio para a matemática**. Porto Alegre: AMGH, 2014.

RESENDE, Marilene Ribeiro. **Ressignificando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura**. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2007.

SÁ, Ilydio Pereira. **A magia da Matemática**: atividades investigativas, curiosidades e História da Matemática. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2007.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: IMPA, 2011. (Coleção Matemática Universitária).

SILVA, Diego Adriano; BRITO, Arnaldo Silva; SOUSA, Valdirene Gomes. Equações diofantinas lineares: um estudo com estudantes do 1º ano do ensino médio. **Remat**, v. 6, n. 2, p. e2009-e2009, 2020.

SILVA, Jhone Caldeira; GOMES, Olímpio Ribeiro. **Estruturas Algébricas para Licenciatura**: elementos de aritmética superior – volume 2. São Paulo: Blücher, 2018.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**: a história do enigma que confundiu as maiores mentes do mundo durante 358 anos. Rio de Janeiro: Record, 2014.

UNIVERSIDADE DE BRASÍLIA. Sistema Integrado de Gestão de Atividades Acadêmicas. **Ementa e Programa da disciplina MAT0038 – Teoria dos Números 1**. Disponível em: https://sigaa.unb.br/sigaa/geral/componente_curricular/busca_geral.jsf. Acesso em: 07 out. 2024.

VOLKMAN, Elizabete; PEREIRA, Ana Lúcia; LUCCAS, Simone. Aprendendo a ensinar na formação inicial de professores de matemática: uma análise das concepções discentes. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 21, n. 2, p. 353-378, 2019.

WALL, Edward S. **Teoria dos números para professores do ensino fundamental**. Porto Alegre: AMGH, 2014.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. Divisibility and multiplicative structure of natural numbers: preservice teachers' understanding. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 27, n. 5, p. 540-563, 1996a.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. Prime decomposition: understanding uniqueness. **Journal of Mathematical Behavior**, v. 15, n. 2, p. 207-218, 1996b.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. Toward number theory as a conceptual field. In: ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. (Eds.). **Learning and Teaching**

Number Theory: research in cognition and instruction. Westport, CT: Ablex Publishing, v. 2, 2002, p. 1-14.

ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. Number theory in mathematics education: perspectives and prospects. In: ZAZKIS, Rina; CAMPBELL, Stephen R. (Orgs.). **Number theory in mathematics education**: perspectives and prospects Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates Publishers, 2006, p. 1-18.

ZAZKIS, Rina; LILJEDAHL, Peter. Understanding primes: the role of representation. **Journal for Research in Mathematics Education**, v. 35, n. 3, p. 164-186, 2004.

Posfácio

Prezada Professora, Caro Professor:

Essa obra que está nas suas mãos tem sido produzida, criada e construída pensando em vocês, com a intenção de acompanhá-los nas suas práticas de aula. A inspiração e motivação que impulsionou sua composição foram as necessidades detectadas na formação em Matemática das crianças e jovens que povoam nossas salas de aula de Matemática ao longo do país todo.

Além disso, os autores e as autoras dos capítulos que constituem o livro, sendo estes pesquisadores vinculados ao Grupo de Investigação em Ensino da Matemática (GIEM), associado ao Departamento de Matemática da Universidade de Brasília (UnB), e outros convidados estão cumprindo o compromisso e a responsabilidade de retornar à sociedade os achados derivados das pesquisas que são expostas no texto.

O livro é o primeiro dos cinco volumes que conformam uma coleção destinada à ações e intervenções na e para a **formação de professores** que ensinam Matemática, a qual tem como pano de fundo as áreas para o ensino de Matemática contempladas na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), a saber: Números, Álgebra, Geometria, Medidas e Grandezas e Probabilidade e Estatística (BRASIL, 2018).

Levando em conta isso, as organizadoras da Coleção decidiram expor, nesse Volume I: Números, um conjunto de proposições que vêm a contribuir com a formação dos professores que ensinam Matemática; sendo assim, pela robustez de seu alicerce teórico e pela rigorosidade das pesquisas que lhe deram origem, tais proposições vêm para ampliar o repertório de dispositivos didáticos disponíveis para o ensino de Matemática nos sete capítulos que formam a substância deste livro.

Contexto de emergência

Este livro surge no seio do GIEM, uma comunidade acadêmica na qual a investigação é assumida como eixo, núcleo e propósito da formação, e cujos membros conjugam de forma articulada e complexa suas funções de pesquisa, docência e extensão, gerando assim uma sinergia epistêmica de formação em (e na) ação; dessa forma, no GIEM é gerado um Ciclo Recursivo de Desenvolvimento Formativo, como ilustrado na Figura 1.

Figura 1. Ciclo de Desenvolvimento Formativo do GIEM

Fonte: Elaboração Própria.

Percebe-se que, na perspectiva do GIEM, a sala de aula é assumida como cenário natural da emergência dos assuntos de interesse indagatório e, ao mesmo tempo, como espaço de articulação dialética da teoria com a prática e vice-versa; dessa forma, os pesquisadores vinculados ao GIEM, desenvolvem suas experiências de pesquisa vivenciando um *Bucle* Recursivo de Ação – Reflexão, como indicado na Figura 2.

Figura 2. *Bucle* Recursivo da Pesquisa no GIEM

Fonte: Elaboração Própria.

As motivações

A força que impulsiona o movimento do GIEM é seu compromisso pela formação em Matemática das crianças brasileiras que depende, e muito, da atuação dos professores que ensinam Matemática nas salas de aula, desde Educação Básica a Educação Superior.

E foi esse um dos motivos da criação da Coleção **Formação de Professores**, intitulada **Ações e Intervenções na e para a formação de professores que ensinam Matemática**, da qual forma parte este livro, dedicado ao tema Números que, junto com Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas e Probabilidade e Estatística, constituem as Unidades Temáticas contempladas para a área de Matemática (BRASIL, 2018).

A decisão de iniciar essa Coleção pela unidade temática Números é, não só por ser a primeira das contempladas na BNCC, senão, e principalmente, pela importância que a construção do conceito de número tem para a formação em Matemática.

As contribuições

Neste livro, os professores que ensinam Matemática, especialmente aqueles que cumprem essa função na Educação Básica e no Ensino Superior como formadores dos futuros professores encontrarão sugestões para seu agir nas salas de aula, alicerçadas não só teoricamente, senão fundamentalmente nas evidências empíricas coletadas pelos autores dos capítulos, por médio de pesquisa realizadas em diferentes contextos e momentos, bem como sustentadas sob diversas tendências teóricas próprias da Educação Matemática enquanto campo disciplinar.

Nessa perspectiva, assume-se que NÚMEROS como um dos núcleos de Matemática que deve ser ensinado e, portanto, aprendido na Educação Básica; isso gera, como consequência, a necessidade de inserir nos cursos de formação para o ensino da Matemática, componentes curriculares que proporcionem conhecimentos teóricos e práticos, junto com aspectos históricos e aplicações dos números a esses professores, tanto aqueles que estão se formando nas licenciaturas quanto aqueles que são já servidores nas redes de ensino municipais, estaduais e federais.

Mas, não se trata de oferecer “receitas sobre como fazer”; ao contrário, a intenção é modos de agir, estratégias de ação, percursos de intervenção, teórica e empiricamente sustentadas, que propiciem oportunidades para que os professores que ensinam Matemática na Educação Básica consigam criar situações didáticas que acrescente a probabilidade de que as crianças e adolescentes que povoam as salas de aula de Matemática, consigam aprender tudo o que eles precisam saber sobre os números.

Mas, para isso é imprescindível que os professores que ensinam Matemática possuam conhecimentos adequados sobre como é que as crianças constroem seu conceito de número e como é que evolui para uma compreensão mais geral dos números e as operações que são susceptíveis de realizar com eles, ou seja, como é que é dada a transição do conceito de número para o sentido numérico, o que constitui a base sobre a qual se sustenta a Alfabetização Matemática. Dessa forma, os autores do primeiro dos capítulos examinam o papel da construção do número nessa alfabetização.

Neste capítulo é mostrado de forma muito clara, como uma teoria explicativa, interpretativa e compreensiva sobre o desenvolvimento cognitivo das crianças, pode servir de alicerce para orientar a prática a ser desenvolvida pelos docentes que ensinam Matemática às crianças.

A teoria assumida pelos autores é a desenvolvida por Jean Piaget e seus colaboradores; dessa forma, a Epistemologia Genética Piagetiana constitui o embasamento teórico que sustenta os estudos empíricos sobre o conceito de Número, realizados pelos autores e expostos neste capítulo. É assim como a Psicologia Psicogenética ilumina, sustenta a prática dos docentes que têm a responsabilidade de gerar situações que garantem a construção do conceito de número e o desenvolvimento de seu sentido numérico. Sobre essa base é afirmado que as noções que sejam bem constituídas neste nível do processo de apropriação da Matemática terão uma implicação essencial no desenvolvimento do Pensamento Matemático futuro.

Portanto, questões tais como: correspondência, que é a base da contagem; reversibilidade, imprescindível na compreensão das estruturas algébricas; e Abstração Reflexiva, base da passagem das representações ideográficas para as simbólicas, devem ser, ineludivelmente, consideradas nas primeiras etapas do ensino da Matemática.

Já no segundo dos capítulos, é proposto o Ensino Exploratório (EE), concebido como uma estratégia didática que pretende propiciar situações para mediar o desenvolvimento do sentido numérico das crianças, usando tarefas matemáticas e procedimentos de cálculo, nos quais são procuradas soluções para problemas que envolvem operações com números naturais; dessa forma, os autores conseguem ilustrar a presença dos números no cotidiano das crianças; bem como a diversidade de usos e funções do número nas mais diversas situações que fazem parte da vida diária das crianças.

Neste capítulo os autores dialogam com pesquisadores cujos estudos procuram descrever, explicar, interpretar e compreender como é que as crianças desenvolvem o sentido de número; tentando articular o conhecimento gerado pela pesquisa com os processos de formação dos professores que vão a ensinar Matemática nos anos iniciais do ensino primário.

Para a construção de sua proposta didática, os autores partem de uma concepção muito ampla, mas teoricamente fundamentada, do significado que é atribuído ao conceito de "Sentido de Número" como sendo uma rede conceitual e procedimental que vai-se ampliando como resultado das experiências que se acumulam ao longo do tempo, com os números e as operações que são realizadas com eles; dessa forma, o sentido de número se articula com outras noções, tais como Flexibilidade e Adaptabilidade Cognitiva, que são essenciais no Cálculo Mental.

No desenvolvimento dessas duas noções é necessário que os estudantes tenham oportunidades para exercitar a memória e realizar registros escritos; isso significa, propor situações quantitativas a partir dos processos mentais que são ativados quando são abordadas tarefas que envolvem números, dado que é nesse tipo de tarefas onde os discentes mobilizam suas estruturas cognitivas; e esse acionar cognitivo, realizado durante a execução da tarefa, contribui para o desenvolvimento do raciocínio matemático; ou seja, a capacidade para ativar processos cognitivos de ordem superior tais como: conjecturar, generalizar e justificar, identificar padrões, classificar e provar, processos esses que formam parte substantiva do fazer matemático.

Deste modo, resulta imprescindível pensar no desenvolvimento, na sala de aula, de situações que tenham como protagonistas aos próprios discentes, permitindo que eles participem em tarefas que desafiem seu pensamento; uma forma de fazer isso é gerando discussões coletivas após da resolução de tarefas, num contexto de Estudo Exploratório.

Mas, o que é Estudo Exploratório? Os autores do Capítulo 2 o definem como uma abordagem para aprender e ensinar Matemática com significado e compreensão, no qual os alunos devem ter a oportunidade para descobrir e construir conhecimento; para isso é importante que eles realizem investigações, projetos, e resolvam problemas; além de refletir e discutir com seus colegas de turma; dessa forma poderão sistematizar e formalizar os conceitos matemáticos envolvidos nas tarefas realizadas; tudo isso gera um movimento contínuo de ação – reflexão – ação , de envolvimento na execução de tarefas que exigem a movimentação de conhecimentos matemáticos (Cfr. Figura 2, supra).

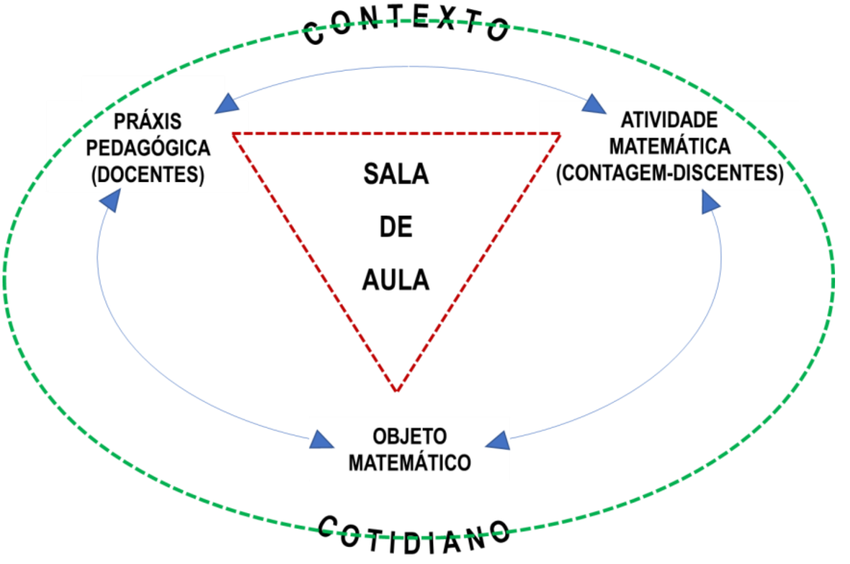
Dessa forma, o Estudo Exploratório faz possível a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática; mas, os autores reconhecem que o desenvolvimento desse tipo de estudo, é desafiador e que a prática dessa abordagem deve fazer parte dos processos de formação dos professores, propondo estratégias tais como o Estudo de Aula (*Lesson Study*) e, levando em conta, que é preciso no planejamento da aula, antecipar o que poderia acontecer na sua realização efetiva na sala, e como os estudantes poderiam agir; nesse sentido, a trajetória de uma aula, seguindo a proposta de Estudo Exploratório, teria a seguinte sequência: proposição da tarefa; trabalho autônomo dos estudantes; discussão coletiva; e, síntese final.

Na continuidade dos capítulos, os autores do Capítulo 3 trazem as contribuições das Neurociências para o ensino e a aprendizagem da Matemática; dessa forma, propõem aplicações dos conhecimentos oriundos da compreensão do funcionamento do cérebro humano para sustentar as práticas docentes nas salas de aula de Matemática.

Os autores dão destaque a vários dos conceitos explicativos da aprendizagem matemática, desenvolvidos a partir de pesquisas no campo das Neurociências; um deles refere-se à relação entre Cognição e Emoção e suas implicações para as práticas de aula: o estudante aprende o que o motiva; para gerar motivação o docente deve utilizar recursos multissensoriais e, dessa forma, organizar estratégias didáticas que permitam ativar as múltiplas redes neuronais do sistema nervoso.

Por outro lado, e tendo em conta mesmo que não de forma explícita, as atividades matemáticas universais já identificadas por Alan Bishop, os autores do Capítulo 4 consideram a ação de contar como um dos organizadores de situações que contribuem para que os discentes construam seus conhecimentos matemáticos. Nesse contexto, são assumidas as ações a serem executadas pelos alunos sobre os objetos matemáticos que estejam sendo estudados; dessa forma, a práxis pedagógica, desenvolvida pelos docentes, constitui o cenário no qual os alunos se apropriam das noções matemáticas. Neste sentido, a contagem é uma oportunidade para a construção ativa do conhecimento matemático como ilustrado na Figura 3.

Figura 3. A Contagem e a Construção do Conhecimento Matemático



Fonte: Elaboração Própria.

As ideias sobre o papel da contagem na construção do conceito de número, têm continuidade no trabalho dos autores do Capítulo 5, quando afirmam que muitas das noções matemáticas que são estudadas na escola, surgiram como consequência das exigências geradas pelas práticas sociais concretas, tais como aquelas que envolvem quantificações e enumerações; e para ordenar, medir e indicar relações espaciais nos valemos de números. Mas, além das considerações históricas, os autores desse capítulo oferecem explicações psicológicas, de base piagetiana, sobre a aquisição-apropriação-construção do conceito de número e do desenvolvimento do sentido numérico.

Outras questões destacadas pelos autores deste capítulo, são: (a) as correlações susceptíveis de ser estabelecidas entre a aprendizagem da língua materna e a aprendizagem da Matemática: (b) a sequência dos processos que contribuem para aprender questões associadas aos números, tais como: operações, comparações, produções escritas e interpretações; (c) obstáculos epistemológicos enfrentados pelos discentes para se apropriar dos conceitos envolvidos na subtração. Tudo isso permite propor ações que contribuam com a superação das incompreensões da aprendizagem da Matemática nas idades iniciais do desenvolvimento cognitivo das crianças.

E avançando para os anos finais do Ensino Fundamental, os autores do capítulo 6, a partir da análise da narrativa de uma aula, identificaram dois dos seus momentos de estudo, especificamente o trabalho sobre a técnica de resolução de tarefas que abordam o tema Expressões Numéricas; e o tecnológico-teórico, ou seja, o discurso de justificação das técnicas utilizadas. Os autores tomaram como aporte teórico a Didática da Matemática, amparados na Teoria Antropológica do Didático. Atentaram-se para o fato de que em algumas práticas, ainda se observa uma dissociação entre o trabalho da técnica e o discurso tecnológico-teórico, o que pode resultar na falta de clareza sobre o objeto matemático que o professor se propõe a ensinar. Necessário se faz refletirmos sobre as ações e intervenções que contribuam para superar essa desassociação entre os dois momentos analisados. Os autores indicam que as Expressões Numéricas deveriam funcionar como ferramentas para representar matematicamente situações problemas.

Levando em conta todo o exposto poderia ser afirmado que este livro tem como núcleo o exame de questões históricas, epistemológicas, psicológicas, didáticas e teóricas relacionadas com o "Conceito de Número" e como elas podem ser usadas na formação, tanto inicial quanto continuada, dos professores de Matemática.

O transbordo desses conhecimentos para a prática tem como alicerce, embasamentos legais, como aqueles que são oriundos do que é estabelecido nas diretrizes curriculares nacionais; mas, além disso, e principalmente, nas anomalias identificadas em diferentes dimensões dos processos de ensino e da aprendizagem da Matemática no país.

Entre essas anomalias algumas foram destacadas pelo autor do Capítulo 7 e são indicadas a seguir:

- A desvinculação entre a Matemática que é estudada nos cursos de licenciatura e a Matemática Escolar; ou seja, aquela que os professores de Matemática devem ensinar nas escolas.
- O modo como são ensinadas as disciplinas de Matemática para os licenciandos, futuros professores de Matemática no Ensino Básico, sem diferença nenhuma com a forma como tais disciplinas são ensinadas aos bacharéis em Matemática.
- As falências na sua formação pré-universitária dos ingressantes na Educação Superior.
- Os preconceitos que se têm sobre a Matemática Escolar, assumindo-a como uma questão muito simples, sem reconhecer sua complexidade.
- O suposto segundo o qual, para ensinar Matemática é suficiente "saber Matemática" sem o devido esclarecimento do que significa esse

"saber" e sem reconhecer a existência de um saber da Matemática ensiná-la.

- Os conhecimentos que, sobre Educação Matemática, têm os formadores dos professores que ensinam Matemática.

O que essas anomalias revelam é, entre outros aspectos, a existência de preconceitos sobre a Matemática Escolar, indicando a falta de reconhecimento de sua complexidade. Além disso, é notável a presença de uma espécie de "arrogância disciplinar" que é um desrespeito ao caráter complexo do ensino.

Por outro lado, o despreparo dos "formadores dos formadores" é um indicador do conhecimento insuficiente sobre a complexidade implicada na formação dos professores de Matemática, cujas deficiências para o ensino, não conseguem ser superadas pelos cursos de formação e, por isso, têm a tendência a reproduzir como práticas de ensino, aquelas que foram vivenciadas durante sua escolaridade.

Assim sendo, resulta imprescindível desenvolver ações com a intenção de superar as anomalias acima sinalizadas. E é isso mesmo que é pretendido neste livro que, especificamente, é dedicado à unidade temática Números. Mas, por que "Números"?

O estudo dos números nos cursos de formação dos futuros professores que terão a responsabilidade de ensinar Matemática, tem os seguintes fins, entre outros:

- Contextualizar e formalizar assuntos que já tinham sido tratados de forma operacional e intuitiva.
- Iniciar a familiarização como os procedimentos de demonstração próprios da Matemática.
- Contribuir para a transição da Aritmética para Álgebra.
- Contribuir para que o futuro professor consiga se inserir na cultura do fazer matemático.
- Raciocinar matematicamente: identificando padrões; elaborando conjecturas; verificá-las; prová-las e generalizá-las.

Mas, para alcançar esses fins é preciso que o ensino das questões relacionadas com os números, seja realizado de forma pertinente com aquilo que é esperado que os professores façam nas aulas de Matemática na Educação Básica.

Para isso, nos cursos de formação, seja na graduação ou na pós-graduação, devem ser examinados os achados das pesquisas nas quais estejam envolvidas questões relacionadas com números e, precisamente, é isso que foi feito neste livro, no qual é possível encontrar:

1. Formas variadas de abordar conteúdos numéricos.
2. Proposições pedagógicas cuja implementação poderia contribuir com o desenvolvimento do sentido numérico das crianças.
3. Conhecimentos de Matemática que os professores precisam para ensinar temas numéricos específicos.
4. Conhecimentos matemáticos que os alunos mobilizam quando lidam com problemas que envolvem números e suas operações.
5. Confirmação de que o ensino da Matemática nos níveis educacionais anteriores ao Ensino Superior, geralmente, é baseado em intuições associadas a situações concretas o que é muito diferente da forma como é estudada a Matemática na universidade.

Deste modo, os formadores de professores devem saber lidar com o desconforto que gera nos estudantes a passagem do concreto para o abstrato, que exige a substituição da intuição pela demonstração rigorosa.

Tudo isso gera grandes desafios para os formadores de professores; para tentar superá-los têm sido realizadas as pesquisas que servem de suporte para algumas das estratégias didáticas propostas neste livro e que são susceptíveis de serem desenvolvidas na formação inicial e que foram destacadas pelo formador de professores, autor do capítulo 7 deste livro, ao abordar o componente Teoria dos Números no curso de Licenciatura em Matemática. Entre as estratégias indicam-se:

a. **Uso da História da Matemática**

Abordar problemas de relevância histórica, tentando pôr em evidência que a procura de solução desses problemas permite destacar as diferenças entre verificar e demonstrar, bem como ilustrar algumas estratégias chave no desenvolvimento do pensamento matemático.

b. **Uso das TIC´s**

Aplicar software de acesso aberto para examinar situações nas quais estão presentes questões relacionadas com números.

c. A Matemática do Cotidiano

Aproveitamento de situações do contexto cotidiano dos alunos que envolvem maneiras diversas de uso dos números, explicitando as funções que eles cumprem em nosso dia a dia.

d. Matemática Recreativa

Fazer uso didático das curiosidades numéricas.

Tudo isso poderia ser articulado com o uso da Resolução de Problemas, que permite: introduzir conceitos numéricos chave; despertar o interesse dos discentes; e, motivar neles o desejo de se apropriar de tais conceitos.

Assim sendo, e levando em consideração tudo o exposto até aqui, pode ser assegurado que neste livro, tanto pesquisadores na Educação Matemática, quanto professores que ensinam temas relacionados com números na Educação Básica, vão encontrar referências teóricas e conceituais, derivadas da História da Matemática, da Psicologia Genética, das Neurociências e da Epistemologia, que vão lhes servir para fundamentar suas práticas de ensino.

E, além desse conteúdo teórico, os professores que ensinam Matemática na Educação Básica e no curso de Licenciatura, neste livro têm à disposição várias proposições didáticas que poderiam ser desenvolvidas nas suas práticas de ensino sobre números.

Por fim, espera-se que o livro se constitua num referencial importante na superação das falências identificadas na formação das crianças e, claro, dos jovens e adultos que precisam ter uma formação em Matemática de qualidade.

Fredy Enrique González

Sobre as organizadoras

Márcia Rodrigues Leal

Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/GO). Licenciada em Matemática e em Pedagogia. Possui experiência na Educação Básica e no Ensino Superior. Desenvolve estudos relacionados ao campo da Educação Matemática, Criatividade em Matemática, Criatividade em Geometria e Formação de professores. É membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal (SBEM/DF), do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) e do Grupo de Pesquisa e Investigação em Educação Matemática (PI), ambos associados ao Departamento de Matemática da UnB. Brasília, Distrito Federal, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4307-802X.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4078490199054257.
E-mail: marcialeal629@gmail.com.

Ana Maria Porto Nascimento

Doutora e Mestre em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de Brasília (FE-UnB). Atua como professora formadora no Curso de Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Oeste da Bahia (PROFMAT/UFOB). Pesquisadora em Educação Matemática com foco em Alfabetização Matemática. É membro do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM), associado ao Departamento de Matemática da UnB. Professora Adjunta no Centro das Ciências Exatas das Tecnologias (CCET) da UFOB, Barreiras, Bahia, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-7640-9617.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/8047328223610224.
E-mail: ana.nascimento@ufob.edu.br.

Raquel Carneiro Dörr

Doutora em Educação e Mestre em Matemática, ambos pela Universidade de Brasília (UnB). Possui dois estágios de Pós-doutoramento: um na Freie Universität Berlin (FUB); o segundo junto ao Centro de Matemática, Computação e Cognição da Universidade Federal do ABC (UFABC). Possui Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Universidade Federal de Viçosa. É professora no Departamento de Matemática da UnB, lecionando na graduação e na pós-graduação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT). Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando nos temas: aprendizagem do Cálculo, formação de professores que ensinam Matemática e metodologias de ensino de Matemática. Brasília, Distrito Federal, Brasil.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-6453-7032
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4277188083855842
E-mail: raqueldorr@unb.br

Sobre os autores

Ana Maria Porto Nascimento

Doutora e Mestre em Educação pela Faculdade de Educação da Universidade de Brasília (FE-UnB). Atua como professora formadora no Curso de Licenciatura em Matemática e no Mestrado Profissional em Matemática da Universidade Federal do Oeste da Bahia (PROFMAT/UFOB). Pesquisadora em Educação Matemática com foco em Alfabetização Matemática. É membro do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM/UnB). Professora Associada no Centro das Ciências Exatas das Tecnologias (CCET) da UFOB, Barreiras, Bahia, Brasil.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2048-5554
Lattes: http://lattes.cnpq.br/8047328223610224.
E-mail: ana.nascimento@ufob.edu.br.

Cília Cardoso Rodrigues da Silva

Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Lisboa (ULisboa, Lisboa, PT). Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Graduada em Pedagogia. Possui experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática e Alfabetização. Pesquisa os seguintes temas: educação matemática, alfabetização, processo de aprendizagem-ensino, grandezas e medidas, numerização, flexibilidade de cálculo mental. É professora da Equipe Especializada de Apoio à Aprendizagem na Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), atuando em três dimensões: mapeamento institucional; assessoria ao trabalho coletivo e acompanhamento do processo de ensino e de aprendizagem. Brasília, Distrito Federal, Brasil.

ORCID iD: https://orcid/oooo-ooo1-5658-535x.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/55501411833140.
E-mail: ciliacr@gmail.com.

Cristiano Alberto Muniz

Doutor em Sciences de lEducation pela Université Paris Nord. Pós-Doutor em Educação pela Universidade de Brasília (UnB), com o projeto "As crianças que calculavam: o ser matemático como sujeito produtor de sentidos subjetivos na aprendizagem". Mestre em Educação, Bacharel e Licenciado em Matemática, ambos pela (UnB). Professor Associado Aposentado da UnB. Tem experiência na área de Matemática, com ênfase em Educação Matemática, atuando nos temas: Aprendizagem matemática e formação do professor de matemática. É membro do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) do Departamento de Matemática da UnB. Integrante do Projeto de Pesquisa e Desenvolvimento do Departamento de Matemática da UnB "Plataforma Interativa de Jogos Matemáticos" (MGames). Brasília, Distrito Federal, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-0345-2056
Lattes: http://lattes.cnpq.br/9878321982029909
E-mail: cristianoamuniz@gmail.com

Edmo Fernandes Carvalho

Doutor e Mestre em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia (UFBA). Licenciado em Matemática. Docente no Bacharelado Interdisciplinar em Ciência e Tecnologia no Instituto de Humanidades, Artes e Ciências Professor Milton Santos - UFBA e professor permanente no Programa de Pós-Graduação em Estudos Interdisciplinares sobre a Universidade - UFBA, e colaborador no Programa de Pós-Graduação em Ensino da Universidade Federal do Oeste da Bahia. É líder do Núcleo Interdisciplinar de Pesquisa, Ensino e Didática das Ciências, Matemática e Tecnologias da UFBA. Tem experiência na área de Educação Matemática, com pesquisas no campo da Epistemologia Experimental, Antropologia da didática e suas interrelações com a Neurociência Cognitiva e Didática Decolonial. Barreiras, Bahia, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6959-2652.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/5950293977279666.
E-mail: edmofc@ufba.br.

Fabio Nunes da Silva

Doutor e Mestre em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB). Graduado em Matemática pela Universidade Federal do Tocantins (UFT), Campus de Arraias-TO. Tem interesse no estudo de geometria diferencial e em ensino de matemática voltado para matemática na Educação Básica e suas tecnologias. É membro do Núcleo de Matemática, Estatística e Probabilidade e Ensino de Matemática (NUMEPEM) da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB), professor Adjunto no Centro das Ciências Exatas das Tecnologias (CCET) e também atua no Mestrado Profissional em Matemática (PROFMAT) da UFOB. Barreiras, Bahia, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3761-3348.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/3787619061048390.
E-mail: fabionuness@ufob.edu.br.

Josinalva Estácio Menezes

Doutora em Educação pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), com Pós-doutorado. Mestre em Educação pela Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) e Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (UFPB). Licenciada e Bacharel em Matemática. Licenciada em Pedagogia. Especialista em Metodologia do Ensino Superior, em Tecnologia Educacional e em Neurociência. Atua em Matemática e Educação Matemática**.** Atualmente é professora de Matemática e do Ensino de Matemática da UFPE. Caruaru, Pernambuco, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-0468-5858.
Lattes: https://lattes.cnpq.br/8476193167277646.
E-mail: josinalva.menezes@ufpe.br.

Lineu da Costa Aráujo Neto

Doutor em Educação, Mestre e Bacharel em Matemática pela Universidade de Brasília (UnB). Atua na graduação e no Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional (Profmat/UnB. Tem experiência nas áreas de Matemática, com ênfase em Teoria dos Números, e Educação Matemática, com ênfase em formação de professores que ensinam Matemática, criatividade em Matemática e resolução de problemas. É membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal (SBEM/DF), dos Grupos de Pesquisas e Investigações em Educação Matemática da UnB (PI) e do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM), ambos credenciados à UnB. Professor Associado do Departamento de Matemática da UnB, Brasília, Distrito Federal, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4461-2004.
Lattes: https://lattes.cnpq.br/6638467671180292.
E-mail: lineuc@unb.br.

Márcia Rodrigues Leal

Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Mestre em Educação pela Pontifícia Universidade Católica de Goiás (PUC/GO). Licenciada em Matemática e em Pedagogia. Possui experiência na Educação Básica e no Ensino Superior. Desenvolve estudos relacionados ao campo da Educação Matemática, Criatividade em Matemática, Criatividade em Geometria e Formação de professores. É membro da Sociedade Brasileira de Educação Matemática do Distrito Federal (SBEM/DF), do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) e do Grupo de Pesquisa e Investigação em Educação Matemática (PI), ambos associados ao Departamento de Matemática da UnB. Brasília, Distrito Federal, Brasil.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4307-802X.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/4078490199054257.
E-mail: marcialeal629@gmail.com.

Maria de Lurdes Serrazina

Doutora em Educação Matemática pela Universidade de Londres (UK). Mestra em Educação Matemática pela Universidade de Boston (USA). Licenciada em Matemática pela Universidade de Lisboa. Foi professora coordenadora da Escola Superior de Educação do Instituto Politécnico de Lisboa, Presidente do seu Conselho Científico (2002-2004) e Presidente do seu Conselho Directivo (2004-2009). Foi Vice-Presidente do IPL (2008-2012). Atualmente está aposentada, continuando a colaborar em projetos e orientação de teses de doutoramento e envolvimento em projetos de investigação junto a Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Lisboa (ESE), Lisboa, Portugal.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-3781-8108
Websites: http://www.ie.ulisboa.pt/docente/maria-de-lurdes-marques-serrazina
E-mail: lurdess@eselx.ipl.pt.

Raimunda de Oliveira

Mestre e Doutora em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Professora há 26 anos da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), com experiência em formação de professores e produção de material didático-pedagógico. É membro dos grupos de pesquisa: Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) e Pesquisa e Investigação em Educação Matemática (PI), ambos associados ao Departamento da Matemática da UnB. Cidade de Ceilândia, Distrito Federal, Brasil.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-3052-5292.
Lattes: https://lattes.cnpq.br/5282744223752083.
E-mail: raioliveiramat@mail.com.

Regina da Silva Pina Neves

Doutora em Psicologia e Mestre em Educação, ambas pela Universidade de Brasília (UnB). Licenciada e especialista em Matemática pela Universidade Federal de Goiás (UFG). Atualmente é professora adjunta no Departamento de Matemática da UnB. Tem experiência profissional na Educação Básica, no Ensino Superior e na Pós-graduação do Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede (PROFMAT). Desenvolve pesquisas em Educação Matemática na área de formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática. É coordenadora do Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM) associado ao Departamento da Matemática da UnB. Brasília, Distrito Federal, Brasil.

ORCID iD: https://orcid.org/0000-ooo2-7952-9665.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/587465454324539.
E-mail: reginapina@mat.unb.br.

Ricardo Antônio Faustino da Silva Braz

Doutor em Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Mestre em Ensino das Ciências e Licenciado em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Professor Associado IV na Universidade Federal de Pernambuco do Centro Acadêmico do Agreste. Atua na área de Matemática e Educação Matemática, Coordenador Institucional do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência da Universidade Federal de Pernambuco desde o ano de 2022. Atua nos seguintes temas: ensino da matemática, aprendizagem, Plataforma *GeoGebra*. Presidente do Instituto GeoGebra em Pernambuco. Diretor da SBEM - Regional de Pernambuco. Brasil.

ORCID iD: http://orcid.org/0000-0001-5913-2380.
Lattes: http://lattes.cnpq.br/1251979725442770.
E-mail: ricardo.sbraz@ufpe.br.

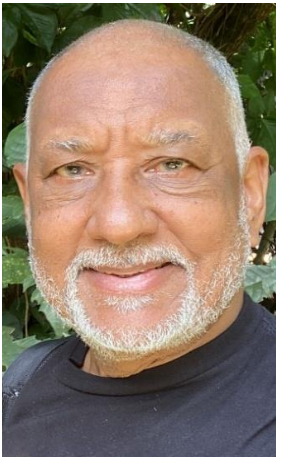
Simone Alves Côrtes

Mestre em Educação pela Universidade de Brasília (UnB). Especialista em Educação Matemática pela Faculdade Jesus Maria José (FAJESU). Especialista em Psicopedagogia pela Universidade Católica de Brasília (UCB). Graduada em História pelo Centro Universitário de Brasília (UNICEUB). Professora há 29 anos da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF), com experiência em formação de professores e produção de material didático-pedagógico. Brasília, Distrito Federal, Brasil.

ORCID iD: https://orcid.org/0009-0001-2413-5773.
Lattes: https://lattes.cnpq.br/0213187583036373.
E-mail: sialcortes@mail.com.

Sobre o pesquisador convidado

Fredy Enrique González



Doutor em Educação - Universidade de Carabobo, Valencia, Venezuela (1998). Professor Aposentado na Universidad Pedagógica Experimental Libertado (UPEL, Núcleo Maracay, Aragua, Venezuela); Coordenador-Fundador do Núcleo de Investigación en Educación Matemática "Dr. Emilio Medina" e do Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma. Coordenador-fundador do PhD em Educação Matemática da UPEL Maracay; Coordenador do projeto de pesquisa intitulado "História Social da Educação Matemática na América Latina", vinculado à Linha de Pesquisa em Educação Matemática do NIEM; Ministrador de cursos e seminários, orientador de dissertações e teses em várias universidades iberoamericanas. Professor convidado em: Universidad de Granada (Espanha), Universidad Mayor de San Andrés (Bolívia), Universidad Autónoma de San Carlos (Guatemala), Universidade Autónoma de Santo Domingo (República Dominicana), Universidad de Cartagena (Colômbia), Universidad del Zulia, Universidad Nacional Experimental de Guayana, Universidad Fermín Toro, Universidad José Antonio Páez, Instituto Pedagógico de Barquisimeto, Instituto Pedagógico de Maturín, Universidad Nacional Experimental Rómulo Gallegos (Venezuela); Diretor-Editor da Revista Paradigma. Consultor de pesquisa do Centro de Estudos Educacionais ligado ao Dep. de Ciências Sociais e Humanas do Instituto Tecnológico de Santo Domingo; Ex-vice-presidente da Federação Iberoamericana de Sociedades de Educação Matemática; Membro associado do Comitê Latino-Americano de Matemática Educativa e do Comitê Científico do CIBEM-2021; Professor Visitante Estrangeiro da Universidade Federal do Rio Grande do Norte no Departamento de Educação; Prof. Titular Visitante credenciado no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto.

ORCID iD: *https://orcid.org/0000-0002-8079-3826*
Lattes: *http://lattes.cnpq.br/4034449429973970*
E-mails: *fredygonzalezdem@gmail.com* *e* *fredy.gonzalez@ufop.edu.br*

Akademy
EDITORA