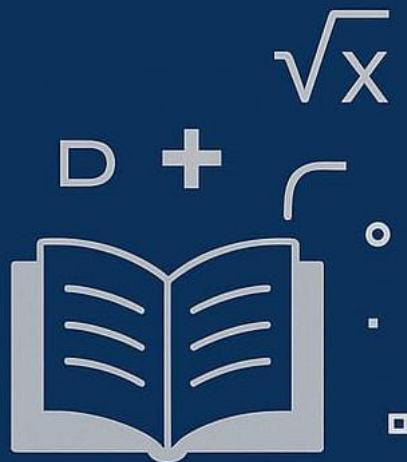
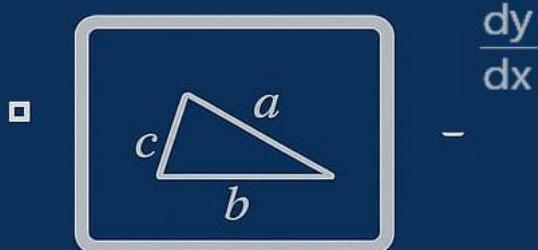




$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Tecnologias Digitais e Didática da Matemática: aspectos teóricos e metodológicos

Saddo Ag Almouloud
Maria Deusa Ferreira da Silva
José Messildo Viana Nunes
(organizadores)

Akadem
EDITORIA



Tecnologias Digitais e Didática da Matemática: aspectos teóricos e metodológicos

Saddo Ag Almouloud
Maria Deusa Ferreira da Silva
José Messildo Viana Nunes
(organizadores)

Tecnologias Digitais e Didática da Matemática: aspectos teóricos e metodológicos

Akadem
EDITORIA
2025

Copyright © 2025 Editora Akademy
Editor-chefe: Celso Ribeiro Campos
Diagramação e capa: Editora Akademy
Revisão: Cassio Giordano

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)
(Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

A452t

Almouloud, Saddy Ag; Silva, Maria Deusa Ferreira da;
Nunes, José Messildo Viana. Tecnologias digitais e
didática da matemática: aspectos teóricos e
metodológicos.
São Paulo: Editora Akademy, 2025.

Vários autores
Bibliografia
ISBN 978-65-80008-73-5
DOI doi.org/10.64521/ebook-978-65-80008-73-5

1. Tecnologia 2. Ensino e aprendizagem 3. Matemática 4.
Educação
I. Título

CDD: 370

Índice para catálogo sistemático:
1. Educação 370

Todos os direitos reservados. Nenhuma parte desta publicação poderá ser
reproduzida por qualquer meio sem a prévia autorização da Editora Akademy.
A violação dos direitos autorais é crime estabelecido na Lei n. 9.610/98 e punido
pelo artigo 184 do Código Penal.

Os autores e a editora empenharam-se para citar adequadamente e dar o devido
crédito a todos os detentores dos direitos autorais de qualquer material utilizado
neste livro, dispendo-se a possíveis acertos caso, inadvertidamente, a identificação de
algum deles tenha sido omitida.

Editora Akademy – São Paulo, SP

Corpo editorial

Alessandra Mollo (UNIFESP-CETRUS)
Ana Hutz (PUC-SP)
Ana Lucia Manrique (PUC-SP)
André Galhardo Fernandes (UNIP)
Andréa Pavan Perin (FATEC)
Antonio Correa de Lacerda (PUC-SP)
Aurélio Hess (FOC)
Camila Bernardes de Souza (UNIFESP/EORTC/WHO)
Carlos Ricardo Bifi (FATEC)
Cassio Cristiano Giordano (FURG)
Cileda Queiroz e Silva Coutinho (PUC-SP)
Claudio Rafael Bifi (PUC-SP)
Daniel José Machado (PUC-SP)
Fernanda Sevarolli Creston Faria (UFJF)
Francisco Carlos Gomes (PUC-SP)
Freida M. D. Vasse (Groningen/HOLANDA)
Fredy Enrique González (UFOP)
Heloisa de Sá Nobriga (ECA/USP)
Ivy Judensnaider (UNICAMP)
Jayr Figueiredo de Oliveira (FATEC)
José Nicolau Pompeo (PUC-SP)
Marcelo José Ranieri Cardoso (PUC-SP e Mackenzie)
Marco Aurelio Kistemann Junior (UFJF)
Maria Cristina Kanobel (UTN – ARGENTINA)
Maria Lucia Lorenzetti Wodewotzki (UNESP)
Mario Mollo Neto (UNESP)
Mauro Maia Laruccia (PUC-SP)
Michael Adelowutan (University of JOHANNESBURG)
Océlio de Jesus Carneiro Moraes (UNAMA)
Paula Gonçalves Sauer (ESPM)
Roberta Soares da Silva (PUC-SP)
Tankiso Moloi (University of JOHANNESBURG)

Este livro foi avaliado e aprovado por pareceristas ad hoc.

Sumário

Apresentação	10
PARTE I: REFLEXÕES TEÓRICAS SOBRE DIDÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS	15
Capítulo 1	
Qual tecnologia computacional para qual projeto de Educação Matemática?	16
1. Introdução	16
2. Condição humana num mundo fortemente tecnológico	18
3. Comportamentos e relação com o mundo.....	29
4. Projeto de tecnologias computacionais para o ensino	37
5. Considerações finais.....	48
Referências	50
Capítulo 2	
A dimensão tecnológica no problema didático: reflexões em tempos de Inteligência Artificial.....	55
1. Introdução	55
2. Fundamentos Teóricos: Dimensões dos problemas didáticos.....	58
3. A Dimensão Tecnológica: Fundamentos e Articulações	69
4. A Dimensão Tecnológica e a Inteligência Artificial	74
5. Considerações Finais.....	75
6. Referências	77
Capítulo 3	
Interconexões entre as dimensões digital e didática da Matemática nos processos de ensino e aprendizagem.....	79
1. Introdução	79
2. Percurso de Estudo e Pesquisa do Pesquisador (PEP-PE)	81
3. Codeterminação Didática.....	83
4. Evolução nos modelos educacionais sob o olhar da TAD	86
5. Inteligência Artificial (IA): evolução	91
6. ChatGPT	92
7. Dimensão Digital & Dimensão da Didática da Matemática	93
8. Considerações Finais.....	97
Referências	97

Capítulo 4	
Reflexões teóricas sobre as contribuições das tecnologias emergentes para o ensino e aprendizagem da Matemática	99
1. Introdução	99
2. Contribuições das Tecnologias Emergentes.....	104
3. Contribuições Teóricas.....	108
4. Considerações finais.....	117
Referências.....	121
Capítulo 5	
Reflexões sobre a Inteligência Artificial Generativa nos ambientes escolares e o papel crítico do conhecimento.....	125
1. Introdução	125
2. Sobre inteligência artificial e um panorama evolutivo	127
3. A IAG na escola e as questões críticas do saber e da didática	135
4. Recortes sobre experiências com IAG em cenários de ensino.....	141
5. Palavras finais	152
Referências	152
PARTE II: TECENDO REFLEXÕES SOBRE USO DE TECNOLOGIAS DIGITAIS E DIDÁTICAS	
.....	156
Capítulo 6	
As tecnologias relacionadas à Álgebra e à Geometria no ensino médio: atividades com o Geogebra	157
1. Introdução	157
2. Referencial teórico	159
3. A Base Nacional Comum Curricular e a relação entre álgebra, geometria e tecnologias	164
4. Atividades com sólidos geométricos no Geogebra	167
5. A análise das atividades à luz do referencial teórico	183
6. Considerações Finais.....	189
Referências	190
Capítulo 7	
O software Scratch como um dispositivo didático no ensino e aprendizagem da Matemática dos Anos Iniciais.....	192
1. Introdução	192
2. Estratégias de Busca.....	196
3. Pressuposto Teórico e Metodológico	200
4. Fases discutidas e analisadas na RIL segundo Bardin (2016).....	200
5. Conclusões: um balanço da pesquisa	219
Referências	226

Capítulo 8	
A plataforma GenIA como possibilidade para o uso de Inteligência Artificial na educação	230
1. Introdução	230
2. Tecnologias Digitais no âmbito educacional	232
3. Uso de objetos de aprendizagem e de plataformas digitais	234
4. GenIA – programação intuitiva e IA	234
5. Considerações	240
Referências	242
Capítulo 9	
Transposição didática e a produção de vídeos para a comunicação na Educação Matemática	244
1. Introdução	244
2. O potencial dos vídeos para a transformação do discurso matemático	245
3. Interseções entre os processos de transposição didática e produção de vídeos.....	254
4. Pesquisas que envolvem Transposição didática e produção de vídeos no âmbito de um grupo de pesquisa	259
5. Considerações Finais.....	262
Referências	262
Capítulo 10	
Análise comparativa de tecnologias digitais em aliança com técnicas usuais do ambiente papel/lápis	266
1. Introdução	266
2. Definições preliminares	268
3. Quadro teórico	271
4. Metodologia de pesquisa	273
5. Análise de <i>softwares</i>	275
6. Análise comparativa de <i>softwares</i>	290
7. Considerações finais.....	292
Referências	292
Capítulo 11	
Uso do Geogebra otimizado no ensino da Geometria Descritiva sob o aspecto teórico da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS)	294
1. Introdução	294
2. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e implicações no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos	295
3. Tecnologias Digitais no contexto educacional.....	298
4. Uso do GeoGebra e ensino de Geometria Descritiva: uma breve RSL	299
5. GeoGebra otimizado e apontamentos.....	303
6. Considerações Finais.....	309
Referências	310

Capítulo 12

Tecnologias Digitais e Didática da Matemática: o uso da Inteligência Artificial Generativa no paradigma do questionamento do mundo.....	311
1. Introdução	311
2. Inteligência artificial generativa e educação matemática	313
3. Teoria Antropológica do Didático.....	316
4. Diálogo com a GenAI sobre o PER.....	324
5. Considerações.....	329
Referências	330
Anexo	333

Capítulo 13

Grupos colaborativos no WhatsApp na abordagem da Educação Financeira na Educação de Jovens e Adultos.....	337
1. Introdução	337
2. Metodologia.....	342
3. Discussão dos resultados	343
4. Considerações Finais.....	350
Referências	352
Lista de autores e mini currículo.....	354

Apresentação

Este livro de produção coletiva, aborda a temática do uso das Tecnologias Digitais (TD) nas aulas de matemática, estabelecendo um diálogo com a Didática da Matemática. O objetivo é promover o entrelaçamento do uso das TD e as diferentes teorias desenvolvidas no bojo da Didática da Matemática, dando uma especial atenção às dimensões epistemológica, económico-institucional, ecológica, da linguagem e tecnológica de um problema didático.

A obra é composta de duas partes: a primeira parte, intitulada “Reflexões teóricos sobre didática e tecnologias digitais” e composta de 4 capítulos, tece reflexões teóricos sobre a conexão entre didática e tecnologias digitais. A segunda parte, intitulada “Tecendo reflexões sobre uso de tecnologias digitais e didáticas”, composta de 8 capítulos, apresenta reflexões sobre uso de tecnologias digitais fundamentando-se em alguns constructos teóricos da Didática da Matemática.

Apresentamos os objetivos dos capítulos da **primeira parte da obra**, iniciando pelo capítulo “Qual tecnologia computacional para qual projeto de educação matemática?” de Franck Bellemain. Neste capítulo, o autor propõe uma reflexão fundamentada sobre o impacto da presença constante das tecnologias na sociedade contemporânea. A provocação dessa análise justifica-se, primeiramente, pelo envolvimento significativo do autor no desenvolvimento de softwares e plataformas, o que suscita questionamentos em relação à participação na consolidação da hegemonia tecnológica. Adicionalmente, Bellemain defende uma utilização mais criteriosa das tecnologias nos diversos campos do saber e nas atividades humanas. Ele destaca a importância de refletir tanto sobre as contribuições das ferramentas computacionais para o ensino quanto sobre a tendência à “obsessão” tecnológica. Dessa forma, o autor promove o debate acerca da concepção de tecnologias computacionais vinculadas a um projeto antropocêntrico de ensino, em contraste com posturas tecnocêntricas.

O segundo capítulo, intitulado “A dimensão tecnológica no problema didático: reflexões em tempos de inteligência artificial”, é assinado por Deusarino Oliveira Almeida Júnior, José Messildo Viana Nunes, Saddo Ag Almouloud e Saul Rodrigo da Costa Barreto. Os autores apresentam a concepção da dimensão tecnológica como parte integrante dos problemas didáticos na perspectiva da Teoria Antropológica do Didático (TAD), ressaltando a importância

de ampliar o aparato analítico da TAD diante dos desafios trazidos pela inclusão de artefatos digitais e da inteligência artificial nos ambientes escolares. Com base numa análise crítica das dimensões epistemológica, econômico-institucional, ecológica e de linguagem, argumentam que a dimensão tecnológica deve ser considerada um elemento transversal e estruturante, influenciando diretamente os processos de produção, circulação e validação dos saberes.

No capítulo “Interconexões entre as dimensões digital e didática da matemática nos processos de ensino e aprendizagem”, Teodora Pinheiro Figueira e Saddo Ag Almouloud analisam, à luz da Teoria Antropológica do Didático e de um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP), a importância de integrar as dimensões Digital e Didática no ensino de matemática. A pesquisa parte da questão: quais os impactos de uma sociedade hiperconectada, na era da IA, sobre as relações pessoais e interpessoais nas instituições de ensino? Os autores destacam a necessidade de aproximar as instituições digitais e de ensino para evitar a cegueira didática e promover a produção do conhecimento.

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, José Manuel Dos Santos Dos Santos e Marcio Vieira de Almeida, no capítulo “Reflexões teóricas sobre as contribuições das tecnologias emergentes para o ensino e aprendizagem da matemática”, discute como tecnologias emergentes — especialmente Inteligência Artificial (IA), Realidade Virtual (RV), Realidade Aumentada (RA) e IA generativa — estão transformando o ensino e a aprendizagem da matemática. A integração dessas tecnologias oferece oportunidades para personalizar o ensino, promover ambientes de aprendizagem mais interativos e facilitar a compreensão de conceitos abstratos por meio de visualizações e simulações práticas. Os autores destacam que a adoção dessas ferramentas exige adaptações pedagógicas, formação continuada de professores e fundamentação em referenciais teóricos sólidos, como o modelo TPCK (conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo), a teoria da gênese instrumental, a teoria dos registros de representação semiótica, o construtivismo/construcionismo e a teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal de Vygotsky.

O último capítulo desta parte, intitulado “Reflexões sobre a inteligência artificial generativa nos ambientes escolares e o papel crítico do conhecimento”, de autoria de Gerson Pastre de Oliveira, aborda a fluência no uso de tecnologias educacionais para discutir a inserção da Inteligência Artificial Generativa (IAG) no contexto escolar. O texto apresenta uma análise histórica das pesquisas em inteligência artificial, desde os estudos pioneiros de Turing até as inovações em deep learning e large language models, ressaltando a capacidade da IAG de produzir conteúdos textuais, visuais e sonoros de forma autónoma. O autor enfatiza que, no

ambiente escolar, a adoção dessas tecnologias não substitui a articulação entre conhecimento de referência, estratégias didáticas e o uso adequado de recursos; pelo contrário, evidencia o papel fundamental do pensamento crítico dos indivíduos na avaliação de respostas e, sobretudo, na construção do conhecimento.

Apresentamos os objetivos dos capítulos que compõem a **segunda parte da obra**, iniciando pelo capítulo denominado “As tecnologias relacionadas à álgebra e à geometria no ensino médio: atividades com o GeoGebra”, de autoria de Maria José Ferreira da Silva e Saddo Ag Almouloud. Este estudo fundamenta-se na observação de que os sólidos geométricos habitualmente abordados são introduzidos aos alunos por meio de modelos físicos, frequentemente acompanhados da representação planificada de suas superfícies, visando à identificação de características e ao cálculo de medidas de volumes mediante fórmulas preestabelecidas. Os autores embasaram-se em pesquisas dedicadas à Geometria Espacial e ao estudo dos volumes de sólidos geométricos, privilegiando a participação ativa dos estudantes em seu processo de aprendizagem. Para este capítulo, foram adaptadas algumas das atividades (dos autores citados) com enfoque diferenciado, permitindo examinar as relações entre Álgebra, Geometria Sintética e Tecnologia utilizando o software GeoGebra.

No segundo capítulo, intitulado “O Software Scratch como um dispositivo didático no ensino e aprendizagem da matemática dos anos iniciais”, Naum de Jesus Serra, Saddo Ag Almouloud e José Messildo Viana Nunes apresentam uma revisão sobre o uso do *Scratch* no ensino e na formação docente em matemática nos anos iniciais. Foram analisados 36 trabalhos entre 2014 e 2024 por meio de análise documental, organizados em três categorias: formação de professores com *Scratch*, ensino de matemática pela programação com *Scratch*, e mapeamento de pesquisas sobre *Scratch* na educação básica. Os resultados mostram que o *Scratch* é uma ferramenta promissora para a formação de professores e ensino da matemática, favorecendo o pensamento lógico, crítico e computacional dos alunos, apesar de algumas restrições relacionadas ao tempo de apropriação e planejamento. O *Scratch* destaca-se como o software mais utilizado por professores em projetos devido à sua interface interativa e potencial para estimular o pensamento computacional.

Marco Aurélio Kalinke, Eloisa Rosotti Navarro e Renata Oliveira Balbino analisam, no artigo “A plataforma GenIA como possibilidade para o uso de inteligência artificial na educação”, os benefícios da GenIA, criada pelo GPTEM, que utiliza IA e programação intuitiva para desenvolver Objetos de Aprendizagem (OA) em Matemática. A plataforma facilita a construção de OA sem exigir conhecimentos avançados de programação, promove

personalização do ensino e oferece feedback imediato, além de democratizar o acesso à programação e ao desenvolvimento de recursos educacionais digitais.

“Transposição didática e a produção de vídeos para a comunicação na educação matemática”, de autoria de Liliane Xavier Neves, discute-se como a transposição didática tem contribuído, ao integrar o quadro teórico de pesquisas que buscam analisar o processo de transformação do saber de referência em saber a ensinar, tendo como mote para a discussão do conceito matemático em formato de vídeo, problemas do livro didático.

No capítulo “Análise comparativa de tecnologias digitais em aliança com técnicas usuais do ambiente papel/lápis”, Afonso Henriques, Marcos Rogério Neves e Osnildo Andrade Carvalho analisam as potencialidades e limitações dos ambientes computacionais Maple e GeoGebra em comparação com métodos tradicionais de papel/lápis no ensino superior de matemática. Focando na modelagem paramétrica de curvas, superfícies e espaços 3D, incluindo a gestão de código para impressoras 3D, eles fundamentam a pesquisa na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, na Abordagem Instrumental e na Teoria Antropológica do Didático. Os resultados indicam que ambos os softwares oferecem ferramentas tecnológicas distintas, porém equivalentes em eficiência e resultados, cada qual com suas particularidades, destacando a importância dessas ferramentas na consolidação do aprendizado matemático na Educação Superior.

No artigo “Uso do GeoGebra otimizado no ensino da geometria descritiva sob o aspecto teórico da teoria dos registros de representação semiótica”, Hugo Costa Pereira e Souza e Maria Deusa Ferreira da Silva analisam as contribuições, já consolidadas e divulgadas na literatura, do uso do software GeoGebra e da Teoria dos Registros de Representação Semiótica no ensino de conteúdos da disciplina Geometria descrita. Ademais, apresentar a importância dessa abordagem teórica e a inserção das Tecnologias digitais de informação e comunicação no contexto de ensino e aprendizagem de conhecimentos ditos mais abstratos e complexos.

No capítulo “Tecnologias digitais e didática da matemática”, Nailys Melo Sena Santos, Denize da Silva Souza e Saddo Ag Almouloud analisam o uso de Inteligência Artificial Generativa (IAG) no ensino de matemática sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático. O estudo apresenta uma atividade investigativa para sólidos geométricos no 9º ano, utilizando ferramentas como ChatGPT e NotebookLM para estimular o questionamento e a construção ativa do conhecimento. A pesquisa indica que interações eficazes com IA exigem prompts claros e validação crítica das respostas, destacando a importância do desenvolvimento

de habilidades investigativas e pensamento crítico nos alunos. Conclui-se que integrar TAD e IAG pode tornar o ensino inovador e promover autonomia e criatividade.

No último capítulo desta segunda parte da obra, “Grupos colaborativos no whatsapp na abordagem da educação financeira na educação de jovens e adultos”, Érica Valeria Alves, Ana Lucia Silva Simas, Deivisson Oliveira dos Santos desenvolvem uma intervenção a fim de propiciar conhecimentos de educação financeira na EJA por meio de um grupo de WhatsApp. A questão que deu origem à interação no grupo foi: O que dá para fazer com um salário-mínimo? Por meio de um debate no grupo de WhatsApp ocorreu a interação entre pesquisadores e estudantes da EJA visando a educação financeira dos sujeitos. A partir da transcrição e análise das contribuições dos participantes buscamos evidenciar os elementos centrais da investigação e a cultura matemática dos participantes, além de promover a educação financeira deles.

PARTE I: REFLEXÕES TEÓRICAS SOBRE DIDÁTICA E TECNOLOGIAS DIGITAIS

Capítulo 1

Qual tecnologia computacional para qual projeto de Educação Matemática?

Franck Bellemain¹

1. Introdução

As tecnologias computacionais, aí incluídas as tecnologias da informação e da comunicação, ocupam um espaço cada vez maior nas nossas vidas assim como na sociedade em geral. Em muitas situações da vida quotidiana e profissional, o suporte das tecnologias é tão intenso que algumas atividades são quase irrealizáveis sem elas. As tecnologias colhem, armazenam, tratam e interpretam informações, invadindo frequentemente o espaço privado. São cada vez mais uma passagem obrigatória nas tomadas de decisão, e chegam por vezes a tomar decisões no lugar das pessoas. Tecnologias computacionais ocupam espaço, quase exclusivo, nos meios de comunicação entre máquinas, entre seres humanos e máquinas e de seres humanos entre si, mesmo quando os comunicantes estão fisicamente juntos.

Paralelamente a esse aumento dos espaços ocupados pelas tecnologias computacionais, crescem fortes preocupações acerca da condição humana, de forma geral, num mundo cada vez mais tecnológico. São preocupações relativas às possibilidades de atuação e liberdades que sobram para os humanos (Souza, 2022), aos impactos das tecnologias sobre a criação, a sensibilidade e a afetividade nas relações (Berardi, 2019), e mais geralmente, relativas à nossa saúde tanto mental como física. Pode-se ainda conectar os focos de inquietação que emergem desse cenário com a questão da redução ou até mesmo eliminação da singularidade humana, discutida por Hannah Arendt (1958-1998)², no contexto da modernidade.

Assim, antes de discutir possíveis aportes da didática da matemática ao desenvolvimento de tecnologias computacionais, levantamos pistas de reflexão sobre consequências da omnipresença dessas tecnologias na sociedade. A necessidade de provocar essa reflexão apoia-se em algumas razões.

¹ fbellemain@gmail.com

² O texto original de Arendt foi publicado pela primeira vez em 1958 Somente em 1998 foi publicada uma segunda edição, em inglês, texto que utilizamos. Daqui em diante, citaremos a edição que foi consultada: (Arendt, 1998)

Inicialmente, por termos investido bastante tempo e energia na concepção e desenvolvimento de softwares e plataformas, o que provoca uma inquietação com relação à cumplicidade com essa “hegemonia” tecnológica. Numa visão mais abrangente, defendemos uma abordagem menos compulsiva do uso dessas tecnologias em todas as áreas de conhecimento e atividades humanas. Preocupa-nos o rumo das ciências que, computacionalmente instrumentadas, têm hoje uma forte tendência reducionista, excessivamente especializada, produtivista e corporativista.

Acreditamos que a primeira consequência dessa tendência reducionista é que a reflexão transdisciplinar sobre o rumo das pesquisas não é suficientemente ampla (Arendt, 1998). Uma segunda é a marginalização e a desvalorização das e dos cientistas na sociedade.

Mas sentimos, sobretudo, necessidade dessas reflexões por termos a convicção dos aportes das tecnologias computacionais ao ensino, mas buscarmos fortemente evitar a “obsessão” tecnológica. Nesse sentido, procuramos problematizar a concepção de tecnologias computacionais em conexão com um projeto antropocêntrico (em oposição a um projeto tecnocêntrico³) de ensino.

Para fundamentar essas reflexões, vamos nos apoiar em referências um pouco afastadas, no tempo e no espaço, dessa discussão “quente”, e frequentemente interesseira, sobre aportes, limites e efeitos nefastos das tecnologias digitais e computacionais para as atividades humanas.

Déjà en son temps, comme il en témoigne dans son livre⁴, sa critique frontale d'un univers technique dont l'homme aspirait fiévreusement à en devenir l'esclave, lui valut un procès en "réaction", que lui intentait la toute puissante inquisition technoscientiste (Lelouche, 2015, p. 2).

A mais recente dessas discussões, na academia pelo menos, é a respeito do uso da inteligência artificial na produção de obras (textuais, artísticas etc.).

Nossa escolha de referências visa a procurar um olhar diferenciado, transdisciplinar e mais humano, sobre as questões envolvidas e evitar repetir os argumentos e contra-argumentos correntes dos defensores e opositores da omnipresença das tecnologias nas nossas vidas. Nesse sentido, iniciaremos com uma discussão sobre a condição humana num mundo cada vez mais tecnológico, entre outros, na perspectiva de pensar quais papéis a escola pode dar à tecnologia para tentar manter uma condição do ser humano ainda humanizada. Em seguida, destacaremos

³ Essa precisão é importante, pois para além de nos afastarmos da perspectiva tecnocêntrica, nossos projetos não visam a colocar o ser humano no centro do universo! *Temos que abandonar o antropocentrismo; há muita vida além da gente, não fazemos falta na biodiversidade.* (Krenak, 2022, p. 45)

⁴ O livro aos qual Lelouch se refere nesta citação é “A obsolescência do homem” de Günther Anders.

alguns elementos a respeito dos efeitos do uso e abuso das tecnologias sobre as percepções e comportamentos humanos assim como a relação dos seres humanos com o mundo real. Por fim, apresentaremos as linhas do nosso projeto de concepção, desenvolvimento e integração de tecnologias computacionais, e seus processos e produtos.

2. Condição humana num mundo fortemente tecnológico

É importante lembrar que o desenvolvimento tecnológico, maquinário ou digital-computacional, foi e continua, em parte, sendo impulsionado pelo desejo insaciável de dominação das massas pela elite, e pela procura de hegemonia de certos povos sobre outros povos. Mesmo se existem muitas utilizações das tecnologias que não aderem a projetos de dominação, algumas características que sustentaram esses projetos não desaparecem totalmente nessas outras utilizações. Por exemplo, as tecnologias digitais são “vendidas” socialmente como algo que permite uma melhoria das condições de vida, por encurtar as distâncias, reduzir o tempo dedicado a tarefas repetitivas, aumentar o acesso à informação etc. Por outro lado, elas permitem também a supervisão do espaço, o controle do tempo e a manipulação da informação (Berardi, 2019). De fato, o universo instrumental condiciona a existência humana. The impact of the world’s reality upon human existence is felt and received as a conditioning force. (Arendt, 1998, p.9). Além disso, quando adquirimos essas tecnologias digitais, abrimos a porta das nossas casas e oferecemos ao mercado como produto, como retrata o filme “O Dilema das Redes”⁵.

Sermos associados a produtos é provavelmente algo que ficou mais explícito com o advento das redes sociais, a diversificação da oferta e a diminuição da distância entre a produção e o consumo, mas já era consequência, segundo Arendt (1998, p.131), da revolução industrial:

Yet the developments of the last decade, and especially the possibilities opened up through the further development of automation, give us reason to wonder whether the utopia of yesterday will not turn into the reality of tomorrow, so that eventually only the effort of consumption will be left of “the toil and trouble” inherent in the biological cycle to whose motor human life is bound. However, not even this utopia could change the essential worldly futility of the life process. The two stages through which the ever-recurrent cycle of biological life must pass, the stages of labor and consumption, may change their proportion even to the point where nearly all human “labor power” is spent in consuming, with the concomitant serious social problem of leisure, that is, essentially the problem of how to provide enough opportunity for daily exhaustion to keep the capacity for consumption intact.

⁵ Drama documentário estadunidense dirigido por Jeff Orlowski, com roteiro de Orlowski em parceria com Davis Coombe e Vickie Curtis.

A utopia citada por Arendt nesse extrato é a utopia de Karl Marx - a emancipação do ser humano do trabalho, ou seja, que o ser humano não tenha mais necessidade de vender sua força de trabalho para sobreviver. Arendt evidencia que a automatização, a melhoria na eficiência e na produtividade, o suporte a tarefas repetitivas, permitidos pelas tecnologias, não transformaram essa utopia numa realidade. Acreditamos, na verdade, que as tecnologias não foram projetadas para isso. Pelo contrário, foram projetadas para aumentar a necessidade do ser humano vender ao desbarato sua força de trabalho face à concorrência das máquinas, ou vender sua própria habilidade em produzir novas máquinas, e se exaurir para acessar a uma outra utopia, datando da idade média essa, entretanto modernizada e diversificada pela sociedade de consumo: a Cocanha⁶. O que mudou com a chegada das redes de computadores, denunciado pelo documentário, não é que o ser humano virou um produto. De certa forma, ele já era! O que mudou é que não é mais ele que se vende, ele está sendo vendido para os que querem encantá-lo pela Cocanha.

Karl Marx defendia a emancipação do ser humano **do** trabalho no contexto específico do sistema capitalista no qual os meios de produção não lhe pertenciam. O trabalhador que tem apenas sua força de trabalho é obrigado a vendê-la para sobreviver. Ele produz mercadoria para poder se vender ele-mesmo, sua força, como mercadoria. Ao longo do tempo e dos textos, o pensamento de Karl Marx evoluiu (Artous, 2016), chegando a considerar o trabalho como estatuto e princípio mesmo de qualquer sociedade na qual está justamente em jogo a emancipação do ser humano **pelo** trabalho:

The sudden, spectacular rise of labor from the lowest, most despised position to the highest rank, as the most esteemed of all human activities, began when Locke discovered that labor is the source of all property. It followed its course when Adam Smith asserted that labor was the source of all wealth and found its climax in Marx's "system of labor,"³⁹ where labor became the source of all productivity and the expression of the very humanity of man (Arendt, 1998, p.101).

Tanto para o liberalismo como para o socialismo, a obsessão pela produção e pela reprodução é o principal motor do trabalho desde o início da revolução industrial. Le monde moderne en revanche, sous l'impulsion des prérogatives productivistes et utilitaristes, se distingue en tant qu'il est devenu une société de travailleurs (Zafrani, 2016, p.117). Esse objetivo comum das classes sociais, que sabemos insustentável, leva Latour e Schultz (2022, p.17) a defender a formação de uma nova classe ecológica, parce qu'elle conteste la notion de

⁶ O mito de Cocanha nasceu entre o século XII e XIV. O país de Cocanha é, no imaginário de algumas culturas europeias, um país milagroso onde a natureza é generosa. Longe da fome e das guerras, Cocanha é terra de festa, fartura e prazer, onde a preguiça é valorizada e o trabalho proscrito.

production, on doit même dire que la classe écologique amplifie considérablement le refus général d'autonomiser l'économie au dépens des sociétés. Arendt (1998) já denunciava a obsessão pela produção devido à incompatibilidade do crescimento quase infinito desta com uma disponibilidade finita de recursos e, sobretudo, porque através dela e da mutação do consumo em “necessidade vital”, se restringia a condição humana ao único animal laborans, isto é, essencialmente às atividades por meio das quais se procura garantir a subsistência pela produção dos bens de consumo. Arendt considerava que a condição humana é constituída da vita activa e da vita contemplativa e que a vita activa é caracterizada por três tipos de atividades: o trabalho (animal laborans), a obra (homo faber) e a ação. Ela defendia que a humanidade do ser humano não se encontra somente no trabalho, atividades que mais nos aproximam dos outros animais, mas se encontra, sobretudo, na obra (homo faber) e na ação.

Nesse ponto da discussão, é importante precisar o sentido que Arendt dava à noção de trabalho, porque pelo senso comum, na distinção que ela faz entre as atividades humanas, a obra e a ação também necessitam de trabalho. De fato, Arendt, se apoioando entre outros na etimologia da palavra, distingue dois tipos de atividades: aquelas do animal laborans destinadas a suprir às necessidades da vida, à sobrevivência, à produção do que deve ser consumido, e aquelas do homo faber destinadas à obra, à fabricação do que vai permanecer, para ser utilizado ou como registro, à fabricação de um mundo durável.

Thus, the Greek language distinguishes between ponein and ergazesthai, the Latin between laborare and facere or fabricari, which have the same etymological root, the French between travailler and ouvrir, the German between arbeiten and werken. In all these cases, only the equivalents for “labor” have an unequivocal connotation of pain and trouble. The German Arbeit applied originally only to farm labor executed by serfs and not to the work of the craftsman, which was called Werk. The French travailler replaced the older labourer and is derived from tripalium, a kind of torture (Arendt, 1998, p. 328).

De fato, na nossa sociedade produtivista, utilitarista de trabalhadores conforme caracterização de Zafrani (2016), essa distinção não é mais pertinente e a palavra trabalho designa de forma geral as atividades destinadas a suprir tanto as necessidades da vida como aquelas destinadas à construção de um universo instrumentado (porém frequentemente mais consumível que durável), ou mesmo os próprios produtos do trabalho, como obras de arte. A revolução industrial confiscou, taylorizou, a produção dos bens duráveis do homo faber para transformá-los em bens de consumo produzidos em cadeia pelos animais laborans.

Além da questão etimológica, ou mesmo da natureza (permanência ou efemeridade) do que é produzido, acreditamos que o que diferencia o trabalho do animal laborans daquele do

homo faber é o processo de elaboração, e mais ainda, a relação do ser com esse processo. Com efeito, segundo Arendt, as atividades do homo faber, desenvolvidas num espaço privado, dizem respeito à compreensão do mundo, ao registro dessa compreensão em objetos de longa duração, à criação, à invenção, à arte, à elaboração de utopias “individuais” que visam a fabricação de um mundo compartilhado. Essas atividades envolvem processos (antigos como novos, físicos como mentais) que não são automatizados, mas estão em permanente evolução e adequação ao mundo. São atividades que expressam e desenvolvem a singularidade do ser e preparam a ação. A ação, por sua vez, se desenvolve num espaço público no qual acontecem a comunicação e a intersubjetividade, onde o ser confronta e articula a sua singularidade com a singularidade dos outros, ultrapassa os limites subjetivos, integra a pluralidade e dialoga, constrói com eles, utopias, motores da evolução e enraizadas na memória coletiva. A pluralidade e a heterogeneidade são condições necessárias para a intersubjetividade. Nesse contexto, "Human plurality, the basic condition of both action and speech, has the twofold character of equality and distinction." (Arendt, 1998, p.175). A ação procura a construção de um mundo compartilhado entre seres distintos, únicos, mas iguais, ela é a « actualization of the human condition of plurality, that is, of living as a distinct and unique being among equals. » (ibid., p. 178).

Mesmo se as abordagens e os propósitos são diferentes, talvez porque se cruzam pela referência comum de Heidegger, encontramos também uma tensão entre a vida “sobrevivida” (do animal *laborans*) e a consciência da vida (e da morte) e a elaboração de utopias compartilhadas em Albert Camus quando ele caracteriza o sentimento do absurdo. Esse sentimento é provocado pelo divórcio entre o ser humano, mortal, e um mundo imortal ao qual pertence, porém no qual se sente estrangeiro, um mundo que ele não entende e que não dá sentido a sua vida. Ce divorce entre l’homme et sa vie, l’acteur et son décor, c’est proprement le sentiment de l’absurdité. (Camus, 1942, p. 18). Face à absurdade de uma vida “sobrevivida” na espera do fim, no lugar da negação (suicídio), da transcendência (espiritualidade) ou da ideologia, ele considera a revolta. Esta não consiste em procurar fugir dessa absurdade, mas pelo contrário, ter consciência da sua condição, e enfrentá-la, vivendo plenamente, livremente, diariamente, sem procurar alguma posteridade, sem idealizar alguma vida eterna post-mortem. A revolta de Camus não é uma revolta epicurista na qual se trata de se “chafurdar na Cocanha” (equivalente a uma fuga), o que afinal a sociedade de consumo espera de nós. Trata-se de uma tomada de consciência permanente de estar vivo, de pensar o mundo. Retomando Husserl e os fenomenologistas, ele comenta:

L'univers spirituel s'enrichit avec eux de façon incalculable. Le pétales de rose, la borne kilométrique ou la main humaine ont autant d'importance que l'amour, le désir, ou les lois de la gravitation. Penser, ce n'est plus unifier, rendre familière l'apparence sous le visage d'un grand principe. Penser, c'est réapprendre à voir, à être attentif, c'est diriger sa conscience, c'est faire de chaque idée et de chaque image, à la façon de Proust, un lieu privilégié... Ces chemins mènent à toutes les sciences ou à aucune. C'est dire que le moyen ici a plus d'importance que la fin. Il s'agit seulement « d'une attitude pour connaître » et non d'une consolation (Camus, 1942, p. 45).

Não se trata de romantizar as situações, disfarçando o intolerável em força de vontade emulatória, mas a consciência de Sísifo do trágico da sua tarefa inútil e sem esperança, como a consciência do operário do absurdo da sua vida maquinial, são vitórias sobre esse absurdo e a tomada de consciência de estarem vivos. La clairvoyance qui devait faire son tourment consomme du même coup sa victoire. Il n'est pas de destin qui ne se surmonte par le mépris. (*ibid.*, p. 166).

Acredito que se pode reconhecer também uma tal revolta nos diários de Carolina Maria de Jesus (Jesus, 1960) que consciente da falta de esperança da sua condição, constrói e reconstrói um mundo no qual ela encontra um sentido para sua vida como vitória sobre o absurdo:

Quando eu não tinha nada o que comer, em vez de xingar, eu escrevia. Tem pessoas que, quando estão nervosas, xingam ou pensam na morte como solução. Eu escrevia meu diário... Eu era revoltada, não acreditava em ninguém. Odiava os políticos e os patrões, porque meu sonho era escrever e o pobre não pode ter ideal nobre. Eu sabia que ia angariar inimigos, porque ninguém está habituado a esse tipo de literatura. Seja o que deus quiser. Eu escrevi a realidade (Jesus, 1960, p. 195).

Carolina é um Sísifo dos tempos modernos, carregando sua sacola pesada de papéis no topo da favela do Canindé para se manter viva assim como sua filha e seus filhos. Tomando consciência da sua condição absurda, ela se revolta através da escrita do seu diário. Muito foi dito ou escrito sobre Carolina Maria de Jesus e seus diários, mas o que queremos sobretudo destacar é a força de vida que ela tinha, força que vem do sentido que ela dá à própria vida, em contrapeso da falta de sentido das suas condições de vida. É claro que a filha e os filhos constituíam uma parte importante desse sentido, mas a escrita dos diários, escrita revoltada pela descrição das condições de vida, coletiva pela perspectiva de ser lida (publicada), pelas interações diárias com outros favelados e demais relações, é outra parte importante desse sentido. De certa forma, a humanidade como produto da condição humana, como revolta contra o absurdo, é mais presente no Quarto de Despejo, nas narrativas de Carolina de Jesus que no que a autora designa como sala de visita com seus lustres de cristais, seus tapetes de viludos, almofadas de sitim (*ibid.*, p.35) da cidade.

A dimensão coletiva é importante na vida de Carolina, como na vita activa de Arendt ou na revolta de Camus. No caso da vita activa, ela aparece na ação, nas utopias, na construção coletiva de um mundo compartilhado. Para Camus,

Dans l'expérience absurde, la souffrance est individuelle. A partir du mouvement de révolte, elle a conscience d'être collective, elle est l'aventure de tous... Dans l'épreuve quotidienne qui est la nôtre, la révolte joue le même rôle que le « cogito » dans l'ordre de la pensée : elle est la première évidence. Mais cette évidence tire l'individu de sa solitude. Elle est un lieu commun qui fonde sur tous les hommes la première valeur. Je me révolte, donc nous sommes (Camus, 1951, pp. 37-38).

Essa revolta coletiva é a revolta do doutor Rieux e seus colaboradores contra a peste no livro do mesmo título. O romance “A peste” (Camus, 1947) é uma alegoria do mundo moderno, a peste representa os flagelos da humanidade e o doutor Rieux, por não se resignar frente a esses flagelos, conquista a sua razão de ser, sua humanidade. As atividades do doutor Rieux e colaboradores são aquelas do homo faber e da ação e, sem procurar alguma posteridade ou ganhar uma vida eterna, elas permitem ao ser humano vencer coletivamente o absurdo deixando algum rastro num mundo imortal.

The task and potential greatness of mortals lie in their ability to produce things—works and deeds and words—which would deserve to be and, at least to a degree, are at home in everlastingness, so that through them mortals could find their place in a cosmos where everything is immortal except themselves (Arendt, 1998, p. 19).

Nessas leituras densas, o que queremos sobretudo destacar é a importância para o ser, das atividades relativas à compreensão e à edificação de um mundo compartilhável e durável. Pensamos que as atividades do homo faber e da ação são indispensáveis para **todas e todos** firmarem seu pertencimento ao mundo.

L'homo faber fonde son appartenance au monde et son appropriation du monde par la durabilité des objets produits et par la transformation de son environnement qui devient alors un monde habitable. La question de la temporalité est majeure pour plusieurs raisons. En effet, la durabilité des choses assure une certaine stabilité à l'existence humaine, de sorte que celle-ci est étrangère à l'animal laborans, dont la survie dépend de la force de son corps et de ses mains pour s'approvisionner. La vie de l'animal laborans est en soi précaire et dès lors aspire à l'abondance pour pallier son insécurité. Puis, la durabilité en tant qu'elle permet l'édification d'un monde, permet la conservation de la mémoire, cette catégorie étant aussi centrale dans le politique puisqu'il est essentiellement caractérisé non seulement par la mise en commun des paroles et des actes, mais en outre par le souvenir de ces paroles et de ces actes, soit le récit d'une histoire commune (Zafrani, 2016, p. 119).

Vemos aproximações de uma parte das atividades do homo faber e da ação com os processos de engenharia. Não nos referimos à engenharia meramente técnica, calculista, estritamente enquadrada por metodologias rigorosas. Consideramos uma visão de engenharia mais abrangente, que diz respeito ao processo de transformação de uma compreensão do mundo na elaboração de algum produto (instrumento, realização arquitetônica, ensaio, obra de arte, material didático, diagnóstico etc.) Encontramos essa visão, nitidamente humanista, em Baltar (1964) quando procura articular a dimensão técnica da engenharia com as demais dimensões da profissão de engenheiro. Segundo ele:

A técnica, no sentido de razão prática em ação para a utilidade do homem, sendo uma projeção da pessoa humana no plano da natureza, só adquire sentido coerente com a integridade pessoal se se harmoniza com os demais aspectos culturais do espírito. Daí subordinar-se (e nós engenheiros somos detentores dela, numa fração considerável) ao serviço do homem inteiro e de todos os homens, como portadores da cultura de que a técnica é apenas uma das linhas de ação, complementar da filosofia, da ciência e da arte no plano natural. A técnica adquire então sua dignidade própria ao integrar-se na realidade mais alta da cultura, para melhor servir ao objetivo histórico da ascensão universal a níveis de vida progressivamente mais humanos (Baltar, 1964, p. 4).

Essa visão é a contracorrente da evolução da nossa sociedade de massa e de consumo. De fato, nessa sociedade, o aumento da produtividade, sua consequência sobre a atomização e mecanização do trabalho, a busca incessante pela abundância, subordinada à produção e ao consumo, fazem que as atividades anônimas, burocratizadas, instrumentalizadas, automatizadas do animal laborans substituam aquelas da obra e da ação. Essa supervalorização do trabalho (labor) é consequência da supervalorização dos produtos em relação aos processos, da reprodução em relação à invenção, e da multiplicação e diversificação do que cada um de nós é induzido a considerar como necessidade “vital”. Nesse contexto, mesmo as e os que tem por função (profissão) o faber (engenheiros, pesquisadores, professores, por exemplo) ou a ação (políticos, entre outros), encontram-se enquadrados por critérios de produtividade. A respeito da função faber, Latour (2022, p. 60) comenta: «C'est aussi le cas des ingénieurs, des inventeurs, brisés dans leurs désirs d'innovation par les étroites contraintes de la production. Tous les métiers intellectuels et savants sont prêts à opposer leur rationalité à l'économie de la connaissance et à l'«évaluation rationnelle» de leur travail». Na mesma lógica produtivista, a respeito da ação (política), Zafrani (2016, p. 117) destaca que: «La vie politique elle-même n'est donc plus le lieu de l'exercice de la liberté et de l'égalité, mais est animée par des intérêts de classe, ou bien, prolonge la logique instrumentale à l'œuvre dans l'activité économique».

Sabemos que o caminho que a humanidade segue hoje é insustentável (em vários sentidos, como do ponto de vista ecológico e das relações humanas, entre muitos outros). Tirando algumas bolhas de resistência, a maior parte da humanidade, por impotência ou endoutrinamento, por ter substituído a angústia escatológica por cegueira ou ódio do outro, parece ter desistido de qualquer utopia:

Pour G. Anders (1956), alors que «jadis l'espoir eschatologique était toujours accompagné d'une angoisse apocalyptique», la croyance contemporaine dans le progrès induit à contrario un «calme plat eschatologique», une incapacité à envisager toute fin du fait même d'«une progression prétendument automatique de l'histoire» (Lelouch, 2014, p. 11).

Parece-nos que a utilização atual das tecnologias digitais e computacionais na perspectiva de melhorar a eficiência e a produtividade, favorece as divisões e subdivisões do

trabalho, a automatização das atividades e afastam o animal laborans do projeto no qual suas atividades estão inseridas, limitando a sua capacidade de julgar o sentido mais profundo dessas atividades, a capacidade de projetar, e o desresponsabiliza das consequências destas.

A confiança exagerada na técnica, no saber fazer, deixou o amanhã de mãos cheias de regulamentos, de projetos de ações, de estatutos, de bulas, de manuais de instruções. Com as mãos ocupadas com tantas prescrições, não foi possível agarrar os vapores das novas ideias (Souza, 2022, p. 93).

A confiança extrema na perfeição das máquinas leva o ser humano a transferir frequentemente essa responsabilidade para estas. O animal laborans, instrumentalizado, tem muito mais espaço, habilidades, para produzir do que para refletir sobre as consequências do que ele produz. Existe uma separação entre o “fazer” e o “sentir”, o “mal” torna-se banal, ele é um simples trabalho (Arendt, 1963). Nessa perspectiva, apertar um botão que joga uma bomba sobre um hospital é um trabalho como qualquer outro.

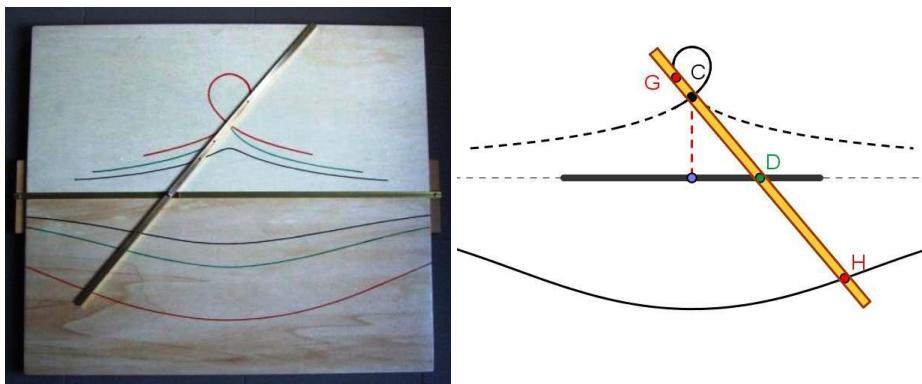
O domínio de ninguém é claramente o mais tirânico de todos, pois aí não há ninguém a quem se possa questionar para que responda pelo que está sendo feito. É este estado de coisas que torna impossíveis a localização da responsabilidade e a identificação do inimigo, que está entre as mais potentes causas da rebelde inquietude espraiada pelo mundo de hoje, da sua natureza caótica, bem como da sua perigosa tendência para escapar ao controle e agir desesperadamente (Souza, 2022, p. 92).

A escola também é submetida a uma lógica produtivista. Os conteúdos, as formas de ensinar são circunscritos por sistemas de avaliação (Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM, Sistema de Avaliação da Educação Básica - SAEB, Programme for International Student Assessment - PISA etc.) e o ensino frequentemente se assimila a um treinamento para adequar-se a padrões de questões que prefiguram, de certa forma, os padrões de comportamento esperados (exigidos) pela sociedade. A primazia do resultado sobre o processo para chegar nele é uma marca de muitas escolas hoje.

Ocorre inclusive que as tecnologias substituem os saberes que elas reificam. Encarregadas de operacionalizar com precisão os métodos e as técnicas, elas viram objetos de estudo no lugar desses métodos e técnicas. Não se aprende mais a calcular, aprende-se a utilizar uma calculadora, não se aprende mais a desenhar com régua e compasso, aprende-se a utilizar um software de geometria dinâmica, não se aprende mais a desenhar em perspectiva, aprende-se a utilizar um software de modelagem. Não se trata de questionar a necessidade ou não de tais aprendizagens, esse debate é antigo, ainda vivo e se renova sempre com a chegada de novas tecnologias.

Essa questão da relação entre tecnologias e construção dos conhecimentos é tão antiga que ela já estava presente quando se considerava a régua e o compasso como os únicos instrumentos possíveis para explorar a geometria euclidiana na escola platônica. Soluções que empregam outros instrumentos (nova tecnologia) como a régua (também chamada de compasso) de Nicomedes (figura 1) que permitia traçar uma concóide para realizar a trissecção do ângulo, não eram consideradas como aceitáveis para a teoria euclidiana.

Figura 1



<https://www.macchinematiche.org/mm/curve-piane/curve-di-quarto-ordine/concoide-di-nicomede.html>

Aprender a utilizar as tecnologias, quaisquer que sejam, não garante a aprendizagem dos conhecimentos que elas reificam. A exemplo do desenho geométrico, o domínio dos algoritmos de manipulação da régua e do compasso para traçar figuras não garante a compreensão das propriedades geométricas envolvidas nas figuras traçadas. Na escola, pelo menos, as tecnologias devem ser consideradas como meio e não como fim. Como meio, à imagem do nosso próprio corpo, elas têm seus aportes como seus limites, aportes para explorar e compreender o mundo, limites para identificar os contornos dessa compreensão, e instigar à exploração e/ou à criação de outros meios para modificar esses contornos através de novas instrumentalizações ou novas tecnologias.

Sem rejeitar as tecnologias digitais e computacionais, a escola deveria ser um espaço para as atividades de uma condição efetivamente humana e preparar as e os aprendizes para não serem afastadas e afastados do mundo real e engolidas e engolidos por um universo instrumental. Nesse sentido, é importante pensar em projetos educativos que não se limitem a preparar, adestrar, os alunos a serem executantes, animal laborans, e incorporem uma dimensão pluridisciplinar, criativa e coletiva. No contexto mais específico da concepção e integração de tecnologias computacionais para o ensino-aprendizagem, pretendemos destacar nessas

reflexões dois aspectos: a importância dos processos de elaboração e não apenas os produtos elaborados; e a interrelação entre as dimensões individual e coletiva da vida social.

Os processos de elaboração são essenciais para o desenvolvimento de uma compreensão do mundo, para a construção de um mundo compartilhado permanente (não consumível, não destinado à obsolescência). Onde e como intervém as tecnologias computacionais nesses processos de elaboração? Se elas tomam conta, confiscam, o processo, qual compreensão do mundo, qual mundo compartilhado, são construídos? Por exemplo, a arte reduzida a um produto “comercial”, ignora a própria arte, a artis, a *tekhnè*, o processo criativo de transformação de uma intuição numa realização. Ela ignora o fato que o espírito artístico, a criatividade, é provavelmente da própria natureza humana⁷, e, sobretudo, que o processo criativo, envolvendo o corpo e a mente, participa da compreensão do mundo e da expressão da singularidade do ser. Num contexto no qual o que importa é o produto, qual é a diferença entre uma obra produzida por um ser humano e um obra produzida por uma inteligência artificial? Provavelmente, a produção da inteligência artificial será mais precisamente executada que aquela do ser humano. Entretanto, acreditamos que seremos mais tocados, admirativos, instigados frente à obra, à janela sobre o corpo-e-alma, do ser humano, assim como o artista terá aprendido muito mais sobre o mundo na colaboração entre seu corpo e sua alma, na elaboração e realização da obra.

Não se trata por isso de rejeitar o uso das tecnologias digitais nos processos. Pelo contrário, elas podem enriquecer, considerando inclusive os aportes da IA, os processos na perspectiva instrumental, desde que não retirem do ser, do aprendiz, do usuário, o domínio desses processos, os quais podem (e muitas vezes devem) envolver outros artefatos, inclusive analógicos.

Quanto à interrelação entre individual e coletivo, destacamos a importância da partilha, da confrontação das singularidades e da construção coletiva desse mundo compartilhado. Qual é o papel das tecnologias nessas confrontações, nessa construção coletiva de um mundo compartilhado? As redes sociais, nas quais pensamos logo quando falamos de tecnologia e coletivo, não parecem ajudar muito nesse sentido. Pelo contrário, elas favorecem uma dissolução dos espaços privados e públicos nos quais as utopias individuais e coletivas são construídas. O equívoco vem de que as redes sociais não são redes públicas. A organização social, pela dissolução dos espaços privados e públicos, favorece o conformismo e a

⁷ É difícil saber o que é a natureza humana, pelo menos o que temos de específico em relação aos outros animais, mas, no mínimo podemos considerar que uma grande parte do nosso patrimônio inato é justamente aquele modelado ao longo dos tempos pela condição humana e a vida social.

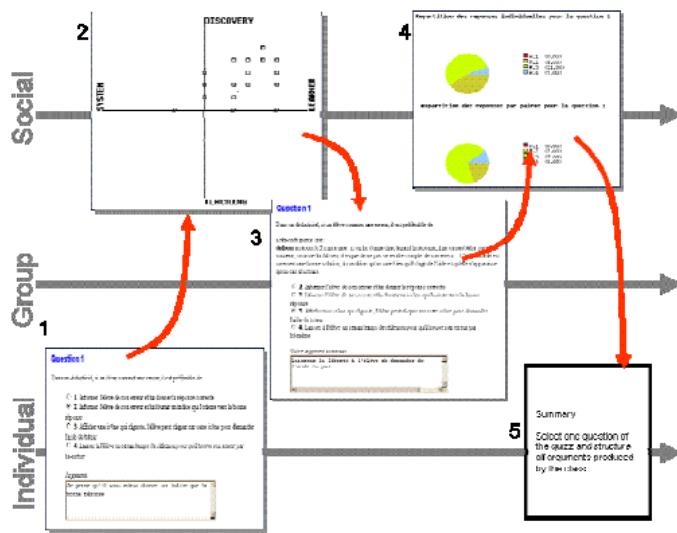
substituição da política pela “natural strength of one common interest and one unanimous opinion” (Arendt, 1998, p.40). Com essa dissolução e essa substituição, desaparecem as singularidades e os espaços de troca e intersubjetividade. As redes sociais reforçam essa tendência.

Whether a nation consists of equals or non-equals is of no great importance in this respect, for society always demands that its members act as though they were members of one enormous family which has only one opinion and one interest... It is decisive that society, on all its levels, excludes the possibility of action, which formerly was excluded from the household. Instead, society expects from each of its members a certain kind of behaviour, imposing innumerable and various rules, all of which tend to “normalize” its members, to make them behave, to exclude spontaneous action or outstanding achievement (Arendt, 1998, p.39-40).

Novamente, desconsiderar os aportes das redes de computadores para aproximar sujeitos distantes não faz sentido. Entretanto, precisamos repensar como realizar essa aproximação, e as redes sociais podem não apresentar a melhor proposta. Defendemos a importância de respeitar os espaços privados e públicos: o espaço privado como espaço de compreensão do mundo pelo sujeito, e o espaço público como espaço de partilha, intersubjetividade e articulação das singularidades na construção de um mundo compartilhado.

Nesse contexto, numa experimentação com uma versão do Tabulae colaborativo (Guimarães; Moraes, 2008) no qual vários sujeitos distantes podiam colaborar na construção de uma mesma figura geométrica compartilhada, alguns estudantes expressaram uma necessidade de afastar a região da tela onde acontecia a construção coletiva para poder construir, explorar uma versão “privada” da figura antes de voltar para a construção coletiva (Bellemain, 2014). Na mesma perspectiva, Tchounikine e Dillenbourg (2007) (figura 2), para favorecer a colaboração entre sujeitos, exploram o script “Arguegraph script” (Jermann; Dillenbourg, 2003) baseado numa sequência de atividades relativas ao estudo de algum conteúdo organizada em fases individual (privada), de pequenos grupos e coletiva (pública).

Figura 2: The ArgueGraph script: time is represented horizontally and social plane vertically; arrows represent the dataflow between activities.



Tchounikine e Dillenbourg, 2007, p. 2

Essa discussão evidencia a importância, para a condição humana, e consequentemente para a escola, do respeito de espaços privados e públicos como espaços de construção pessoal e coletiva de um mundo compartilhado. Destacamos também nessa construção, a importância dos processos, tanto individuais como coletivos, como meios de conhecer e de dar sentido à vida e não apenas ou sobretudo dos produtos. Além disso, em oposição à utilização atualmente hegemônica, das tecnologias computacionais focadas na produção, sugerimos pistas de uma outra utilização como suporte aos processos ainda nitidamente situados nas mãos do ser humano. Propomos agora de discutir qual ser humano a imersão num universo instrumental está moldando.

3. Comportamentos e relação com o mundo

Além das consequências da utilização das tecnologias nas atividades da vida activa, destacam-se outros efeitos dessa utilização sobre percepções e comportamentos humanos. Um dos primeiros a sinalizar os perigos para a condição humana da hegemonia de um universo instrumental foi Gunther Anders (1956-2002)⁸. Mesmo se o texto é antigo, não se trata de um texto consumível, pois traz reflexões importantes que estão sendo retomadas por vários autores contemporâneos (Berardi, 2019; Besnier, 2009). O texto, por sua virulência, é perturbador, e demorou para ser traduzido do alemão provavelmente pelas críticas feitas ao desenvolvimento

⁸ O texto "Die Antiquiertheit des Menschen. Über die Seele im Zeitalter der zweiten industriellen Revolution" foi publicado em 1956 em alemão. Em 2002, o texto foi traduzido e publicado em francês.

desenfreado desse universo instrumental, mas é precursor de reflexões atuais, sobre vários pontos. Ele desenvolve seu raciocínio em torno de três questões centrais: a vergonha prometeica, a transformação da nossa relação com o mundo sob o efeito dos instrumentos, das mídias (e da virtualização do mundo), e a cegueira e apatia frente à destruição tecnológica do mundo natural, incluindo sua fauna humana.

A vergonha prometeica diz respeito à vergonha que o ser humano tem de si mesmo, das suas limitações e imperfeições frente aos instrumentos: *Du point de vue des instruments, le corps de l'homme est un “boulet”, imperfectible, rigide et conservateur* (Lelouche, 2014, p. 3). Considerando as capacidades de cálculo das máquinas, essa vergonha não se limita hoje ao corpo, como destaca Lelouche, estende-se também à mente. Em consequência, desenvolve-se no ser humano uma confiança maior nos instrumentos que em si mesmo, uma forma de submissão ao controle das máquinas. A rejeição ou ofuscação das nossas características humanas, animais, naturais, levam a mudar nossa relação com o mundo real, a nosso afastamento da natureza, este mundo sendo considerado somente como uma mina de recursos exploráveis⁹.

Une humanité en voie de soumission totale à l'univers instrumental : le vrai monde, enfin achevé, ne pouvait être qu'un monde produit. Le monde réel réduit à une matière première, ne pouvait avoir de valeur et de dignité que dans l'unique mesure où il était exploitable et reproductible en série (Lelouche, 2014, p. 2).

Para compensar esse complexo de inferioridade, o ser humano procura se aliar às máquinas, negociando a adequação das suas características através da adaptação dos instrumentos ou adaptando seu corpo e sua mente, sonhando em se transformar num ser híbrido, parte humano, parte máquina. Ele também encontra outra saída, vestindo-se de avatar para mergulhar no universo instrumental. *Le grand public s'habitue à ce qu'on lui prédise un avenir où l'homme pourra expier ses faiblesses et se trouver remodelé sinon « augmenté »* (Besnier, 2009, p. 9). Essas estratégias opõem, ao absurdo do divórcio do ser humano com o mundo (Camus, 1942), uma ideologia “tecnológica” pela qual o absurdo desaparece pela substituição do mundo natural por um universo instrumental no qual o ser híbrido é imortal.

Certains visionnaires subjugués par les promesses d'une intelligence artificielle annoncent pour bientôt la relève de cette humanité par des êtres d'un genre nouveau, héritiers des cyborgs que nous sommes déjà en passe de devenir, grâce aux prothèses électroniques et à notre indéracinable ambition d'en finir avec la naissance, la maladie et la mort. (Besnier, 2009, p. 9)

⁹ Certas religiões já rejeitavam o corpo por sua imperfeição, por sua “tendência animal ao pecado” e sua degradabilidade, e a vergonha prometeica traz mais razões para essa rejeição.

Uma humanidade híbrida povoada de seres humanos, ciborgues e clones, alguns dotados de uma inteligência não biológica não é tão irrealista quanto povoar o planeta Marte, nem é tão distante no tempo. Mesmo se ainda não chegamos nesse cenário, as questões relativas à ética, aos valores morais, à intersubjetividade, ... dessa humanidade já estão postas hoje no nosso mundo em transformação tecnológica acelerada.

O afastamento do ser humano do mundo real de hoje, favorecido pelas tecnologias, leva a uma desafeição de si, assim como a um colapso da subjetividade, já abalada pela sociedade de massa como foi destacado acima. O afastamento do mundo real e a nossa emancipação, graças às tecnologias, das servidões ligadas à condição humana, ao contrário do que desejávamos, nos priva da liberdade de compreender esse mundo:

Ironie de la modernité, issue du siècle des Lumières et de son culte des savoirs : ce qui fut présenté jadis comme le moyen de l'autonomie des hommes apparaît aujourd'hui comme une puissance autonome, dont ils doivent s'accommoder et qui leur dictera toujours davantage les règles de leur bien-vivre (Besnier, 2009, p. 15).

Nossa subjetividade se desenvolve na nossa relação, e notadamente a relação do nosso corpo com suas qualidades, seus sentidos e suas limitações, com o mundo. As interfaces e os filtros da mediação tecnológica, por um lado, potencializam nossas capacidades de fazer e receber, mas por outro, limitam, filtram nossas possibilidades de sentir e de conhecer. Com efeito, para conhecer é preciso articular as diversas sensações recebidas pelo corpo. Com o colapso da subjetividade e a diminuição das nossas possibilidades de sentir, as manifestações subjetivas: afeições, emoções, criatividade... também ficam recaladas.

Nossa percepção do tempo, pela aceleração tecnológica, por sua vez, encontra-se afetada. Para conhecer, compreender, precisamos articular as sensações e para articular as sensações, é necessário ter tempo, o tempo biológico.

O cibertempo, ou seja, a capacidade de elaboração mental do tempo, não é de forma alguma ilimitado. Seus limites são aqueles da mente humana, e são limites orgânicos, emocionais, culturais. No tempo do cruzamento e de tensão entre a expansão do ciberespaço e os limites do cibertempo estão em jogo a sensibilidade, a empatia e a própria ética (Berardi, 2019, p. 20).

Com subjetividade limitada, padronizada, com uma sensibilidade reduzida, a intersubjetividade, a integração da pluralidade e a construção de um mundo compartilhado são prejudicadas.

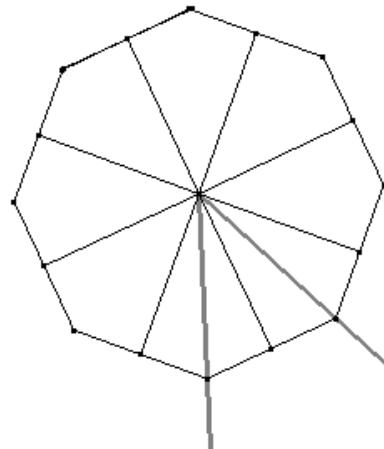
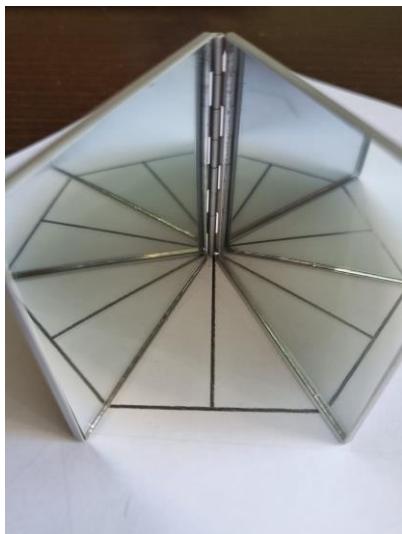
A sensibilidade é a capacidade de interpretar signos não verbais, graças à capacidade de interpretação que provém do fluxo empático. Essa capacidade, que permitia à raça humana compreender mensagens ambíguas no contexto da relação, está certamente arrefecendo e, talvez, desaparecendo. Submetida à aceleração infinita do infoestímulo,

a mente reage na forma de pânico ou de dessensibilização. Parece que está se constituindo uma geração de humanos cuja competência sensorial é reduzida. A habilidade de compreender empaticamente o outro, de interpretar sinais que não tenham sido codificados segundo um código de tipo binário, torna-se cada vez mais rara, cada vez mais frágil e incerta (Berardi, 2019, p. 20).

Frente à tentativa de negação do absurdo pela ideologia tecnológica, seguimos Camus, com sua revolta. Por analogia, contra a ideologia tecnológica limitadora de liberdades, defendemos ultrapassar esse absurdo por meios humanos: “pensar é reprender a ver, em ser atento” (Camus, 1942, p. 45). Mais uma vez, não se trata de excluir os instrumentos tecnológicos dos meios humanos para conhecer, desde que enriqueçam, e não substituam, as possibilidades de captar sensações. Por exemplo, na perspectiva da inclusão plena na vida em sociedade, de pessoas com necessidades específicas, os aportes dos instrumentos tecnológicos são importantes. Tais instrumentos enriquecem as possibilidades de captar sensações, sobretudo para os que tem limitações físicas para essas captações.

Como ilustração dos aportes de atividades híbridas: analógicas e digitais, numa atividade sobre ladrilhamento do plano com polígonos regulares, uma primeira exploração pode ser feita com dois espelhos formando um ângulo e refletindo um segmento. Dependendo do ângulo entre os espelhos e da posição destes, pode-se observar a formação de polígonos regulares. Mesmo se a construção da figura que representa o fenômeno reflexivo num software de geometria dinâmica (figura 3b) pode mostrar uma parte maior e dinâmica, do ladrilhamento construído, a experimentação concreta com espelhos físicos (figura 3a) ajuda à compreensão do fenômeno pelos alunos.

Figura 3: fenômeno reflexivo num software de geometria dinâmica



a- Polígono regular formado por reflexão num par de espelhos

b- Polígono regular formado por reflexão em torno de dois segmentos com um vértice em comum num software de geometria dinâmica

Na mesma ideia, propomos no nosso grupo de pesquisa “Atelier digit²@s”, a concepção de jogos digitais – com um neologismo que expressa a intenção de articular versões digitais e físicas de jogos educativos. É notadamente o caso de jogos de origem africana (mankala) (figura 4) baseados no princípio de “colher e semear”. Mesmo se a versão computadorizada do jogo tem aportes significativos para trabalhar as noções matemáticas envolvidas, seria uma grande perda para a compreensão dessas noções de eliminar o papel da mão colhendo e semeando as sementes nas covas.

Figura 4: Jogo Mankala Awele



A segunda questão levantada por Gunther Anders que nos interessa neste texto é relativa à massificação do acesso à informação pelas mídias (radiofônicas e televisuais na época do filósofo, e web hoje) e às consequências sobre a produção do homem-massa, através notadamente da despersonalização do ser humano. De fato, ele já denunciava, antes de Noam

Chomsky, como, sob o pretexto do acesso à informação e da liberdade, as mídias nos condicionavam em consentir com o sistema, sobretudo econômico, instalado.

Les techniques médiatiques, sous les apparences les plus indolores et sous le couvert d'une rhétorique libératrice, participent de la dissolution de l'homme, de sa dépersonnalisation, de l'effacement de son rapport au monde et de la disparition du monde lui-même.... Des millions d'hommes séparés ingurgitent une nourriture sonore et imaginaire identique, subissant une dépersonnalisation d'autant plus profonde qu'imperceptible et noyée sous l'apparence de la liberté de la personne et des droits de l'individu (Lelouche, 2014, p. 7).

Pelas mídias, um mundo fantasmagórico, fictício, frequentemente configurado para manipular fatos e verdades, entra nas nossas casas, invadindo, dominando e dissolvendo o espaço privado. Esse mundo familiarizado substitui o mundo real com o qual não existe mais relação viva e recíproca, ele é simplesmente entregue. Le monde (fictif) a été transféré de l'extérieur à l'intérieur : il a désormais trouvé sa place dans mon salon en tant qu'image à consommer. Le monde est désormais mien. A quoi bon faire l'expérience du monde (réel), aller vers lui ? (Lelouche, 2014, p. 7) Não se trata aqui de discutir o emprego estratégico das mídias, e de forma geral, dos meios de comunicação, pelas corporações supranacionais e instituições financeiras, para a doutrinação e a produção do homem-massa. As leituras de Schopenhauer (2003) a respeito das relações intersubjetivas ou Chomsky (2011) a respeito das mídias são suficientemente edificantes (e “deprimentes”). O que podemos simplesmente destacar é que, para participar do desenvolvimento da subjetividade dos estudantes, a escola deve levar, com um possível apoio tecnológico, o aprendiz a experimentar, compreender o mundo real, e compartilhar, confrontar essa compreensão.

Além da questão da doutrinação, as mídias também favorecem uma homogeneização da cultura em direção à cultura dos que dominam as tecnologias de comunicação. Alguns criticam essa visão e falam de heterogeneização cultural, ou seja, da emergência de uma cultura, mistura das culturais locais com as culturas vindas de fora. Existe um debate a respeito dessa tensão entre homogeneidade e heterogeneização cultural, não vamos abordá-lo nesse texto. Entretanto, mesmo se a heterogeneização cultural existe efetivamente e tem uma produção significativa, sobretudo num país como o Brasil que tem uma grande diversidade de culturas, acreditamos que a homogeneização cultural não é somente consequência das desigualdades no acesso aos meios de divulgação, ela é um projeto de mercantilização e dominação cultural.

Refiro-me, aqui, por exemplo, a certa indústria cultural ativada com estratégia de poder, de universalização do gosto, de anestesiamento da diferença, já que o mercado unificado facilita o preenchimento das planilhas de contabilidade do consumo (Souza, 2022, p. 86).

De fato, as mídias como as tecnologias digitais têm uma forte influência, e padronização, tanto sobre a cultura produzida como sobre a consumida, e mais especificamente, sobre os processos de produção e de divulgação da cultura. Trata-se de uma influência pela própria concepção das tecnologias. Por exemplo, desenhar, modelar com software algum edifício, alguma obra, sempre se apoia nos mesmos softwares concebidos e desenvolvidos no hemisfério norte, com as mesmas bibliotecas de ferramentas, e levando finalmente a produções semelhantes. Trata-se também de uma influência pela concepção, o entendimento, do que é cultura no que está sendo divulgado. As artes fornecem um exemplo típico de diversidade geográfica de sensibilidade estética e de reações cognitivas provocadas, quando as mídias na perspectiva da arte-produto procuram impor às artes uma estética universal e um controle da revolta que ela pode expressar.

Acredito que o desejo de ver a arte de outras culturas esteticamente nos diz mais sobre nossa própria ideologia e sua veneração quase religiosa de objetos de arte como talismãs estéticos, do que diz sobre estas outras culturas (Gell, 1998, p. 3).

Essa homogeneização ofusca a diversidade das culturas, particularmente das culturas locais, das culturas dos povos originários, e substitui as raízes dos seres humanos por imagens, padrões e preconceitos, filtrados e transmitidos pelas mídias.

Aqui podemos pensar na tensão entre as **imagens necessárias** que dão aos sujeitos um sentido de história, uma herança compartilhada, um território comum de esquecimentos e desejos, de sonhos compartilhados que produzem coletivos potentes e **imagens aleatórias**, vindas de qualquer lugar e que se impõem pela força erótica e retórica da máquina de convencimento, produzindo novos coletivos com fronteiras curiosas entre os que tem e os que não tem acesso a tais privilégios (Souza, 2022, p. 81-82, grifo do autor).

Lagrou (2009) defende a importância da diversidade artística relativamente à construção da subjetividade do ser e da intersubjetividade.

... é importante frisar que toda sociedade produz um estilo de ser que vem acompanhado de um estilo de gostar, e pelo fato de o ser humano se realizar enquanto ser social através de objetos, imagens, palavras e gestos, os mesmos se tornam vetores da sua ação e pensamento sobre seu mundo (Lagrou, 2009, p. 11).

Na mesma linha, Gell (1998) defende a ideia de que os objetos artísticos são agentes de relação social. Encontramos nessas defesas da diversidade artística e sua variedade de expressões artísticas, vetores para as atividades do homo faber e da ação destacadas por Arendt. Como ilustração, podemos destacar duas particularidades da arte indígena brasileira, além do fato que esses povos originários não partilham a nossa noção europeizada de arte:

- A grande diferença reside na inexistência entre os povos indígenas de uma distinção entre artefato e arte, ou seja, entre objetos produzidos para serem usados e outros para serem somente contemplados...
- A inexistência da figura do artista enquanto indivíduo criador – cujo compromisso com a invenção do novo é maior que sua vontade de dar continuidade a uma tradição ou estilo artístico considerado ancestral (Lagrou, 2009, p. 14).

Particularidades que mostram uma oposição entre:

- uma arte pela arte cercada pelo circunscritores por meio dos quais se quer caracterizar o que é arte ou o que não é arte, na perspectiva de uma definição de arte-produto, a arte divorciada do seu público, não pode ser superada e resultou, segundo Levi-schuster, num academicismo de linguagens: cada artista inventando seus próprios estilos e linguagens ininteligíveis (Lagrou, 2009, p. 15).
- uma arte significativa e social, cuja beleza não vem somente da sua contemplação, mas também da sua utilidade e seu papel na intersubjetividade.

Essa discussão rápida evidencia a dimensão social das artes dos povos originários brasileiros e destaca a importância de, ainda decolonizar¹⁰ os conteúdos, os métodos e as tecnologias, notadamente através das artes e ofícios para efetivamente poder falar de heterogeneização cultural. Souza (2022), seguindo Lacan, propõe a distinção metafórica entre fronteira e litoral entre culturas para justamente insistir sobre a importância de reconhecer a heterogeneidade das culturas, ponto de partida da heterogeneização cultural.

Lacan propõe o termo litoral para marcar a radicalidade de um encontro de heterogêneos já que se trata de duas superfícies distintas: mar e terra.... Encontrar, portanto, alguns litorais implica uma radicalidade de identificação de limites fundamentais para sabermos qual o ponto de partida que permite um contato efetivo com o outro, com a alteridade, com o estrangeiro. O litoral nos esclarece sobre a borda de nosso saber, de nossa história, de nossas fantasias, e ousaria dizer, de nossas utopias possíveis. O litoral resguardaria, assim, uma singularidade que faz margem, construindo novas **imargens** (Souza, 2022, p. 88, grifo do autor).

No contexto mais específico da concepção e integração de tecnologias computacionais para o ensino-aprendizagem, pretendemos destacar nas reflexões dessa segunda parte dois aspectos:

- a importância de dar acesso a múltiplos estímulos e não somente àqueles vindos das tecnologias digitais, e favorecer a articulação entre as sensações provocadas. Isso inclui a exploração, na matemática, de múltiplas representações, utilizadas na comunidade matemática ou especificamente criadas, e de múltiplos artefatos, físicos ou digitais, disponíveis ou criados,

¹⁰ Trata-se de ir além da independência do colonizador, ou seja, de procurar também a independência dos rastros que a colonização deixou.

em função das situações de uso. Além da importância da colaboração do corpo, dos sentidos e do espírito para a construção dos conhecimentos e da compreensão do mundo, essa colaboração é também um vetor para a inclusão aumentando o leque de possibilidades de captar informações. Nesse contexto, pensamos nas nossas próprias mãos, confinadas à execução de simples tarefas manuais, como artefatos extraordinários de captação de informações (peso, temperatura, textura, forma etc.).

La possession du monde exige une sorte de flair tactile. La vue glisse le long de l'univers. La main sait que l'objet est habité par le poids, qu'il est lisse ou rugueux, qu'il n'est pas soudé au fond de ciel ou de terre avec lequel il semble faire corps. L'action de la main définit le creux de l'espace et le plein des choses qui l'occupent. Surface, volume, densité, pesanteur ne sont pas des phénomènes optiques. C'est entre les doigts, c'est au creux des paumes que l'homme les connaît d'abord. L'espace, il le mesure, non du regard, mais de sa main et de son pas. Le toucher emplit la nature de forces mystérieuses. Sans lui elle restait pareil aux délicieux paysages de la chambre noire, légers, plats et chimériques (Focillon, 1934, p. 9-10).

– a importância de manter uma interlocução importante com a cultura e as raízes originárias, locais. Trata-se de um acesso aos produtos culturais locais, mas sobretudo, de adentrar nas razões de ser, nas formas e meios de produção dessa cultura. Não queremos defender algum tipo de conservadorismo, nem tampouco uma oposição fechada à modernidade. Nossa perspectiva é epistemológica, é de compreender o mundo tal como foi, localmente e coletivamente, construído e compartilhado. A modernidade não tem dono, a arte moderna não é mais moderna que a arte dos povos originários. A modernidade é muito mais a heterogeneização cultural que nasce do reconhecimento dos heterogêneos, do que a homogeneização da pilhagem secular e sistemática, mas sem futuro, de recursos, artefatos e demais obras. Para dar suporte à heterogeneização cultural, as tecnologias digitais devem incorporar e veicular as formas e meios de produção da cultura local.

4. Projeto de tecnologias computacionais para o ensino

Da discussão anterior, tiramos vários pontos que consideramos importantes para projetos de concepção e desenvolvimento de tecnologias para o ensino. Entretanto, mesmo se o estudo dos textos discutidos aqui é bem mais recente que vários projetos de concepção de software e plataformas que desenvolvemos¹¹, alguns desses pontos, formulados em outros termos, sempre estiveram presentes nesses projetos. Acreditamos que essa presença vem de termos sempre utilizado, como apoio teórico-metodológico, a didática da matemática e as interfaces pessoa-sistema, e mais precisamente o que é relativo, nessas interfaces, às

¹¹ Cabri-géomètre (Baulac et al., 1988), Cabri II (Bellemain; Laborde, 1994), Cabri II plus (Laborde; Bellemain, 2001)

representações e aos instrumentos. De fato, mesmo com olhares diferentes, por terem o ser humano e suas atividades como centro de estudo, existiam elementos de convergências entre a antropologia filosófica fundamentando os textos utilizados acima, a didática e as ciências cognitivas quando iniciamos a concepção, realização e experimentação de Cabri-géomètre (Bellemain, 1992). Finalmente, esses elementos de convergência encontram-se formalizados hoje, com outros, na teoria antropológica do didático.

Em poucas palavras, as questões importantes nas quais focamos que a didática da matemática aborda, dizem respeito:

- a importância das questões epistemológicas relativas aos saberes: tentar compreender como os saberes foram e estão sendo construídos, como eles funcionam, e como auxiliam a compreensão do mundo e sua evolução. Essas questões epistemológicas fundamentam a mediatação dos objetos matemáticos no âmbito computacional através da transposição didático-informática (Bellemain, 2022).
- a importância da atividade do aprendiz, notadamente na resolução de problema, para a construção dos conhecimentos, ou seja, a importância dos processos antes dos produtos para essa construção. O conjunto de problemas relativos a um saber que se pretende abordar guia a especificação das funcionalidades a serem concebidas. Trata-se ainda de uma questão que diz respeito à transposição didático-informática.
- a importância do papel do professor como organizador do meio e como guia na interação do aprendiz com esse meio (na exploração do mundo), assim como mediador na partilha dessa experiência. Na perspectiva das tecnologias digitais, essa questão leva a conceber os suportes computacionais ao planejamento, à orquestração e avaliação das atividades dos aprendizes.

A respeito das ciências cognitivas, focamos nas questões relativas às representações, suas apreensões, manipulações e articulações (Duval, 1993), ou seja, o papel das representações no processo de abstração e/ou reificação, e na construção da subjetividade. E focamos nas questões relativas aos artefatos e à gênese instrumental (Rabardel, 1995) como via de enriquecer a percepção, de interagir com os objetos e o mundo compartilhado. Essas reflexões levam a especificar meios de interação do aprendiz com os objetos matemáticos representados no âmbito computacional.

Essas questões norteadoras sempre nos levaram a focar na concepção, desenvolvimento e integração de artefatos (micromundo, simulações¹², jogos de simulação¹³ etc.) passíveis de enriquecer, com o apoio de ferramentas e representações dinâmicas, as possibilidades de exploração dos objetos matemáticos através da resolução de problemas. Sem entrar em detalhes na caracterização do que é um micromundo, pois já existe uma extensa literatura a respeito¹⁴, destacamos que esse tipo de artefato disponibiliza ferramentas com diversas interfaces para construir, manipular e operar sobre objetos e estabelecer relações entre esses objetos. A caixa de ferramentas disponíveis é evolutiva, podendo ser reduzida ou ampliada em função das situações de uso, e da evolução dos conhecimentos do aprendiz. As interfaces de manipulação podem também ser adaptadas, expandindo o leque de ações do sujeito, assim como enriquecendo as possibilidades de interpretação e retroação do micromundo a essas ações. Nesse contexto, as interfaces de manipulação direta (Shneiderman, 1987), mesmo se ainda são tecnicamente limitadas relativamente às sensações que podem produzir, permitem uma ação quase física da mão na construção e manipulação dos objetos virtuais e a produção das retroações e sensações relativas a essas ações. É importante destacar que uma parte significativa da nossa memória e dos nossos conhecimentos, é corporal, quer ela seja construída ao longo da vida ou recebida como patrimônio da evolução humana. As interfaces de manipulação direta permitem um pouco que essa memória e esses conhecimentos corporais se manifestem no ambiente computacional.

Nossa escolha de conceber micromundos, suportes computacionais a atividades matemáticas, explora a importância comum dada, na vita activa (Arendt, 1998) como na didática da matemática, aos processos para a construção dos conhecimentos e a compreensão do mundo. Ainda nos referindo à discussão sobre a influência das tecnologias digitais sobre a condição humana e a nossa relação com o mundo, queremos sublinhar que o uso recorrente no texto da expressão “suportes computacionais a atividades” procura insistir sobre o fato que nossos projetos visam a conceber e desenvolver artefatos, micromundos, que deverão intervir, dando suporte, como elemento do meio didático e não procurando ser o próprio meio. Ou seja, coerente com nossa posição de evitar a obsessão tecnológica, reconhecendo aportes e limites das tecnologias computacionais, procuramos conceber artefatos a serem articulados com outros recursos, digitais ou físicos.

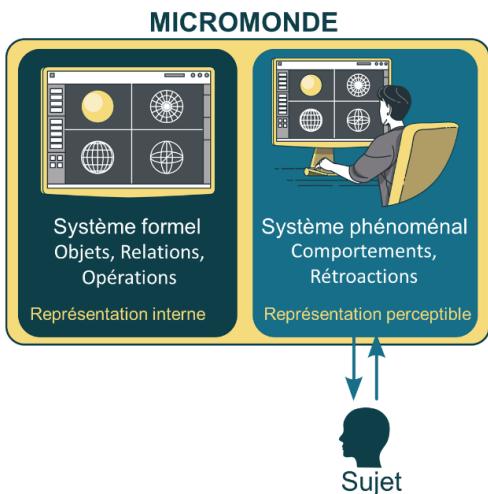
¹² Bellemain *et al.*, 2006

¹³ Lima, 2023; Santos, 2023

¹⁴ Algumas sugestões de leituras sobre esse tema: Papert, 1980; Thompson, 1987; Laborde; Laborde, 1991; Bellemain, 1992 ; Balacheff, 1994a ; Bellemain, 2002 ; Bellemain, 2022.

Para facilitar a concepção e desenvolvimento de micromundos que visam dar suporte à realização de atividades matemáticas no ambiente computacional, concebemos uma arquitetura (Bellemain, 2023) baseada na definição de micromundo de Balacheff (1994a) e fundamentada na TRRS¹⁵ de Duval (1993) (figura 5).

Figura 5



On peut caractériser un micromonde par l'articulation d'un système formel et d'un domaine de phénoménologie :

- le système formel est constitué d'objets primitifs, d'opérateurs élémentaires et de règles exprimant comment peuvent être manipulés objets et opérateurs ;

- le domaine de phénoménologie détermine le type de feedback que le micromonde peut produire comme conséquence des décisions et des actions de l'utilisateur. (Balacheff, 1994a, p.33)

Bellemain, 2022, p. 86

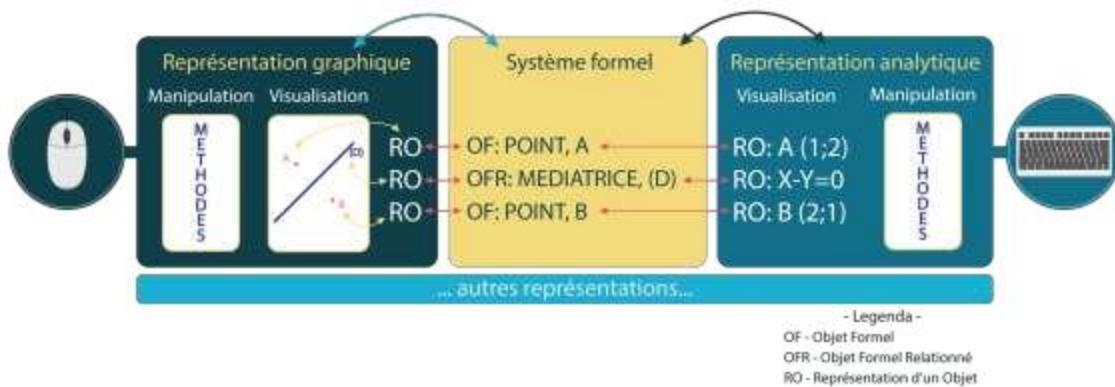
Essa arquitetura (figura 6) fornece uma estrutura de software que nos dá suporte à realização de vários micromundos¹⁶ para a exploração de diversos conteúdos de matemática (área e perímetro, geometria euclidiana e projetiva, funções) e de artes visuais (ladrilhamento, anamorfose, fractal e gramática da forma).

Para a concepção de um micromundo relativo a um conteúdo específico, essa estrutura precisa ser preenchida: especificar as representações internas e nas interfaces dos objetos, especificar as interfaces de construção, modificação, manipulação etc. dos objetos.

¹⁵ Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

¹⁶ Atelier Magnitude, Atelier Função, Atelier Geometria, Jogo do Nim

Figura 6



Bellemain, 2023, p. 16

Esse preenchimento exige a articulação entre conhecimentos de vários domínios como a matemática, a didática da matemática, a psicologia cognitiva, a antropologia, o design, a HMI¹⁷, a computação etc. A articulação entre as disciplinas envolvidas é necessária por se tratar de uma concepção de natureza transdisciplinar, ancorada no pressuposto que a simples justaposição das competências não é suficiente.

La “conception d’um EIAH” peut être abordée comme un travail de construction d’un environnement informatique dont les propriétés créent une situation pédagogique et/ou suggèrent aux apprenants des conceptualisations qui sont spécifiques du milieu créé. Il n’est pas possible alors de séparer la conceptualisation de l’environnement (enjeux pédagogiques, notions et concepts, modélisations) et la compréhension des phénomènes liés à la dimension informatique. La conception d’un EIAH n’est pas alors un simple travail de réalisation informatique d’une spécification produite par les SHS¹⁸, elle ne peut s’appréhender au niveau d’une seule discipline ni se découper simplement en problèmes pouvant se résoudre au sein d’une discipline, ce qui caractérise un travail intrinsèquement transdisciplinaire (Tchounikine, 2004, p. 5).

Em outros termos, fazendo uma analogia com as atividades da vita activa de Arendt (1998), a criação de um software ou plataforma educativa inscreve-se na obra e na ação, e exige a comunicação e a intersubjetividade entre as diversas compreensões subjetivas/disciplinares envolvidas.

Na história da informática educativa, essa articulação¹⁹ entre vários domínios para a concepção e desenvolvimento de softwares educativos era feita “naturalmente” por professores, pesquisadores e engenheiros que já tinham competências múltiplas (Bellemain, 2022). Com o crescimento da complexidade dos sistemas, dos softwares e das exigências relativas ao suporte

¹⁷ Human-machine interface

¹⁸ Sciences Humaines et Sociales

¹⁹ Se considerarmos a pré-história da informática educativa (o ensino programado), essa articulação consistia essencialmente em uma homogeneização tecnológica da cognição (behaviorismo).

às atividades que se espera deles, não temos mais como realizá-los de forma individual ou em pequenas equipes. No máximo se consegue protótipos focados em poucas ferramentas para experimentações. Esse cenário exige a constituição de equipes multidisciplinares maiores e mais diversificadas, e, sobretudo, a formulação e aplicação de uma engenharia que articule princípios teórico-metodológicos oriundos das várias disciplinas envolvidas.

Essa complexidade permanece relativa e depende da natureza do software ou sistema que se procura realizar. Não se trata de formular uma engenharia de software educativo universal e aplicável para a concepção e o desenvolvimento de qualquer tipo de software ou plataforma, mas de investir na especificação de engenharias locais.

Tenter d’élaborer une ingénierie des EIAH a peu de sens. Le terme EIAH recouvre une trop grande variété de types d’artefacts (et de types de situations pédagogiques) pour que l’élaboration d’une ingénierie des EIAH soit possible... En revanche, il est possible de considérer des ingénieries spécifiques d’un type d’objet X. Par exemple, il est possible de considérer « X = situation d’apprentissage à distance, une situation étant définie comme la mise à disposition des apprenants de ressources documentaires et d’un scénario d’usage des ressources » ; « X = scénario pour l’apprentissage collaboratif » ; « X = simulation » ; « X = géométrie dynamique » ; etc. Ces X sont de différentes natures, et les éléments d’ingénierie correspondant également (Tchounikine, 2009, p. 24).

Entretanto, mesmo focando num tipo de sistema ou software educativo, como micromundo no nosso caso, a multidisciplinaridade da equipe de concepção e desenvolvimento continua necessária. Assim como continua necessária a formulação na engenharia de princípios que favorecem uma concepção que seja efetivamente transdisciplinar, notadamente através de vias de comunicação entre disciplinas com suas linguagens, seus jargões e seus métodos diferentes. Nesse ponto de vista, a presença na equipe de concepção de professores, pesquisadores e engenheiros com competências múltiplas e tendo construídos pontes (Tibúrcio, 2020) constitua ainda um meio de facilitar as travessias entre disciplinas.

Procurando favorecer a comunicação entre disciplinas (mais especificamente didática e computação), experimentamos linguagens de modelagem (UML²⁰). Tais linguagens são acessíveis para quem não é da ciência da computação, e observamos que elas permitem efetivamente uma descrição precisa do que deve ser programado, facilitando a transformação dos requisitos didáticos em requisitos informáticos (Santos, 2023; Bellemain, 2023). Entretanto, observamos também que elas, por serem extremamente estruturadas, tendem a impor uma certa homogeneização tecnológica da compreensão dos fenômenos didáticos, reduzindo a riqueza e a complexidade da interpretação destes fenômenos. É talvez por esse tipo de dificuldade que a

²⁰ Unified Modeling Language

proposta de desenvolvimento de uma didática computacional de Balacheff (1994b) não teve adesão.

L'objet de la didactique computationnelle est l'étude des problèmes liés à la construction, à la mise en œuvre et au contrôle de processus didactiques représentés par des modèles symboliques calculables au sens du calcul par un dispositif informatique (Balacheff, 1994b, p. 4).

Utilizando uma analogia com os comentários de Souza (2022, p.88), acreditamos que umas das condições para que efetivamente emerjam conhecimentos transdisciplinares é o reconhecimento e o respeito da heterogeneidade entre as áreas. O litoral nos esclarece sobre a borda de nosso saber, ... O litoral resguardaria, assim, uma singularidade que faz margem, construindo novas **imargens**. Acreditamos que foi num tal contexto de concepção transdisciplinar que nasceu o construcionismo de Papert (1980), foi nesse mesmo contexto que elaboramos a nossa transposição didático-informática (Bellemain, 2022) reformulação da transposição informática de Balacheff (1994c), e finalmente a Engenharia didático-informática (figura 7) (Bellemain *et al.*, 2015; Ramos, 2015; Tibúrcio, 2016, 2020) em formulação no nosso grupo Atelier Digit²@s.

Figura 7



A Engenharia didático-informática (EDI) é uma proposta recente de metodologia para a concepção e desenvolvimento de micromundos, simulações e jogos de simulação. Ela emergiu da articulação da Engenharia didática (ED) (Artigue, 1988) e da Engenharia de software (ES) (Sommerville, 2019). Apesar da sua formulação recente, ela é resultado de uma longa gestação que começou, para nós, com Cabri-géomètre (Bellemain, 1992; Bellemain,

2021). A sua emergência é devida à nossa exigência para a concepção e realização de micromundos de perseguir o duplo objetivo de realização efetiva de suportes à organização e gestão de situação de ensino e aprendizagem e de construção e validação de princípios teórico-metodológico de engenharia de softwares educativos. Essa gestação beneficiou de um contexto específico de avanços da informática educativa:

- avanços teóricos pelo desenvolvimento do campo científicos dos EIAH²¹ (Balacheff; Vivet, 1994d);
- avanços tecnológicos pela existência de vários projetos de concepção e desenvolvimento em âmbitos de pesquisa e desenvolvimento a exemplo de Function Probe (Confrey; Smith, 1992), Derive (Rich; Stoutemyer, 1994) ou Modellus (Teodoro, 2002);
- o reinvestimento da experiência, adquirida no projeto Cabri-géomètre, de articulação da didática da matemática e da realização de suportes computacionais a atividades matemáticas, em outras realizações²². Foi notadamente através da articulação de uma engenharia didática na concepção de um jogo físico: Bingo dos racionais (Melo et al, 2011) com uma engenharia de software para a concepção da sua versão computacional (Ramos, 2015) que emergiu a ideia de formular a EDI.

A EDI está sendo consolidada, e aprimorada, através da sua validação em três direções:

- a sua utilização na concepção e realização de micromundos, simulações e jogos de simulação internamente a nosso grupo de pesquisa²³.
- a sua utilização como crivo para analisar processos de concepção e realização de micromundos desenvolvidos em outros projetos de pesquisa (Tibúrcio, 2020).
- a sua utilização por pesquisadores externos ao grupo (Gama, 2023; Araújo, 2022).

Uma das direções importantes de aprimoramento da EDI, como evocado acima, está sendo de procurar aproximar os produtos das primeiras etapas da engenharia didáticas (análises previas e análise a priori), que nutrem a transposição didático-informática, da implementação efetiva desses requisitos didáticos. Foi para essa aproximação que investimos na utilização de

²¹ Environnement Informatique d'Apprentissage Humain.

²² Forma (Siqueira; Bellemain, 2012), Vetores (Andrade, 2010; Andrade; Bellemain, 2015).

²³ Bingo dos racionais (Ramos, 2015), Function Studium (Tibúrcio, 2016; Silva, 2016; Silva et al., 2019), Conic Studium (Siqueira, 2019), Magnitude Studium (Silva, 2019; Silva; Bellemain, 2020)

linguagens UML para transformar os requisitos didáticos em requisitos informáticos, esquemas e organogramas (Santos, 2023; Bellemain, 2023).

Não pretendemos, nesse texto, apresentar com detalhes a EDI. As referências citadas permitem ao leitor obter um panorama do seu estado de desenvolvimento atual. Entretanto, insistimos sobre uma questão importante na utilização da EDI que, como a engenharia didática, estabelece um quadro metodológico, mas exige aportes teóricos cognitivos e didáticos (Teoria das Situações Didáticas - TSD, Teoria Antropológica do Didático - TAD, Teoria dos Campos Conceituais - TCC, Teoria dos Registros de Representação Semiótica - TRRS, etc.) na sua operacionalização. Por exemplo, para idealizar a arquitetura que propomos para micromundos matemáticos citada acima (figura 6), investimos na TRRS desenvolvida por Raymond Duval e colaboradores (Duval, 1993) na aplicação da EDI e da transposição didático-informática.

A importância dos aportes teóricos da didática à aplicação da EDI vem do fato que a EDI é fortemente inspirada da engenharia didática. Essa inspiração não veio como uma camisa de força, ela nos apareceu como uma evidência desde que focamos na concepção de software que visam dar suporte a atividades matemáticas com fins didáticos no ambiente computacional. E por sua vez, a ED estabelece princípios teórico-metodológicos que levam a um estudo aprofundado em várias dimensões (epistemológica, cognitiva e didática) de um campo de conhecimentos e de atividades matemáticas para elaborar, numa perspectiva didática, situações que favorecem a compreensão desses conhecimentos pelos aprendizes através das suas atividades.

A pergunta que formulamos no título desse capítulo é "qual tecnologia computacional para qual projeto de educação matemática?" A formulação de uma engenharia para nortear a concepção e o desenvolvimento de micromundos, simulações e jogos como suportes computacionais a atividades matemáticas - a EDI - é uma resposta parcial a essa pergunta. Para completar essa resposta, sem nos afastar desse projeto, e retomando as propostas da discussão inicial, várias direções de um desenvolvimento tecnológico relativo à concepção e integração dos artefatos, complementares e articuladas, estão emergindo.

A discussão inicial destacou a importância de considerar o corpo humano como interface do Ser com o mundo, importância por questão de acessibilidade, de inclusão, para diversificar as vias de captar informações sensoriais e “reabilitar” o potencial do corpo para nossa compreensão do mundo. Essa importância leva a conceber interfaces acessíveis, inclusivas, ricas entre esse corpo e o mundo virtual e suas diversas representações. Pensamos

notadamente nas representações dinâmicas (da geometria dinâmica por exemplo), o movimento sendo uma fonte de informação para nós. Ainda, muito pode ser feito nessa direção como uma melhor utilização dos movimentos nos dispositivos tactéis, por exemplo, para construir e manipular objetos matemáticos virtuais.

Pensamos também, e sobretudo, na necessidade de conceber estratégias de favorecer a inclusão educacional de pessoas com deficiência. Acontece que a variedade de deficiências, em graus e diferenças consequentes, é extremamente ampla, e aumenta ainda mais quando se considera como algum nível de deficiência a neurodiversidade ou a dificuldade de seres de se adequar ao estreito padrão de condição humana imposto pela sociedade e suas mídias. A vergonha prometeica de Anders (2002) abordado no parágrafo anterior constitui, de certa forma, a expressão de uma deficiência, e mesmo sem chegar no nível da vergonha prometeica, sabemos que facilmente as dificuldades dos aprendizes com algum conteúdo, notadamente a matemática, são taxadas de deficiências. Com esse comentário não procuramos nivelar ou banalizar a noção de deficiência, queremos simplesmente destacar o fato que a linha que separa as pessoas com deficiência das outras é delgada e flutuante. Em consequência, somente existe a inclusão, em oposição à separação, para abordar a questão das pessoas com deficiência. Obviamente, o desenvolvimento tecnológico tem muitas contribuições para dar suporte à inclusão, seja procurando atender as diferenças, seja pensando o ambiente para ser mais inclusivo: trabalhar com contraste, tamanho das fontes, leitor de texto, textos alternativos para imagens, etc. Esses avanços são importantes, e mesmo necessários, entretanto, a inclusão não pode depender somente da assistência tecnológica. Se a disponibilidade de tecnologias assistivas favorecem a inclusão, essa inclusão pode ser limitada a quem tem condição de acesso a tais tecnologias, outras formas de inclusão devem ser exploradas. Além disso, a padronização, a algoritmização, a mecanização por serem da essência mesmo do desenvolvimento tecnológico, participam de uma certa padronização das deficiências, deixando sempre de lado os que não se encaixam nesses padrões. Frente à diversidade das deficiências, é necessário oferecer uma diversidade de vias e formas de interagir, conhecer e transformar o mundo compartilhado, assim como é necessário oferecer uma diversidade de vias e formas de compartilhar os conhecimentos construídos, e colaborar na construção do mundo compartilhado. A inclusão, que é resultado da participação efetiva a um coletivo, passa pela sensibilidade que, retomando Berardi (2019, p.20, “é a capacidade de interpretar signos não verbais, graças à capacidade de interpretação que provém do fluxo empático. Essa capacidade, permite à raça humana compreender mensagens ambíguas no contexto da relação...”). No contexto do ensino da matemática com tecnologias

computacionais, paralelamente à concepção e desenvolvimento de interfaces acessíveis, inclusivas, ricas, precisa-se conceber, desenvolver e articular outros recursos, notadamente recursos físicos. Nesse contexto, trabalhamos a noção de artefatos *figitais* (inspirado de Airton Castro) articulando artefatos digitais e físicos. Essa pesquisa em andamento foca na realização de versões físicas e digitais do jogo do Nim em diversas bases (figura 8) (Lima *et al.*, 2023).

Figura 8



Jogo do Nim digital (Lima, 2023, p. 86)



Jogo do Nim físico, produção de Castro
(Lima *et al.*, 2024)

Para avançar nessas reflexões é necessário estabelecer uma interlocução transdisciplinar (pela EDI) entre didática, cognição, design, ergonomia e a ergonomia das Interface Humana-Maquina (HMI), assim como antropologia e psicologia.

Continuando nessa perspectiva da inclusão, e mais geralmente, da participação efetiva a espaços coletivos, aparece claramente na discussão anterior a necessidade de respeitar os espaços privado, como espaço de desenvolvimento da subjetividade, e coletivo, como espaço da intersubjetividade e construção colaborativa do mundo compartilhado. Nesse sentido, o planejamento de situações ou sequências para aprendizagem com fases coletivas, colaborativas, deve considerar as dimensões privadas e públicas das atividades²⁴. Tínhamos analisado três ambientes de geometria dinâmica colaborativa considerando notadamente a disponibilidade de espaço privado e público (figura 9) de construção de figuras geométricas (Bellemain, 2014) na perspectiva de poder articular diversas fases (privadas, em grupo, públicas) na utilização desses ambientes no ensino e aprendizagem da geometria.

²⁴ LEMATEC Studium (Bellemain *et al.*, 2018; Silva, 2018)

Figura 9

	Espace	Privé	D'échanges	Partagé
Config.	Interactions		Publier Synchrone	Publier Synchrone Concurrent
Exploitation	Composition	Elève Binôme Groupe	Classe entière, groupe, ouvert Composition préalable/dynamique	
Rôle			Observateur Auteur	Observateur Intervenant (niveau)
Perf.	Modération		Elève Ordinateur Professeur	

A discussão inicial destacou também a importância de considerar as questões culturais locais. Nesse sentido, não se trata somente de traduzir na língua local as interfaces dos artefatos, ou mesmo de utilizar os artefatos para explorar a cultura local, o que acontece para a grande maioria dos softwares. No processo de decolonização dos artefatos, trata-se de investigar quais são os objetos, as representações, os instrumentos e os métodos de exploração que devem ser implementadas no ambiente computacional. Por exemplo, a implementação da geometria euclidiana nos softwares de geometria dinâmica ocidental privilegia pontos, reta e compasso. Uma decolonização dessa geometria dinâmica para integração no oriente, com sua tradição secular de origami (dobradura), levaria provavelmente a propor outros objetos (retas e planos), outras representações dinâmicas (dobrar) e outros instrumentos (dobraduras) para explorar a geometria²⁵.

5. Considerações finais

A escolha de trazer para esse texto referências relativamente antigas, e na periferia da área da educação matemática, foi importante por nos levar a um olhar diferenciado, e renovado, sobre a pergunta inicial “qual tecnologia computacional para qual projeto de educação matemática?”. Essa escolha tem um pouco de um ato de rebeldia em dois sentidos. Um deles é relativo à recusa em aceitar o princípio da obsolescência programada aplicado às publicações científicas, nem que seja só porque é um princípio recusável em qualquer circunstância. A obsolescência programada, além do fato que aplicada aos produtos é um desastre para o meio ambiente, tende a transformar nosso mundo compartilhado num mundo efêmero e desenraizado. Um outro é relativo à recusa da setorização das ciências em área e subáreas, setorização que

²⁵ Interessante acrescentar aqui que a axiomática das dobraduras fornece premisses que permitem uma geometria mais rica que aquela da régua e o compasso

tem seus aportes no que diz respeito à constituição de comunidades de especialistas focados nos avanços da sua área, mas que se transforma frequentemente em sectarismo, emperrando a evolução transdisciplinar dos conhecimentos. E de forma geral, trata-se de uma rebeldia em relação à aplicação às ciências do modelo produtivista do sistema capitalista, aplicação que como para a sociedade, resulta na atrofia da dimensão humana da pesquisa científica. Mas a escolha das referências utilizadas tem sobretudo a ver com a natureza da questão fundamental na época (pós segunda guerra) que elas discutem: por que um mundo em reconstrução e desenvolvimento econômico depois da guerra mais mortífera da história da humanidade continua investindo na desumanidade? Essa questão, mesmo com as mudanças que a penetração quase universal, multiforme e versátil, das tecnologias digitais na sociedade provocam na condição humana, continua atual. Ela constitua uma fonte do nosso próprio questionamento sobre o papel das tecnologias computacionais na educação, e educação matemática. Com efeito, mesmo se, frente a elas, temos cada vez mais uma impressão de inferioridade, de dominação, elas pertencem a nosso mundo compartilhado, elas são ao serviço do nosso projeto de humanidade (ou desumanidade). Não se trata de rejeitar a utilização dessas tecnologias, mas, pelo menos no contexto da escola, pensar a concepção, o desenvolvimento e a integração de tecnologias computacionais ao serviço de um projeto humanista.

Das referências citadas, para esse texto, tiramos essencialmente quatro pontos de reflexão que consideramos como importante para esse projeto: a primazia dos processos em relação com os produtos, a exigência de preservar os espaços privados e públicos e as atividades realizadas em cada um deles, a necessidade de articular aportes e limites das diversas tecnologias, incluindo analógicas, e do nosso corpo para o conhecimento e a construção do mundo compartilhado, e a importância de manter, na produção e utilização de tecnologias, uma interlocução com as culturas e as raízes originárias, com o mundo compartilhado tal que foi construído localmente.

Trata-se de um projeto amplo, complexo pelas áreas de conhecimentos envolvidas e de difícil implementação por, entre outro, por ser contrário à utilização alienante das tecnologias digitais, utilização calculada e hegemônica na sociedade. Em contrapartida, ele tem a vantagem de ser modular e, consequentemente, distribuível entre as diversas áreas de conhecimentos envolvidas. O foco pode ser em artefatos, suas interfaces e possíveis articulações, dando suportes diversificados e inclusivos às atividades exploratórias do mundo compartilhado como os micromundos ou simulações. O foco pode também ser na elaboração, planejamento e acompanhamento de situações que favorecem a exploração, específica ou diversificada,

articulando atividades em espaços privado e/ou público, culturalmente contextualizada ou transcultural, do mundo compartilhado.

A questão das travessias entre as áreas de conhecimentos envolvidas numa perspectiva transdisciplinar é difícil e precisa ser provocada. O simples fato de juntar especialistas das diversas áreas é geralmente insuficiente. Nesse sentido, estamos formulando um engenharia didático-informática para favorecer essas travessias. Essa engenharia está sendo formulada com foco na concepção e desenvolvimento de artefatos (micromundos) dando suporte a atividades matemáticas no ambiente computacional. Além do aprimoramento da engenharia, através das suas aplicações, no sentido de melhor articular as disciplinas envolvidas na concepção e desenvolvimento dos artefatos, procuramos incorporar a essa engenharia, princípios para a concepção para que os artefatos sejam efetivamente utilizáveis em situações de ensino-aprendizagem respeitando os critérios de diversidade, inclusão, articulação com outros recursos e permitindo uma interlocução com o contexto cultural.

Uma primeira proposta de arquitetura de micromundo para a matemática foi elaborada através da aplicação da EDI. Trata-se de propor elementos de interface (representações e instrumentos), estruturas de dados (objetos, relações e operações) e funcionalidades (seleção das ferramentas compondo a caixa de ferramentas, macro construção, histórico de construção, ...), além do que é mais específico do contexto informático (gerenciamento de arquivos, impressão, ...) que são comuns aos micromundos. A modularidade e versatilidade da arquitetura proposta permite contemplar a concepção de micromundo a utilizando questões relativas à diversidade das interfaces e à inclusão. As reflexões provocadas pelas leituras que fundamentam esse texto levam a incorporar à nossa arquitetura genérica para micromundo várias funcionalidades relativas à organização de situação articulando atividades de natureza privada ou pública e à interlocução com as culturas e raízes originais.

Independentemente dos aportes as reflexões sobre qual tecnologia para qual projeto de educação matemática, as leituras ou releituras das referências utilizadas foram extremamente esclarecedoras e apaixonantes. Mais apaixonante ainda seria conseguir conceber e integrar tecnologias para uma condição humana ainda humanista.

Referências

ANDRADE, J. P. G. Vetores: interações à distância para a aprendizagem de álgebra linear. 2010. f. 125. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) - Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2010.

ANDRADE, J. P. G.; BELLEMAIN, F. Interfaces digitais comunicantes e registros de representação semióticos: análise das interações para a aprendizagem colaborativa suportada por computador de objetos de álgebra linear.

In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis- GO. Anais do VI Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília-DF: SBEM, 2015.

ANDERS, G. L'Obsolescence de l'homme : Sur l'âme à l'époque de la deuxième révolution industrielle. Tradução de Cristophe David. Paris: éditions Ivrea, 2002.

ARAÚJO, A. G. P. A engenharia didático-informática na prototipação de um jogo digital matemático inclusivo para alunos surdos. In: Anais do XXVI Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática. Anais... São Paulo (SP) On-line, 2022. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/ebrapem2022/559389-A-engenharia-didatico-informatica-na-prototipacao-de-um-jogo-digital-matematico-inclusivo-para-alunos-surdos>. Acesso em: 10/03/2025

ARENTE, H. The Human Condition (2. ed.). Chicago: The University of Chicago Press, 1998.

ARENTE, H. Eichmann à Jérusalem. Rapport sur la banalité du mal, Paris : Gallimard, « Folio Histoire », 1963

ARTIGUE, M. Ingénierie Didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques. v.9, n.3, p. 281-308, 1988.

ARTOUS, A. Karl Marx, Le travail et l'émancipation, Paris, Les Éditions sociales, coll. « Les parallèles », 2016, 196 p. ISBN : 978-2-35367-025-3.

BALTAR, A. B., Oração de paraninfo na formatura de Engenharia da Universidade do Recife de 1964. Recife. 1964.

BALACHEFF, N. Didactique et intelligence artificielle. Recherches en didactique des mathématiques. n. 14 v1.2, p. 9-42, 1994a.

BALACHEFF, N. Didactique computationnelle, évocation d'un projet de recherche. 1994b. <hal-00190424>

BALACHEFF, N. La transposition informatique. Note sur un nouveau problème pour La didactique. In: ARTIGUE, M. et al. (eds). Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. especial. La Pensée Sauvage Editions, p. 364-370, 1994c.

BALACHEFF, N. ; VIVET, M. Didactique et intelligence artificielle, Grenoble : La pensée sauvage éditions, 1994d

BAULAC, Y.; BELLEMAIN, F.; LABORDE, J.M. **Cabri-géomètre, un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie.** Logiciel et manuel d'utilisation, Cedic-Nathan Paris, 1988.

BELLEMAIN, F. . (2023). Elements d'ingénierie de logiciels éducatifs, le cas des micromondes pour les mathématiques : dimension informatique. Revista Paranaense De Educação Matemática, 12(28), 01–19. <https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.01-19>

BELLEMAIN, F. ; Éléments d'ingénierie de logiciels éducatifs, le cas des micromondes pour les mathématiques : dimensions épistémologique, cognitive et didactique. Revista Paranaense de Educação Matemática, 11(25), 80–105. 2022.

BELLEMAIN, F. Origem da engenharia didática informática: concepção e desenvolvimento de Cabri-géomètre. In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Anais...Uberlândia(MG) Uberlândia, 2021. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/VIIISIPEMvs2021/381566-ORIGEM-DA-Engenharia-didatica-informatica--concepcao-e-desenvolvimento-de-cabri-geometre>. Acesso em: 06/03/2025

BELLEMAIN, F. Análise de ambientes de geometria dinâmica colaborativa do ponto de vista da orquestração instrumental. Nuances: Estudos sobre Educação, Presidente Prudente, v. 25, n. 2, p. 18–38, 2014. DOI: 10.14572/nuances.v25i2.2936. Disponível em: <https://revista.fct.unesp.br/index.php/Nuances/article/view/2936>. Acesso em: 5 mar. 2025.

BELLEMAIN, F. (2002) “O Paradigma Micromundo”, In: Colóquio de história e tecnologia no ensino de matemática HTEM. Anais... Rio de Janeiro: UFRJ, p. 51-63.

BELLEMAIN, F. Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie, Cabri-géomètre. 1992. Tese (Doutorado em Didáticas das Matemáticas) - Université Joseph Fourier, Grenoble, 1992.

BELLEMAIN, F.; RAMOS C. S.; TIBÚRCIO, R. S. Engenharia de Softwares Educativos, o caso do Bingo dos Racionais. In: VI SIPEM - Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2015, Pirenópolis. Anais do VI SIPEM. Brasília: Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2015. v. 1. p. 1-12.

BELLEMAIN, F; BELLEMAIN, P.M.B; GITIRANA, V. Simulação no ensino da matemática: um exemplo com cabri-géomètre para abordar os conceitos de área e perímetro. III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia-SP: III SIPEM, 2006.

BELLEMAIN, F.; LABORDE, J- M. **Cabri II**. An interactive Geometry notebook. Texas Instruments, 1994.

BELLEMAIN, F. ; RODRIGUES, Amanda ; SILVA, A. D. P. R. . LEMATEC Studium: a support resource for teaching mathematics. In: Proceedings of the Re(s)sources 2018 International Conference, 2018, Lyon. Proceedings of the Re(s)sources 2018 International Conference, 2018.

BERARDI, Franco. Depois do futuro. Tradução de Regina Silva. São Paulo: Ubu Editora, 2019.

BESNIER, J.-M. Demain, les posthumains. Le futur a-t-il encore besoin de nous ? Paris: Hachette, coll. « Haute Tension », 2009.

CAMUS, Albert. Le mythe de Sisyphe. Essai sur l'absurde, Paris : Editions Gallimard, 1942.

CAMUS, Albert. L'homme révolté. Paris : Editions Gallimard, 1951.

CAMUS, Albert. La peste. Paris : Editions Gallimard, 1947.

CAVALCANTI, J. de H. Articulação entre a representação algébrica e a representação geométrica do objeto reta utilizando o software Function Studium. 2023. f. 124. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

CONFREY, J.; SMITH, E. Function Probe: Multi-Representational Software for Learning about Functions. In: MALCOM, S.; ROBERTS, L.; SHEINGOLD, K. (orgs.). New York State Association for Computers and Technology in Education Journal. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science. 1992.

DILLENBOURG, P., TCHOUNIKINE, P. (2007). Flexibility in macro-scripts for computer-supported collaborative learning, Journal of Computer Assisted Learning, Vol 23, p. 1–13.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de didactique et de sciences cognitives, 5, 37–65, 1993

FOCILLON, H. 1934. L'éloge de la main, Paris : Editions la Découverte, 2022.

GAMA, F. A. L. Desenvolvimento de games educativos aplicado ao ensino de matemática: MEDIG - Uma modelização a partir da Engenharia Didático-Informática e os processos de desenvolvimento de Games. 2023. Tese (Doutorado em Ensino das Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, Recife, 2023.

GELL, A. Art and agency. Oxford: Clarendon Press, 1998.

GUIMARÃES, Luiz Carlos; MORAES, T. G. Tabulae Colaborativo. Software sem registro, 2008.

HERMAN, E. S., CHOMSKI, N. Manufacturing Consent: The Political Economy of the Mass Media, Newton-MA: Pantheon, 2011, 675p

JERMANN, P., DILLENBOURG, P. (2003). Elaborating new arguments through a cscl scenario. Arguing to Learn: Confronting Cognitions in Computer – Supported Collaborative Learning Environments, CSCL Series, Kluwer, Amsterdam, Pays Bas, p. 205–226.

JESUS, Carolina Maria de. Quarto de despejo – diário de uma favelada. São Paulo: Francisco Alves, 1960.

KRENAK, A. A vida não é útil. São Paulo: Companhia das Letras. Edição do Kindle, 2022

LABORDE, J-M.; BELLEMAIN, F. Cabri Geometre II plus le CAhier de BRouillon Intéractif. Grenoble: Cabrilog, 2001.

LABORDE, J. M. & LABORDE, C. (1991), Micromondes intelligents et environnement d'apprentissage, In: Bellissant C. (ed.) Actes des XIII Journées francophones sur l'informatique, Grenoble: IMAG & Université de Genève, 57-177.

LAGROU, Els . Arte indígena no Brasil: agência, alteridade e relação. Belo Horizonte: Editora ComArte, 2009. v. 1.

LATOUR, B. & SCHULTZ, N. Mémo sur la nouvelle classe écologique : Comment faire émerger une classe écologique consciente et fière d'elle-même. Paris : Empêcheurs de penser rond, 2022.

LELOUCHE, S. Günther Anders, l'Obsolescence de l'homme, 2014, <https://dilectio.fr/wp-content/uploads/2015/02/obsolescence.pdf> acesso em 4 de março de 2025.

LIMA, J. V. R. Prototipação de uma versão digital do jogo do Nim com base no modelo de processo de software da engenharia didático-informática. 2023. f. 116. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

LIMA, J. V. R. de; CASTRO, T. G. de; BELLEMAIN, F. NIM DECIMAL: uma busca por uma estratégia vitoriosa. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: a Educação Matemática num mundo pós-pandêmico. Anais...Campina Grande (PB) UEPB, 2024. Disponível em: <https://www.even3.com.br/anais/6SIPEMAT/801542-NIM-DECIMAL--uma-busca-por-uma-estratégia-vitoriosa>. Acesso em: 10/03/2025

MELO, M. S. L.; MONTENEGRO, G. M. M.; SANTOS, L. S.; MORAES, M. das D.; BELLEMAIN, P. M. B.. Bingo dos números racionais – Indicações didáticas. Projeto Rede: Jogos na educação matemática. Recife, 2011.

PAPERT, S. (1980), Mindstorms: children, computers and powerful ideas. Basic Books, New York.

RABARDEL P. Les Hommes et les Technologies : Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin Editeur, Paris, 1995

RAMOS, C. S. Princípios da engenharia de software educativo com base na engenharia didática: uma prototipação do Bingo dos Racionais. 2015. f. 111. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2015.

RICH, A. D., & STOUTEMYER, D. R. (1994). Inside the DERIVE Computer Algebra System, International Derive Journal, 1(1), 3-17.

SANTOS, T. R. A engenharia didático-informática e o processo de produção de jogos matemáticos de simulação para situações didáticas: um estudo da concepção de uma versão digital do jogo Mankala Colhe Três. 2023. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2023.

SCHOPENHAUER, A. Como vencer um debate sem precisar ter razão, Rio de Janeiro: TopBooks, 2003

SHNEIDERMAN, B. Designing the user interface: strategies for effective human-computer-interaction. New York : Association for Computing Machinery, 1987

SILVA, A. R. da. (2018). Concepção de um suporte para a elaboração de webdocumentos destinados ao ensino da geometria: o caso das curvas cônicas. Dissertação de Mestrado. Universidade Federal de Pernambuco.

SILVA, C. T. J. da. A engenharia didático-informática na prototipação de um software para abordar o conceito de taxa de variação. 2016. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

SILVA, C. T. J.; GITIRANA, V.; BELLEMAIN, F.; TIBÚRCIO, R. dos S. Function Studium: concepção, desenvolvimento e validação de um software para abordar funções em uma perspectiva covariacional. Perspectivas Da Educação Matemática, v. 12(28), p. 245-271, 2019.

SIQUEIRA, J. E. de M. Articulando os registros de representação semiótica das curvas cônicas através da integração de recursos computacionais. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, A. D. P. R. Prototipação, Desenvolvimento e Validação de um Micromundo com Suportes para o Ensino de Área e Perímetro. 2019. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2019.

SILVA, A. D. P. R.; BELLEMAIN, F. Magnitude Studium: um micromundo para o ensino de área e perímetro. Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas, Belém, v. 16, n. 37, p. 177-194, dez. 2020. ISSN 2317-5125. Disponível em: <<https://periodicos.ufpa.br/index.php/revistaamazonia/article/view/7776>>. Acesso em: 06 mar. 2025. doi:<http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i37.7776>.

SOMMERVILLE, I. Engenharia de Software. 10. ed. São Paulo: Pearson Universidades, 2019. 768p.

SOUZA, E. L. A. Furos no Futuro - psicanálise e utopia. 1. ed. Porto Alegre: Editora Artes & Ecos, 2022. v. 1. 170p.

TCHOUNKINE, P. Précis de recherche d'Ingénierie des EIAH. 2009. Disponível em: <https://hal.science/hal-00413694v1/document>. Acesso em: 06/03/2025.

THOMPSON, P.W. (1987), Mathematical microworlds and intelligent computer-assisted instruction, in Kearsley G (ed.), Artificial Intelligence & Instruction, applications and methods, Addison Wesley, 83-109.

TIBÚRCIO, R. S. Processo de desenvolvimento de software educativo: um estudo da prototipação de um software para o ensino de função. 2016. f. 112. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2016.

TIBÚRCIO, R. S. A Engenharia Didático-Informática: uma metodologia para a produção de software educativo. 2020. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2020.

ZAFRANI, A. Situations de l'animal laborans. Cités, N° 67(3), 117-130. <https://doi.org/10.3917/cite.067.0117>. 2016.

Capítulo 2

A dimensão tecnológica no problema didático: reflexões em tempos de Inteligência Artificial

Deusarino Oliveira Almeida Júnior²⁶

José Messildo Viana Nunes²⁷

Saddo Ag Almouloud²⁸

Saul Rodrigo da Costa Barreto²⁹

1. Introdução

A formulação e análise de problemas didáticos no campo da Educação Matemática têm se beneficiado significativamente da perspectiva proposta pela Teoria Antropológica do Didático (TAD), concebida por Yves Chevallard. Segundo a TAD, compreender um problema didático de forma plena requer considerar múltiplas dimensões inter-relacionadas que vão além da sala de aula ou da intuição docente. Uma das contribuições centrais da TAD é justamente a modelização dos problemas didáticos por meio de três dimensões fundamentais: epistemológica, econômico-institucional e ecológica (Chevallard, 1999; Bosch & Gascón, 2005; Gascón, 2011).

O padrão heurístico proposto por Gascón (2011) para o desenvolvimento de problemas didáticos contempla o estudo detalhado das dimensões Epistemológica, Econômico-Institucional e Ecológica no contexto da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Essas dimensões fundamentais, são constitutivas e essenciais da própria noção de problema didático de modo que, tais problemas não devem ser dados de antemão, sendo necessário identificá-los e formulá-los com base nos construtos teóricos disponíveis no âmbito da TAD. Para o autor, isso significa que:

ao invés de partir da suposição de que já sabemos o que são os problemas didáticos (aqueles identificados, por exemplo, com os problemas de ensino e aprendizagem da matemática) e, então, elaborar uma lista de características, nós adotamos o caminho inverso. Assumimos o princípio epistemológico geral segundo o qual os problemas científicos não são dados de antemão, mas se constroem e evoluem em conjunto com a disciplina que os produz (Gascón, 1993); no nosso caso, construímos e enunciamos os problemas didáticos com base nas

²⁶ Doutorando - Universidade Federal do Pará / ORCID [0000-0002-4642-1404](#)

²⁷ Prof. Dr. da Universidade Federal do Pará / ORCID [0000-0001-9492-4914](#)

²⁸ Prof. Dr. da Universidade Federal do Pará / ORCID [0000-0002-8391-7054](#)

²⁹ Prof. Dr. da Universidade do Estado do Pará / ORCID [0000-0002-2398-743X](#)

ferramentas que a TAD nos oferece em seu estágio atual de desenvolvimento (GASCÓN, 2011, p. 205, tradução nossa).

Essa estrutura teórica foi sistematizada por Gascón (2011), que propõem um esquema heurístico para representar o desenvolvimento racional de um problema didático: $\{(P_0 \oplus P_1) \hookrightarrow P_2] \hookrightarrow P_3\} \hookrightarrow P_\delta$, no qual P_1 , P_2 e P_3 correspondem, respectivamente, às dimensões epistemológica, econômica e ecológica do problema. O termo P_0 representa o “problema docente” – uma formulação inicial e pré-científica da problemática, frequentemente baseada em concepções escolares não problematizadas, como “motivação”, “abstração” ou “aprendizagem significativa”. Já o termo P_δ denota o problema didático em sua formulação mais complexa, que resulta das interações entre as três dimensões fundamentais.

A dimensão epistemológica refere-se à forma como se interpreta e organiza o saber matemático implicado no ensino. Ela está relacionada à construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), que permita ao pesquisador analisar as praxeologias matemáticas envolvidas — isto é, as tarefas, técnicas, tecnologias e teorias mobilizadas no processo de ensino e aprendizagem (Bosch *et al.*, 2006). Essa dimensão é considerada nuclear, pois suas escolhas impactam decisivamente a configuração das demais.

A dimensão econômico-institucional está associada às condições e restrições que o sistema de ensino impõe à circulação do saber. Essa dimensão contempla a análise das instituições envolvidas no processo de transposição didática — da instituição produtora do saber à escola — e investiga como estas interpretam e legitimam o saber a ser ensinado, influenciando quais práticas e conteúdos podem efetivamente viver nas aulas (Chevallard, 1991; Gascón *et al.*, 2011).

Assim, a dimensão ecológica refere-se ao conjunto de fatores que determinam a possibilidade ou impossibilidade de determinadas práticas se manterem e se desenvolverem no sistema didático. Isso implica considerar o papel das práticas pedagógicas dominantes, as decisões políticas e até os aspectos culturais mais amplos que afetam a ecologia do saber na escola. Como apontam Farris, Bosch e Gascón (2011), é na dimensão ecológica que se torna possível compreender por que certas práticas — como a modelização matemática — permanecem à margem do currículo, apesar de sua relevância reconhecida.

A construção do problema didático, entretanto, não se encerra na articulação entre as três dimensões propostas por Chevallard e desenvolvidas por Gascón. Como apontam Farris, Bosch e Gascón (2011), o avanço das investigações pode levar à formulação de outras dimensões ou à conexão destas com novos campos teóricos. Foi justamente nesse movimento

investigativo que surgiu a proposição da *quarta dimensão do problema didático: a dimensão da linguagem*, conforme apresentada por Brandão (2024), em diálogo com a TAD e a semiótica peirceana.

A autora propõe uma ampliação do esquema heurístico das três dimensões tradicionais ao incorporar a linguagem como um elemento transversal e estruturante na constituição do problema didático. Brandão *et al.* (2024), argumentam que a linguagem, longe de ser apenas um meio de expressão, é uma instância de significação que atua diretamente na construção dos saberes matemáticos. A autora defende que os componentes do sistema didático (professor, estudante e saber) mobilizam diferentes tipos de linguagem — *dictarizada, contrafactual, em curso e em (dis)curso* — dependendo do tipo de praxeologia, das finalidades do ensino e do paradigma didático em vigor (visita a obras ou questionamento do mundo).

A dimensão da linguagem, nesse contexto, passa a operar como um ponto de fronteira entre os demais aspectos do problema didático, pois influencia tanto a maneira como os objetos matemáticos são construídos e representados, quanto a forma como são ensinados, aprendidos e reinterpretados. Essa nova dimensão permite, por exemplo, compreender os efeitos das representações simbólicas e discursivas sobre o raciocínio abdutivo dos estudantes e as dificuldades de transposição entre contextos institucionais distintos. Como sintetiza Brandão (2024, p. 394), “A linguagem circunscreve o sistema didático, diferenciando-a de acordo com os seus três elementos, a linguagem do professor, a linguagem do estudante e a linguagem do objeto matemático. E as semioses desenvolvidas ora convergem e ora divergem no processo de ensino de um objeto matemático”, sendo capaz de fundar novas praxeologias e abrir espaço para a criatividade e a coautoria discente.

Diante disso, no cenário de ampliação teórica é que se insere a proposta deste capítulo: apresentar e discutir a *quinta dimensão do problema didático, a dimensão tecnológica*, proposta como parte de uma pesquisa em desenvolvimento. A emergência desta nova dimensão decorre da crescente presença das tecnologias digitais — especialmente da inteligência artificial (IA) — nas práticas escolares, o que demanda uma revisão das categorias tradicionais da Didática da Matemática à luz das transformações em curso nos ambientes de aprendizagem contemporâneos.

A dimensão tecnológica, conforme defendida nesta investigação, não se restringe ao uso instrumental de artefatos digitais em sala de aula. Ela se constitui como um campo analítico que problematiza o papel das tecnologias na produção, circulação e institucionalização do saber

matemático, ampliando o escopo da análise didática. Em outras palavras, trata-se de compreender como os dispositivos digitais — simuladores, plataformas adaptativas, sistemas automatizados de avaliação, ambientes virtuais, entre outros — afetam as praxeologias escolares e reconfiguram as relações entre os sujeitos do sistema didático.

Como será aprofundado nos próximos tópicos, a dimensão tecnológica permite evidenciar novos desafios e possibilidades na formulação de problemas didáticos, especialmente no ensino de Geometria Analítica Plana (GAP), quando articulada a Percursos de Estudo e Pesquisa (PEP) mediados por ferramentas de IA. Ao incluir esta dimensão na modelização didática, esta pesquisa propõe uma expansão teórica que visa contribuir para uma compreensão mais abrangente e atualizada dos problemas didáticos na Educação Matemática.

Essa visão multidimensional revela que o problema didático não pode ser reduzido a uma questão metodológica ou ao desempenho do professor. Ao contrário, ele emerge de uma complexa rede de condicionamentos e interações institucionais e epistemológicas que devem ser rigorosamente analisadas. Como destaca Chevallard (1997), compreender o funcionamento do sistema de ensino exige mais do que descrever as práticas em vigor, implica revelar os modelos de saber que lhes dão sustentação e as instituições que, de forma direta ou indireta, as configuram, legitimam e limitam.

2. Fundamentos Teóricos: Dimensões dos problemas didáticos

A TAD, oferece um arcabouço teórico bem estruturado para a análise dos fenômenos de ensino, permitindo compreender o problema didático como um objeto complexo, multidimensional e situado institucionalmente. Em oposição a abordagens que individualizam os desafios da sala de aula ou os reduzem à didática espontânea do professor, a TAD propõe uma modelização sistêmica do ensino, articulada em torno de diferentes dimensões que interferem na produção, circulação e apropriação dos saberes escolares. O problema didático, nesse contexto, é compreendido como o resultado da articulação entre diferentes níveis de restrições, condicionamentos e possibilidades institucionais, epistemológicas, ecológicas, linguísticas e tecnológicas.

Neste capítulo, analisaremos cinco dimensões que compõem e estruturam a formulação dos problemas didáticos: a *dimensão epistemológica*, centrada na organização e transposição do saber matemático; a *dimensão econômico-institucional*, que examina os condicionamentos impostos pelas instituições e seus dispositivos normativos; a *dimensão ecológica*, que problematiza a sustentabilidade das práticas didáticas no ecossistema escolar; a *dimensão da*

linguagem, responsável pelas mediações semióticas e discursivas que permeiam a construção do saber; e a *dimensão tecnológica*, proposta nesta pesquisa, que amplia o escopo de análise ao considerar o impacto das tecnologias digitais — em especial da inteligência artificial — na constituição e reconfiguração dos problemas didáticos. A seguir, apresentamos cada uma dessas dimensões em diálogo com os fundamentos teóricos da TAD e com pesquisas que têm contribuído para seu aprofundamento e expansão.

2.1. Dimensão Epistemológica

Na formulação de um problema didático segundo a TAD, a dimensão epistemológica ocupa uma posição central. Ela diz respeito à forma como se descreve, organiza e interpreta o saber matemático envolvido no processo de ensino, considerando-o como uma construção institucional e historicamente situada. Trata-se, portanto, de uma dimensão que interroga a própria natureza do conhecimento que se pretende ensinar, bem como as praxeologias associadas à sua produção e circulação.

Essa dimensão se efetiva por meio da construção de um Modelo Epistemológico de Referência (MER), investigado por Gascón *et al.*, (2005, 2011), com base nos estudos de Yves Chevallard (1991, 1997). O MER é um instrumento teórico que permite ao pesquisador explicitar, de forma crítica e sistemática, a organização do saber matemático que está em jogo na situação didática. Ele não é um espelho do “conhecimento verdadeiro”, mas uma hipótese de trabalho, construída para compreender e analisar os fenômenos didáticos, suas regularidades e suas rupturas.

[...] Chama-se modelo epistemológico de referência (MER) e tem um caráter sempre provisório. É o instrumento com o qual o didata pode desconstruir e reconstruir as praxeologias cuja difusão intra e interinstitucional pretende analisar. Por essa razão, o MER constitui um instrumento de emancipação do didata e da ciência didática, uma vez que permite questionar a forma como as instituições envolvidas na problemática didática interpretam o saber matemático (Gascón, Bosch E Barquero, 2011, p. 5, tradução nossa).

Como destacam Gascón, Bosch e Barquero (2011), todo problema didático deve incorporar a dimensão epistemológica, ainda que de forma implícita. Isso porque, ao descrever e interpretar qualquer prática de ensino, estamos sempre operando com alguma concepção (ainda que não explicitada) sobre o que é o saber a ser ensinado. A função do MER, nesse contexto, é deslocar o foco do senso comum pedagógico para uma análise crítica das praxeologias matemáticas que vivem nas instituições escolares, problematizando os recortes, omissões e interpretações que configuram o “saber escolar”.

Na TAD, o saber matemático é compreendido como uma atividade praxeológica, ou seja, uma articulação entre tipos de tarefas (T), técnicas (τ), tecnologias (θ) e teorias (Θ). Essa estrutura permite descrever com rigor os elementos que compõem o saber em ação e serve como base para analisar sua transposição didática. A explicitação do MER permite, portanto, identificar quais praxeologias estão sendo mobilizadas em determinado contexto institucional, quais são suas lacunas, quais aspectos foram invisibilizados e quais relações foram artificialmente naturalizadas.

Essa perspectiva epistemológica rompe com uma visão essencialista do saber matemático e enfatiza sua relatividade institucional. Ou seja, o mesmo objeto matemático pode assumir significados e funções diferentes conforme a instituição em que vive, o teorema de Pitágoras, por exemplo, é mobilizado de maneira distinta em um curso de engenharia, em um livro didático do ensino básico ou em uma prova de seleção para acesso ao nível superior. É justamente essa relatividade que torna indispensável a construção de modelos epistemológicos adequados a cada contexto de análise, pois não há um “referencial absoluto” que possa servir de guia universal para a observação dos saberes.

Outra contribuição central da dimensão epistemológica está no reconhecimento da função modelizadora do saber matemático. Inspirando-se em Chevallard (1997) e aprofundando essa ideia, Bosch e Gascón (2006) afirmam que toda atividade matemática pode ser interpretada como uma forma de modelização: trata-se de identificar um sistema problemático, construir modelos que permitam compreendê-lo, e usar esses modelos para responder a questões relevantes, gerando, assim, novas praxeologias. Essa abordagem não se restringe à modelização de situações do mundo físico (modelização extramatemática), mas inclui também a modelização intramatemática, isto é, aquela em que tanto o sistema como o modelo pertencem ao universo da matemática.

Esse aspecto permite compreender o caráter recursivo da atividade matemática: modelos podem gerar novos sistemas, que por sua vez exigem novos modelos, configurando uma cadeia de produções teóricas e técnicas em constante evolução. Tal concepção rompe com a ideia de que a matemática escolar deva apenas “aplicar conceitos prontos”, e passa a vê-la como campo fértil para a construção e reconstrução de praxeologias em contextos institucionais específicos.

Dessa forma, a dimensão epistemológica nos leva a problematizar as seguintes questões: *Qual o saber matemático a ser ensinado? Quais praxeologias são consideradas legítimas em determinada instituição? Que saberes foram omitidos no processo de transposição?* As

respostas a essas perguntas fundamentam o problema didático e orientam as escolhas metodológicas da investigação didática, definindo quais fenômenos serão visíveis ao olhar do pesquisador.

A dimensão epistemológica é a matriz que sustenta todas as demais dimensões do problema didático. Ela não apenas informa sobre o conteúdo em si, mas, sobretudo, permite compreender os modos pelos quais esse conteúdo é produzido, validado, transposto e legitimado nos diferentes níveis do sistema de ensino. É por isso que Gascón (2011) a define como uma dimensão nuclear, sem a qual não é possível pensar criticamente o ensino de matemática nem propor transformações didáticas que transcendam o senso comum pedagógico.

2.2. Dimensão Econômico-Institucional

A dimensão econômico-institucional de um problema didático trata da análise das condições organizacionais, normativas e políticas que regulam a vida das organizações matemáticas (OM) e didáticas (OD) dentro de uma instituição de ensino. Diferentemente da dimensão epistemológica, que focaliza o saber matemático em si, esta dimensão desloca o olhar para os contextos institucionais nos quais esse saber é selecionado, organizado e legitimado, considerando os mecanismos e contingências que moldam o que é possível ensinar, como ensinar e em que condições esse ensino ocorre.

Na formulação da TAD, essa dimensão assume centralidade ao permitir a transição da descrição do saber para a análise de sua transposição institucional, envolvendo múltiplos níveis de codeterminação didática. Gascón (2011), ao aprofundar essa perspectiva, aponta que é necessário estudar “a organização e o funcionamento das Organizações Matemáticas e Didáticas envolvidas no problema didático, em uma instituição determinada” (p.213), de modo a compreender a complexa rede de normas, regras, dispositivos e pressões externas que condicionam o processo de ensino.

A palavra “econômico”, nesse contexto, deve ser compreendida em seu sentido etimológico, derivado do grego *oikos* (casa) e *nomos* (regra). Assim, trata-se do estudo das normas que regem o funcionamento do ‘lar institucional’ da matemática escolar. Como explica Mineiro (2019, p. 24), essa dimensão “inclui as questões ligadas às contingências institucionais, às regras que afetam o desenvolvimento de atividades ligadas ao estudo da matemática nessas instituições”. Ela revela, portanto, os dispositivos institucionais que fazem viver (ou não) determinadas praxeologias matemáticas.

Essa análise implica considerar o processo de transposição didática como um fenômeno institucional multiescalar, que envolve desde os saberes produzidos nas instituições científicas (saber sábio), passando pela noosfera — o espaço intermediário de políticas curriculares, editoras, exames — até os saberes ensinados em sala de aula e os saberes efetivamente aprendidos pela comunidade de estudo (Chevallard, 1985/1991). O que se ensina não é, pois, uma simples derivação do saber acadêmico, mas o resultado de uma complexa rede de transformações e mediações que integram ou eliminam conteúdos conforme os valores, prioridades e limites impostos por cada instituição envolvida.

Segundo Bosch, Gascón e Barquero (2011), essa dimensão visa responder a questões como: *qual é o modelo epistemológico vigente em determinada instituição? Quais praxeologias sobrevivem nesse contexto e por quê? Que resistências e adaptações são exigidas ao propor mudanças nas organizações matemáticas?* Tais indagações não podem ser respondidas apenas com base na observação do que ocorre em sala de aula, mas requerem a consideração de uma pluralidade de instituições, incluindo as políticas educacionais, os currículos oficiais, os livros didáticos, os sistemas de avaliação, os programas de formação docente e os dispositivos de regulação institucional.

Além disso, não se pode esquecer que, quando nos perguntamos como as coisas são, surgem questões que só podem ser respondidas investigando o que acontece quando tentamos mudar as coisas numa determinada direção. Em resumo, poderíamos dizer que a atividade que deve ser realizada para responder às perguntas relativas à dimensão econômico-institucional de um problema didático está muito ligada ao que Chevallard (2010, no prelo) designou como a *análise clínica da didática*, e que engloba o que usualmente se denomina *engenharia didática*. Essa análise inclui a observação e a descrição detalhada das MO e das MD que existem efetivamente em determinadas instituições (utilizando como referência determinados MER e MDR), bem como o desenho, experimentação e avaliação de novas MD, construídas com os critérios mencionados (Gascón, 2011, p. 213, tradução nossa).

Gascón (2011) enfatiza que a análise econômico-institucional deve se apoiar em um modelo epistemológico de referência (MER) previamente construído, pois só assim é possível analisar com rigor as restrições e condicionantes que recaem sobre o ensino. A depender da forma como uma instituição interpreta a matemática (por exemplo, como técnica, como linguagem, como ferramenta de resolução de problemas ou como formalismo lógico), diferentes praxeologias serão promovidas, omitidas ou interditadas. Por isso, a TAD insiste que não se pode dissociar o saber da instituição onde ele vive.

Um aspecto fundamental da dimensão econômico-institucional é seu vínculo estreito com a gestão do tempo e dos recursos disponíveis, assim como com a lógica administrativa que rege o cotidiano das escolas. A divisão por disciplinas, a fragmentação dos conteúdos, a rigidez

dos calendários, a pressão das avaliações padronizadas e a escassez de tempo e materiais impactam diretamente na possibilidade de realizar determinadas práticas didáticas. Como observam Almouloud e Silva (2021, p. 123), “a dimensão econômico-institucional permeia a dimensão ecológica, uma vez que o nascimento, a vida e a possibilidade de falecimento e/ou ressurgimento [das praxeologias] prescindem das condições econômicas”.

Essas condições econômicas e normativas moldam as praxeologias que vivem na escola e regulam o que é considerado ‘ensino legítimo’. Assim, praxeologias que rompem com o modelo tradicional — por exemplo, propostas de modelização matemática, uso de tecnologias inovadoras ou ensino baseado em projetos interdisciplinares — enfrentam obstáculos institucionais importantes para se consolidarem como práticas viáveis. Tais obstáculos não derivam, necessariamente, da resistência dos sujeitos, mas da configuração institucional que organiza e legitima o fazer pedagógico.

Dessa maneira, a dimensão econômico-institucional amplia a análise didática ao situar o problema de ensino como uma questão coletiva e sistêmica, e não como mera responsabilidade individual do professor. Ela contribui para deslocar a crítica do plano das “metodologias do docente” para a reflexão sobre os dispositivos estruturais que limitam ou favorecem a emergência de práticas inovadoras no ensino de matemática.

2.3. Dimensão Ecológica

A dimensão ecológica de um problema didático diz respeito ao estudo das condições de possibilidade e das restrições que afetam a vida, a emergência e o desenvolvimento das praxeologias matemáticas e didáticas em um determinado sistema de ensino. Segundo Gascón (2011), essa dimensão constitui um eixo essencial para se compreender não apenas *o que* é ensinado, mas *porque* determinadas organizações matemáticas se mantêm, desaparecem ou não chegam a se instaurar nas instituições educativas.

Diferente das dimensões epistemológica e econômico-institucional, que se ocupam, respectivamente, do saber matemático e das regras institucionais que regulam sua transposição, a dimensão ecológica se propõe a investigar a ecologia institucional das praxeologias, ou seja, os ambientes nos quais essas praxeologias vivem, sobrevivem ou se extinguem. Esse estudo se articula com a ideia de que a vida de um objeto matemático no sistema didático depende de múltiplas condições: curriculares, pedagógicas, socioculturais, políticas, temporais, materiais e tecnológicas.

Como a dimensão ecológica de todo problema didático inclui, de certa forma, as dimensões epistemológica e econômico-institucional, pode-se afirmar, sob a abordagem da TAD, que todo problema didático é, em alguma medida, um problema de ecologia praxeológica ou, com mais precisão, que a didática se ocupa do estudo da ecologia institucional das praxeologias matemáticas e didáticas (Bosch & Gascón, 2007). Por isso, é preciso levar em consideração as restrições e condições impostas sobre as praxeologias em todos os níveis de co-determinação didática, desde os mais genéricos, como a sociedade e a civilização, até os mais específicos, como o tema e a questão matemática concreta (Gascón, 2011, p. 217, tradução nossa).

Como explica Gascón (2011), toda praxeologia matemática só pode emergir e se desenvolver dentro de um habitat que a acolha, sendo esse habitat definido como o tipo de instituição no qual se encontra o saber em questão. A esse habitat corresponde um nicho, isto é, a função ou o papel que o objeto de saber desempenha naquele contexto. Por essa razão, a análise ecológica de um problema didático deve levar em conta em quais instituições o objeto de ensino aparece, como ele é representado e com qual finalidade — e, sobretudo, por quê, em muitos casos, ele não aparece ou é deixado de lado.

Essa análise requer o reconhecimento de que o sistema didático é um sistema aberto, no qual coexistem diversas forças institucionais, culturais e sociais. Como afirma Chevallard (2002), essas forças atuam em diferentes níveis de codeterminação didática, desde os mais genéricos — como civilização, sociedade, escola e pedagogia — até os mais específicos — como disciplina, área, setor, tema e questão matemática concreta. Cada nível impõe restrições e oferece apoios que configuram a possibilidade (ou a impossibilidade) da emergência de novas praxeologias.

Nesse contexto, a TAD propõe a metáfora da didática como uma ecologia praxeológica, ou seja, um campo de estudo preocupado com as condições institucionais que regulam a vida das práticas matemáticas. A pergunta central da dimensão ecológica passa a ser: *por que o ensino de determinada praxeologia é como é e não de outro modo?* A resposta a essa pergunta não pode ser reduzida à ação individual dos professores ou aos recursos materiais disponíveis, mas deve considerar a complexa rede de determinações que atravessa o sistema de ensino.

Essa dimensão evidencia, ainda, que a vontade individual dos sujeitos institucionais — professores, gestores, autores de materiais — é insuficiente para promover mudanças significativas, caso não sejam modificadas as condições estruturais que sustentam as praxeologias dominantes. Em outras palavras, não se trata apenas de formar melhor os professores ou oferecer novas metodologias: é preciso compreender em quais níveis da escala de codeterminação estão situadas as restrições e o que pode ser feito para torná-las modificáveis.

Como explicitado em Bolea, Bosch e Gascón (2001), entre as principais restrições ecológicas que afetam a vida dos saberes escolares estão: (i) o tempo didático rigidamente cronometrado; (ii) os dispositivos de avaliação que impõem um ritmo próprio à aprendizagem; (iii) os manuais escolares que veiculam um currículo pré-formatado; (iv) a organização fragmentada dos conteúdos escolares; (v) e, sobretudo, a necessidade institucional de dar à matemática um estatuto de saber pronto, definitivo e inquestionável.

Tais restrições são sustentadas por uma pedagogia monumentalista, como a define Chevallard (2013), em que o saber é apresentado como um conjunto de monumentos a serem visitados pelos estudantes — belas estruturas, mas muitas vezes desvinculadas de sua razão de ser. Essa abordagem impede que o ensino de matemática se organize como um estudo significativo e funcional, rompendo a possibilidade de emergência de novas praxeologias articuladas a situações reais, interdisciplinares ou de modelização.

A dimensão ecológica, revela que a ausência ou a presença de determinadas praxeologias não é acidental. Ela decorre de uma configuração institucional complexa, que opera como um sistema ecológico, no qual os saberes, os discursos pedagógicos, os tempos, os espaços, os sujeitos e os instrumentos interagem e se influenciam mutuamente. Nesse sistema, as praxeologias matemáticas precisam disputar espaço para sobreviver, e muitas vezes são extintas antes mesmo de nascerem.

Dessa forma, investigar a dimensão ecológica de um problema didático implica deslocar o foco da análise da sala de aula para o conjunto de fatores que condicionam o ensino antes mesmo que ele aconteça. Como resume Almouloud e Silva (2021, p. 123), é necessário observar “as instituições envolvidas e as maneiras como descrevem e interpretam o saber matemático, as práticas existentes e as dificuldades que surgem ao se tentar modificar as Organizações Didáticas em uma determinada instituição”.

Essa compreensão é essencial para que possamos pensar em intervenções didáticas que não sejam apenas técnicas ou metodológicas, mas que considerem as condições ecológicas reais de existência dos saberes escolares. Ao fazer isso, ampliamos o escopo da análise didática para incluir as relações de poder, os discursos normativos e as práticas sociais que delimitam os contornos do possível em cada contexto educativo.

2.4. Dimensão da Linguagem

A introdução da dimensão da linguagem no estudo dos problemas didáticos marca um avanço significativo na Teoria Antropológica do Didático (TAD), à medida que permite

aprofundar a análise das formas como os saberes matemáticos são representados, comunicados e apropriados nas instituições escolares. Essa dimensão tem ganhado força especialmente a partir das contribuições de Brandão, Silva e Almouloud (2024), que a propõem como uma quarta dimensão fundamental, dotada de estatuto teórico equivalente à epistemológica, ecológica e econômico-institucional (Gascón, 2011).

A possibilidade da existência de dimensões secundárias, nos motivou a acrescentar a dimensão da linguagem, tendo em vista, que o registro de um objeto matemático ocorre por intermédio de representações, símbolos, técnicas, tecnologias e teorias específicas que proporcionam unicidade ao campo científico e ao expandir, são inseridos signos originais e internos à própria matemática. Todavia, a matemática não vive isolada no mundo e o homem, como um ser social, mobiliza diferentes conhecimentos para sobreviver e comunicar. É nesse sentido que a linguagem matemática circunscreve áreas de conhecimentos diversos, como nas Engenharias e na arte (Brandão, 2024, p. 367).

A linguagem, nesse contexto, não pode ser compreendida apenas como suporte da comunicação, mas sim como instância constitutiva do próprio conhecimento. Trata-se de um sistema de signos que atravessa todas as dimensões do problema didático, operando tanto na organização dos saberes quanto nas interações entre os sujeitos e o objeto matemático. Assim, investigar a linguagem é investigar os processos de significação e representação que modelam o saber escolar. Segundo Santaella e Nöth (2017), ao recorrer à semiótica como estrutura de análise, torna-se possível compreender a linguagem como fenômeno comunicacional e cognitivo, essencial à construção dos significados.

A noção de linguagem assumida nesta perspectiva amplia-se além da língua, incorporando diversas formas de expressão simbólica. Hjelmslev (1943, apud Santaella e Nöth, 2017) propõe que a linguagem seja entendida como totalidade, abarcando tanto os sistemas formais quanto suas manifestações discursivas e estilísticas. Isso é particularmente relevante no campo da matemática, cuja linguagem específica – repleta de símbolos, esquemas e códigos próprios – exige dos sujeitos capacidades de tradução e articulação entre diferentes registros semióticos (Duval, 1995).

Nesse sentido, Almouloud e Figueroa (2021) ressaltam que a linguagem matemática se constitui em um emaranhado de registros que envolvem a linguagem natural, os códigos formais, os esquemas gráficos e os artefatos culturais, todos mobilizados na prática didática. A análise desses elementos, a partir de teorias como a dos Registros de Representação Semiótica (Duval) e a Teoria da Mediação Semiótica (Bussi & Mariotti), reforça o papel central da linguagem nos processos de aprendizagem e institucionalização do saber.

No âmbito da TAD, a linguagem adquire ainda maior densidade ao ser integrada ao bloco tecnológico-teórico das praxeologias. Como destaca Brandão *et al.* (2024), a linguagem se insere de modo transversal na organização das práticas didáticas e matemáticas, desempenhando funções que vão da descrição de tarefas à legitimação dos saberes. A análise das formas de linguagem que permeiam essas práticas permite desvelar tanto os modos de apropriação do saber pelos estudantes quanto os mecanismos institucionais de validação do conhecimento.

É nessa trilha que se destaca a proposta de Brandão (2021), ao identificar quatro tipos de linguagem matemática que circunscrevem e inscrevem um problema didático: dictarizada, contrafactual, em curso e em (dis)curso. A linguagem dictarizada é aquela normatizada, atrelada aos saberes institucionalizados e às convenções da comunidade matemática. Já a contrafactual é marcada pela criatividade e pelo raciocínio abdutivo, configurando um espaço de invenção e subjetividade. A linguagem em curso refere-se ao uso imediato da linguagem pelo professor, em sua mediação didática, enquanto a linguagem em (dis)curso evidencia as interações entre professor e estudantes, nas quais se constroem significados de forma colaborativa e crítica.

Cada um desses tipos de linguagem está associado a diferentes saberes: epistemológicos, culturais, institucionais e subjetivos. A coexistência e o equilíbrio entre eles são fundamentais para a constituição de práticas pedagógicas mais equitativas e significativas. Como observa Brandão (2024), há uma proporcionalidade inversa entre os pares dictarizada/contrafactual e em curso/em (dis)curso, cuja articulação pode favorecer a ruptura com o paradigma monumentalista do ensino e a emergência do paradigma do questionamento do mundo (Chevallard, 2012).

Ao instituir a dimensão da linguagem como constitutiva dos problemas didáticos, cria-se a possibilidade de analisar os modos como os objetos matemáticos são apresentados, apropriados e ressignificados em diferentes contextos. Isso amplia o olhar da TAD para além dos objetos ostensivos, permitindo considerar também os discursos, os raciocínios, os gestos e os silêncios como parte integrante das práticas matemáticas. Em outras palavras, a linguagem deixa de ser mero instrumento e passa a ser considerada parte fundamental da própria constituição do saber.

2.5. Dimensão Tecnológica (proposta desta pesquisa)

A formulação da dimensão tecnológica dos problemas didáticos emerge como uma resposta às transformações profundas provocadas pelas tecnologias digitais nos contextos

escolares e nos processos de ensino e aprendizagem. Em especial, a crescente presença da inteligência artificial (IA) e de dispositivos informáticos no ambiente educacional impõe a necessidade de ampliar os marcos teóricos que sustentam a análise didática tradicional. A proposta desta quinta dimensão é compreender como os artefatos tecnológicos se integram às práticas pedagógicas e transformam a organização praxeológica dos saberes escolares.

Inspirada nos fundamentos da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a dimensão tecnológica se articula com o princípio de que os saberes escolares são produtos de transposições didáticas e institucionais, inseridos em sistemas complexos e mediados por técnicas, regras e tecnologias. Chevallard (2024) sugere que a TAD pode oferecer ferramentas relevantes para refletir sobre os desafios impostos pelas tecnologias digitais, especialmente diante de fenômenos como a tecnofobia, que expressa o desconforto e a resistência à mudança de práticas sedimentadas. Nesse sentido, a TAD propõe uma análise que ultrapassa o tecnicismo e busca compreender como os sistemas didáticos reagem e se reconfiguram diante da introdução de novas ferramentas.

Tenho que admitir que me surpreendeu um pouco descobrir, em uma página da web, uma lista de questionamentos que refletem o temor aos efeitos da inteligência artificial generativa. Poderíamos falar em tecnofobia. Este é um fato sobre o qual a TAD, a teoria antropológica do didático, pode dizer algo, justamente porque pretende ser uma teoria antropológica (Chevallard, 2024, p. 1, tradução nossa).

Essa perspectiva é aprofundada por Almouloud (2005, 2007, 2018), que destaca que os ambientes informáticos de aprendizagem exigem uma transposição adicional — a transposição informática — além da didática. Esta envolve a modelização do conhecimento para que possa ser representado e manipulado computacionalmente. Tal processo implica em uma tradução da linguagem matemática para linguagens operáveis pelos softwares e comprehensíveis pelos estudantes, revelando uma estreita relação entre a dimensão tecnológica e a dimensão da linguagem.

Almouloud (2007) defende que os ambientes computacionais alteram a relação do estudante com os objetos matemáticos e a própria natureza desses objetos, que passam a *viver* em uma realidade distinta daquela do papel e lápis. Os micromundos e os tutores inteligentes exemplificam essas mudanças, ao permitir que os alunos construam ativamente seus conhecimentos em ambientes dinâmicos e interativos. Essa mudança de cenário redefine o papel do professor, que passa de transmissor de saber para orquestrador de interações entre alunos, saberes e dispositivos tecnológicos (Trouche, 2005; Abboud-Blanchard, 2013).

A dimensão tecnológica, portanto, não se limita ao uso instrumental da tecnologia como ferramenta didática, mas implica uma reestruturação das praxeologias escolares, ou seja, das tarefas, técnicas, tecnologias e teorias envolvidas na produção do saber escolar (Chevallard, 1999). Essa reestruturação pode alterar significativamente as formas de ensinar e aprender, a organização das aulas, as estratégias avaliativas e os critérios de validação do conhecimento.

Em termos formativos, Saddo Almouloud (2018) destaca que a integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino deve ser pensada a partir de três eixos: o cognitivo, o prático/pragmático e o temporal. O primeiro diz respeito ao desenvolvimento das capacidades cognitivas mediadas pela tecnologia; o segundo trata das práticas pedagógicas em contextos digitais; e o terceiro considera o tempo necessário para formação, adaptação e amadurecimento do uso dessas tecnologias no cotidiano escolar. A formação docente, nesse contexto, deve ir além da capacitação técnica e incorporar reflexões críticas sobre o papel da tecnologia na constituição do saber escolar e na mediação do ensino.

Assim, ao propormos a dimensão tecnológica como constitutiva dos problemas didáticos, buscamos compreender como as tecnologias digitais — especialmente as de inteligência artificial — intervêm nos processos de transposição didática, influenciam os modos de interação entre os atores do sistema didático e reconfiguram as práticas pedagógicas. Trata-se de um campo em construção, mas essencial para compreender a complexidade da educação contemporânea e os novos desafios que emergem da inserção intensiva de artefatos tecnológicos no ensino.

3. A Dimensão Tecnológica: Fundamentos e Articulações

A incorporação das tecnologias digitais na educação tem produzido uma reconfiguração profunda dos espaços escolares e das formas de ensinar e aprender. Essa transformação, no entanto, não é apenas técnica, mas essencialmente epistemológica, pedagógica, institucional e social. Diante disso, propomos considerar a dimensão tecnológica como um novo elemento constitutivo dos problemas didáticos, articulando-se às demais dimensões já consolidadas na literatura (epistemológica, econômico-institucional, ecológica e da linguagem).

A proposta de uma dimensão tecnológica responde à necessidade de compreender os impactos da inserção de artefatos tecnológicos no sistema didático. Conforme argumenta Almouloud (2018), a integração das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ensino não pode ser reduzida ao mero uso instrumental dessas ferramentas, mas deve considerar os múltiplos eixos – cognitivo, prático/pragmático e temporal – que interferem nas práticas

docentes e nas aprendizagens dos alunos. A compreensão da dimensão tecnológica, portanto, implica reconhecer que as tecnologias não são neutras, mas portadoras de intencionalidades e modelagens que afetam a constituição dos objetos matemáticos e o modo como estes são ensinados.

Ele introduz a noção de “Transposição informática” para falar desse tratamento do conhecimento que permite representá-lo e implementá-lo num dispositivo informático. No contexto do desenvolvimento de um software educativo, essa Transposição é importantíssima e significa, de fato, uma contextualização do conhecimento que pode ter consequências importantes sobre os resultados das aprendizagens (Almouloud, 2018, p. 208).

Almouloud (2005, 2007, 2018) destaca que a presença das tecnologias digitais na sala de aula mobiliza processos de transposição informática – conceito cunhado por Balacheff (1994) – que se somam à transposição didática tradicional, conforme delineada por Chevallard (1991). A transposição informática refere-se às transformações exigidas para modelar e implementar o saber em dispositivos computacionais, o que envolve restrições próprias da linguagem da máquina, das interfaces e da representação dos objetos matemáticos. Assim, a dimensão tecnológica amplia o escopo analítico da transposição, introduzindo novas mediações entre o saber e os sujeitos da aprendizagem.

Nesse contexto, os ambientes digitais não apenas veiculam conteúdos, mas reconfiguram os modos de construção do conhecimento. Como enfatiza Almouloud (2007), os micromundos computacionais permitem ao aluno explorar conceitos matemáticos de forma autônoma e interativa, promovendo a emergência de novos significados e práticas. Essa abordagem se apoia na teoria da gênese instrumental, segundo a qual um artefato só se torna um instrumento de aprendizagem quando o sujeito desenvolve esquemas de uso próprios, transformando a ferramenta técnica em um operador didático (Rabardel, 1995; Trouche, 2005).

A introdução de ferramentas digitais exige, portanto, uma atenção especial às práticas de mediação docente. A orquestração instrumental (Trouche, 2005; Drijvers *et al.*, 2010) torna-se uma categoria-chave para compreender como o professor organiza o ambiente de aprendizagem, seleciona os artefatos, orienta a interação dos alunos e regula os processos de apropriação dos saberes mediados pelas tecnologias. Nessa perspectiva, a dimensão tecnológica envolve, simultaneamente, decisões pedagógicas, epistemológicas, institucionais e simbólicas.

Chevallard (2024), ao discutir os efeitos da inteligência artificial na educação matemática, destaca a relevância da dialética das mídias e dos meios como um modelo bem desenvolvido para pensar os usos tecnológicos em sala de aula. Para o autor, o verdadeiro

‘mestre’ em uma situação didática é o confronto entre diferentes sistemas (meios), e não uma autoridade externa ou um algoritmo cristalizado. Isso significa que o valor pedagógico de uma tecnologia reside em sua capacidade de provocar processos de validação, experimentação e produção de conhecimento por parte dos alunos e professores.

A dimensão tecnológica, nesse sentido, requer uma mudança de paradigma no ensino: não basta inserir ferramentas digitais no cotidiano escolar; é necessário repensar as práticas, os objetivos, os saberes e as formas de interação que essas tecnologias possibilitam ou tensionam. Como argumenta Almouloud (2018), a integração das TIC exige uma formação docente que vá além do domínio técnico, promovendo uma compreensão crítica e criativa das possibilidades pedagógicas abertas por esses recursos.

Assim, a caracterização da dimensão tecnológica propõe-se a analisar como os dispositivos informáticos reconfiguram os elementos constitutivos do sistema didático. Isso inclui as formas de representação e manipulação dos objetos matemáticos, os papéis atribuídos aos sujeitos da aprendizagem e os regimes de visibilidade e avaliação do saber escolar. Ao considerar tais aspectos, a dimensão tecnológica se apresenta como uma chave analítica indispensável para compreender os desafios e as potencialidades da Educação Matemática na atualidade.

Outro ponto importante a se considerar, trata-se da compreensão da dimensão tecnológica como parte integrante da modelização dos problemas didáticos, que exige o reconhecimento de suas articulações com as demais dimensões já consolidadas no arcabouço da TAD. Como proposto por Chevallard (2024), a análise de situações didáticas deve considerar o entrelaçamento das variáveis que compõem o sistema de ensino, e a presença das tecnologias digitais intensifica e torna mais complexo esse entrelaçamento.

A primeira articulação importante ocorre com a dimensão epistemológica, uma vez que a introdução de tecnologias digitais transforma a natureza e a estrutura dos objetos matemáticos ensinados. Ferramentas como micromundos, sistemas de álgebra computacional e plataformas de visualização dinâmica promovem reorganizações profundas nas praxeologias escolares. Almouloud (2007) salienta que esses ambientes exigem a reconstrução de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias, muitas vezes deslocando o foco do ensino de procedimentos fixos para a investigação e experimentação. Assim, a tecnologia altera o próprio modo de conhecer e, com isso, desafia os modelos epistemológicos de referência tradicionalmente adotados na escola.

A dimensão econômico-institucional também se reconfigura diante da presença das tecnologias. A aquisição, manutenção e integração de artefatos digitais dependem de condições estruturais, investimentos e políticas educacionais específicas. Como aponta Almouloud (2018), a integração eficaz das TIC requer apoio institucional contínuo, reorganização curricular, formação docente adequada e redefinição de critérios de avaliação. Além disso, os próprios dispositivos tecnológicos carregam uma lógica organizacional que interfere na gestão do tempo, no ritmo de aprendizagem e na natureza das interações em sala de aula, muitas vezes entrando em conflito com a lógica escolar tradicional.

Com relação à dimensão ecológica, a tecnologia redefine os ecossistemas institucionais nos quais o saber matemático é produzido e validado. A presença de sistemas inteligentes, plataformas adaptativas e tutores automáticos gera novos modos de convivência e sustentabilidade das práticas pedagógicas. Tais dispositivos podem, como destaca Almouloud (2007), tanto favorecer a emergência de praxeologias inovadoras quanto provocar a extinção de práticas tradicionais. Por outro lado, a dependência crescente de certos artefatos pode gerar novos tipos de precariedade e exclusão, exigindo análises que considerem o impacto ecológico da tecnologia no cotidiano escolar.

A dimensão da linguagem também é fortemente impactada. As tecnologias digitais não apenas operam com múltiplos registros semióticos – símbolos, gráficos, animações, comandos – como também demandam novas formas de leitura, escrita e interpretação. Almouloud (2005, 2007) argumenta que a transposição informática requer a tradução da linguagem matemática em formatos manipuláveis tanto por humanos quanto por máquinas, implicando a mediação por interfaces, algoritmos e linguagens computacionais. Essa mediação tecnológica afeta o modo como os sujeitos se relacionam com o conhecimento, com os outros e consigo mesmos. Como observa Chevallard (2024), o uso de agentes como o ChatGPT nos convida a repensar a didática não apenas como transmissão de conteúdos, mas como negociação constante entre múltiplos sistemas semióticos e epistemológicos.

Outro ponto de articulação importante é com o papel dos sujeitos no sistema didático. A dimensão tecnológica convoca os professores e estudantes a assumirem novos papéis, mais autônomos, colaborativos e reflexivos. Almouloud (2018) salienta que o uso das TIC favorece a constituição de uma inteligência coletiva, ao permitir o trabalho em equipe, a busca ativa por informação e a produção compartilhada de saberes. No entanto, essa transformação não ocorre espontaneamente: ela exige orquestração docente, redesenho curricular e práticas formativas que reconheçam a centralidade das tecnologias no mundo contemporâneo.

Nesse sentido, a dimensão tecnológica atua como uma espécie de transversalidade estruturante dentro do problema didático: ela atravessa todas as outras dimensões e, ao mesmo tempo, as reorganiza. É por isso que sua ausência compromete uma análise mais ampla e atualizada das práticas pedagógicas contemporâneas. Como afirmado em documento-base desta pesquisa, a consideração da dimensão tecnológica permite evidenciar um campo de problematização até então negligenciado pela TAD, mas fundamental para compreender a educação matemática na era digital.

A articulação entre a dimensão tecnológica e a dimensão epistemológica torna-se evidente quando observamos como as tecnologias digitais modificam os meios de acesso ao saber e o próprio estatuto do conhecimento. A introdução de ferramentas computacionais no ensino, como *softwares* de geometria dinâmica, sistemas de álgebra computacional ou ambientes de simulação, demanda a reconstrução das praxeologias escolares, influenciando diretamente o modo como o saber é organizado, validado e apropriado. A epistemologia do conteúdo matemático ensinado se transforma à medida que novos objetos, técnicas e representações emergem no interior dos ambientes digitais, reconfigurando o que se entende por “saber escolar” e exigindo novas formas de legitimação.

Nesse contexto, a dimensão tecnológica desafia os paradigmas epistemológicos clássicos, baseados na transmissão linear e cumulativa do conhecimento. Ao favorecer abordagens investigativas, exploratórias e colaborativas, os dispositivos tecnológicos estimulam o desenvolvimento de competências que vão além da repetição de algoritmos e fórmulas, valorizando a compreensão conceitual, a criatividade e a resolução de problemas. Isso implica deslocar o foco do ensino de um “saber estabelecido” para um “saber em construção”, cuja legitimidade decorre de sua origem científica, e de sua utilidade prática e relevância situacional. Em outras palavras, o conhecimento passa a ser concebido como algo contextual, dinâmico e negociado.

Assim, a dimensão tecnológica não pode ser dissociada da epistemológica, pois ambas se implicam mutuamente na constituição das situações didáticas. As escolhas tecnológicas feitas pelos professores – que ferramentas utilizar, como organizar as interações, que representações explorar – são também escolhas epistemológicas, pois determinam os modos de acesso, validação e apropriação dos saberes. Reconhecer essa articulação é fundamental para repensar as práticas pedagógicas na era digital, promovendo uma formação docente que comprehenda as tecnologias não como apêndices metodológicos, mas como elementos constitutivos de sua formação.

4. A Dimensão Tecnológica e a Inteligência Artificial

A inserção da inteligência artificial (IA) nos contextos educacionais reconfigura os modos de ensinar e aprender, exigindo uma reinterpretação da dimensão tecnológica no interior da Teoria Antropológica do Didático (TAD). Nesse cenário, comprehende-se que a tecnologia, especialmente quando mediada por sistemas de IA generativa, não é apenas um instrumento auxiliar, mas em nosso ponto de vista, torna-se um elemento constitutivo das praxeologias didáticas, impactando diretamente as formas de produção, transmissão e validação do saber matemático.

Chevallard (2024) aponta que a IA representa um novo tipo de *mídia*, ou seja, um sistema que fala, que emite mensagens, ao qual devemos submeter nossos sistemas de pensamento para confrontos epistemológicos. Isso se insere na chamada *dialética das mídias e milieux*, em que a IA assume o papel de mediador cognitivo e epistêmico, operando como dispositivo de produção de sentido. Tal perspectiva desloca a compreensão da autoridade epistemológica de uma instância magisterial para a construção dialógica e crítica entre sujeitos, artefatos e saberes mediados por tecnologia.

Terceiro e último ponto: assim como as outras *fontes*, o ChatGPT não pode ser considerado uma autoridade, um “mestre” indiscutível. Assim, tem o mérito de nos lembrar que a responsabilidade epistêmica por suas próprias afirmações, ou seja, aquelas que compõem R^v, recai indefinidamente sobre \hat{x} (Chevallard, 2024, p. 56, tradução nossa).

A inteligência artificial, nesse sentido, amplia o que Almouloud (2005) denomina de *instrumento de observação de comportamentos*, ao permitir análises em tempo real, registros de padrões e inferências que ajudam na construção do ‘modelo do aprendiz’. Esse modelo epistemológico difere de um simples sistema de medição de desempenho, pois exige uma compreensão profunda das concepções que orientam os erros e acertos dos estudantes. Ao lado disso, Balacheff (1994) já alertava para os desafios da *transposição informática*, ou seja, a transformação de um saber a ensinar em representações digitais adequadas ao processo de aprendizagem, o que se torna ainda mais complexo com os sistemas baseados em IA.

Assim, a IA não deve ser compreendida como mera substituta da ação docente, mas como parte de um novo ecossistema pedagógico, que reconfigura as praxeologias escolares. Como argumenta Almouloud (2018), a integração de tecnologias digitais demanda uma leitura multidimensional das práticas docentes, sendo necessário compreender a IA como portadora das dimensões epistêmica e técnico-prática, e não apenas como ferramenta operacional.

Entretanto, essa integração não ocorre sem tensões. Entre os professores, é comum um sentimento de desconfiança diante da ‘opacidade algorítmica’ que caracteriza a IA. Conforme reflete Chevallard (2024), o medo da IA (ou tecnofobia) nasce muitas vezes de uma expectativa ilusória de que o conhecimento deve sempre ser validado por uma figura magisterial visível e confiável. Ao contrário disso, a TAD propõe que o saber seja sempre fruto de validações parciais e dialógicas, em que os artefatos (como os sistemas de IA) participam da construção do sentido, mas não o determinam isoladamente.

Além disso, os impactos da IA na organização das tarefas escolares envolvem deslocamentos nos tipos de tarefas e técnicas mobilizadas. A IA atua como infraestrutura superestruturalizada que facilita certas operações (como cálculos ou produções textuais), mas exige uma nova formação técnica e crítica dos professores e alunos. Para tanto, é necessário preparar os sujeitos escolares não apenas para usar a IA, mas para compreendê-la e problematizá-la, desenvolvendo o que Chevallard (2024) chama de capacidade de “fazer falar os meios” e confrontar suas respostas com outros meios de validação.

Dessa forma, a articulação entre a dimensão tecnológica e a inteligência artificial demanda um olhar crítico e epistemologicamente informado. O uso da IA em contextos didáticos não é neutro: ele implica em reposicionamentos praxeológicos, epistemológicos e institucionais. Nessa perspectiva, a formação docente precisa incorporar novas competências para que professores possam integrar a IA de maneira consciente, ética e didaticamente fundamentada. A IA pode ser, então, tanto aliada quanto desafio, a depender da forma como é integrada à atividade didática e compreendida em seu potencial formativo e político.

5. Considerações Finais

Este capítulo teve como objetivo central apresentar e justificar a incorporação da dimensão tecnológica ao conjunto das dimensões que estruturam os problemas didáticos segundo a TAD. Ao longo da discussão, defendemos que a emergência de novos artefatos, especialmente os dispositivos de IA, tem transformado os meios pelos quais se ensina e se aprende, e, os próprios objetos do saber, as práticas docentes, as relações institucionais e os modos de significação dos conhecimentos escolares.

A partir da reconstituição das três dimensões fundamentais da TAD — epistemológica, econômico-institucional e ecológica — e da apresentação da dimensão da linguagem, proposta em estudos recentes (Brandão, Almouloud, 2024), argumentamos que a dimensão tecnológica constitui uma expansão necessária e coerente com a lógica interna da teoria. Sua inclusão não

tem caráter acessório, tampouco se propõe a suplantar as dimensões existentes, mas a ampliar o escopo analítico da modelização didática diante das transformações que marcam a cultura digital contemporânea.

Com base nos estudos de Almouloud (2005, 2007, 2018), Chevallard (2024) e outros autores do campo da Didática da Matemática, demonstramos que os artefatos digitais — e, em especial, os sistemas baseados em IA — introduzem novos tipos de mediações entre os sujeitos e o saber. Eles não apenas afetam a organização das praxeologias escolares, como também reconfiguram o papel do professor, os processos de aprendizagem, os modos de avaliação e as estruturas curriculares. Como tal, exigem análises didáticas próprias, que deem conta dos processos de transposição informática, orquestração instrumental, gênese instrumental e mediação semiótica.

A formulação da dimensão tecnológica, neste trabalho, anora-se na ideia de que os problemas didáticos são multidimensionais e que a ausência de uma perspectiva tecnológica compromete a capacidade analítica da TAD frente aos desafios contemporâneos. A educação escolar atual não pode mais ser pensada à margem dos dispositivos digitais que permeiam a vida cotidiana, o trabalho, a ciência e a cultura. Nesse sentido, reconhecer e problematizar os efeitos das tecnologias no ensino não é uma escolha metodológica, mas uma exigência teórico-política e epistêmica.

Além da fundamentação teórica, este capítulo buscou ilustrar, por meio de uma experiência concreta no ensino de GAP, como a dimensão tecnológica pode ser mobilizada na formulação e na resolução de um problema didático real. A análise da experiência evidenciou que a IA, quando integrada de forma crítica e intencional, pode potencializar o desenvolvimento da autonomia dos estudantes, favorecer a investigação matemática e ampliar as formas de mediação do professor. Contudo, também revelou que tais práticas dependem de condições institucionais e formativas que muitas vezes estão ausentes no contexto escolar.

A dimensão tecnológica, tal como propomos, exige uma formação docente que transcendia o domínio técnico e promova uma leitura crítica e reflexiva sobre os efeitos das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem. Essa formação deve contemplar os saberes específicos da matemática, os conhecimentos didáticos e pedagógicos e, sobretudo, as implicações epistemológicas, éticas e políticas da inserção da IA na educação.

Em termos de desdobramentos, reconhecemos que a consolidação da dimensão tecnológica como campo de estudo na TAD requer o aprofundamento de pesquisas empíricas e

teóricas que investiguem suas articulações com as demais dimensões do problema didático, especialmente em diferentes níveis e contextos de ensino. Também se torna necessário repensar os currículos de formação inicial e continuada de professores, de modo a incluir de forma sistemática e crítica o debate sobre as tecnologias e suas implicações no ensino da matemática.

Portanto, esperamos que este capítulo possa contribuir para a ampliação do debate sobre os fundamentos da Didática da Matemática na era digital, oferecendo subsídios teóricos e metodológicos para pesquisadores, formadores e professores que desejam compreender, intervir e transformar as práticas pedagógicas mediadas pelas tecnologias. A dimensão tecnológica, como propomos, não é apenas um novo olhar sobre a prática docente: é uma chave para compreender os modos de existência dos saberes escolares em tempos de mutações profundas no modo de viver, comunicar e aprender.

6. Referências

- Abboud-Blanchard, M. Modelos de integração de tecnologias em matemática. In: Ponte, J. P. da; Oliveira, H. (org.). *Tecnologia e ensino da matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2013. p. 95-125.
- Almouloud, Saddo Ag. Informática e Educação Matemática: algumas considerações epistemológicas. *Revista do Professor de Matemática*, São Paulo, n. 58, p. 24-31, 2005.
- Almouloud, Saddo Ag. A informática e a gênese dos conceitos matemáticos: reflexões epistemológicas. *Revista Zetetiké*, Campinas, v. 15, n. 29, p. 137-151, 2007.
- Almouloud, Saddo Ag; DA Silva, Maria José Ferreira. Estudo das três dimensões do problema didático de números racionais na forma fracionária. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática*, Brasil, v. 3, n. 2, p. 114–151, 2021. DOI: 10.36661/2596-318X.2021v3n2.12660. Disponível em: <https://periodicos.uffs.edu.br/index.php/EMSF/article/view/12660>. Acesso em: 6 abr. 2025.
- Almouloud, Saddo Ag; Figueroa, Teodora Pinheiro. Metassíntese de pesquisas sobre o papel da linguagem em didática da matemática. In: Rauen, Fábio José; Cardoso, Marleide Coan; Andrade Filho, Bazilio Manoel de; Morini, Lizandra Botton Marion (org.). *Linguagem e Ensino de Ciências e Matemática: Perspectivas de interfaces*. Editora Real Conhecer, 2021. p. 260- 288. ISBN 978-65-84525-04-7 DOI: 10.5281/zenodo.5618949.
- Almouloud, Saddo Ag. Integração de tecnologias digitais no ensino: um desafio epistemológico e político. *Revista Internacional de Educação Superior – RIESup*, v. 4, n. 1, p. 119-139, 2018. Disponível em: <<https://revistas.unifesp.br/index.php/riesup/article/view/11489>>. Acesso em: 4 abr. 2025.
- Balacheff, N. Didactical engineering as a framework for the conception of TEL situations. In: BISHOP, A. J. et al. (Ed.). *Mathematics education as a research domain: a search for identity*. Dordrecht: Kluwer, 1994. p. 465-470.
- Bolea, P.; Bosch, M.; Gascón, J. La noción de idoneidad didáctica en la investigación y en la formación de profesores. *Revista Educación Matemática*, México, v. 13, n. 1, p. 5-18, 2001.
- Bosch, M. & Gascon, J. (2005). La praxéologie comme unité d'analyse des processus didactiques. In Mercier, A. et Margolin, C. (Coord.), *Balises en Didactique des Mathématiques*, (pp. 107-122), La Pensée Sauvage : Grenoble.
- Bosch, Marianna et al. La modelización matemática y el problema de la articulación de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática*, v. 18, n. 2, p. 37-74, 2006.
- Brandão, Ana Karine Dias Caires. Dimensão da linguagem como constitutiva do problema didático: contribuições da semiótica peirceana. In: Almouloud, S. A.; Silva, J. L. da. (org.). *A dimensão da linguagem nos problemas didáticos: teoria, formação e prática docente*. Belém: EDUFPA, 2024. p. 49-74.
- Brandão, Ana Karine Dias Caires; Silva, Maria José Ferreira da; Almouloud, Saddo Ag. A inserção da dimensão da linguagem na análise do problema didático. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 26, n. 1, 2024.

- Chevallard, Yves. *La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique, 1991.
- Chevallard, Yves. *Les savoirs enseignés et leurs formes scolaires de transmission: un point de vue didactique*. 1997.
- Chevallard, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en didactiques des mathématiques*. Grenoble. La pensée Sauvage Éditions, v. 19.2, p. 221-265, 1999.
- Chevallard, Y. El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, v. 19, n. 2, p. 221-266, 1999. Traducción de Ricardo Campos. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Sevilla. Con la colaboración de Teresa Fernández García, Catedrática de Francés, IES Martínez Montañés, Sevilla. Disponible em: <http://www.ing.unp.edu.ar/asignaturas/algebra/chavallard_tad.pdf>. Acesso em: 23 Out. 2018.
- Chevallard, Yves. La dialéctica de los medios y los media. In: Almouloud, S. A.; SILVA, J. L. da. (org.). *A dimensão da linguagem nos problemas didáticos: teoria, formação e prática docente*. Belém: EDUFPA, 2024. p. 17-48.
- Duval, Raymond. Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. *Revista Educación Matemática*, México, v. 7, n. 1, p. 23-61, 1995.
- Drijvers, P. et al. Orchestrating mathematical learning: using instrumental genesis and the theory of didactical situations. *ZDM Mathematics Education*, v. 42, n. 1, p. 91-104, 2010.
- Farras, Berta Barquero; Bosch, Marianna; Gascón, Josep. Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática The three dimensions of the didactical problem of mathematical modeling. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, v. 15, n. 1, 2013.
- Gascón, Josep. Problemas epistemológicos y problemas didácticos: el caso de la educación matemática. In: LINS, R. (org.). *Educação matemática: aspectos da pesquisa*. Campinas: Papirus, 2001. p. 63-94.
- Gascón, J. Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203-231. 2011.
- Gascón, J. ; Bosch, M. Dimensiones de los problemas didácticos. In: Bosch, M. (org.). *La teoría antropológica de lo didáctico: en la obra de Yves Chevallard*. Barcelona: Graó, 2011. p. 123-144.
- Gascón, J. ; Bosch, M. ; Ruiz Munzón, N. / Un modelo epistemológico de referencia del álgebra como instrumento de modelización. In: *Documents: Un panorama de la TAD*. 2011 ; Vol. 10. pp. 743-765.
- Mineiro, Carlos Henrique R. A epistemologia da prática matemática no contexto da formação docente: uma leitura a partir da TAD. In: SILVA, J. L. da; Almouloud, S. A. (org.). *Dimensões do problema didático: contribuições da teoria antropológica do didático*. Belém: EDUFPA, 2019. p. 15-42.
- Rabardel, Pierre. *Les hommes et les technologies : approche cognitive des instruments contemporains*. Paris: Armand Colin, 1995.
- Santanella, Lucia; Nöth, Winfried. *Imagens da linguagem: semiótica da comunicação verbal e não verbal*. São Paulo: Iluminuras, 2017.
- Trouche, Luc. Instrumental genesis, individual and social aspects. In: *Proceedings of the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 4)*, 2005. p. 168–177.
- Valenzuela, Marta. Dimensiones fundamentales en la formulación de problemas didácticos de álgebra elemental. *Relime – Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, v. 24, n. 3, p. 297-328, 2021.

Capítulo 3

Interconexões entre as dimensões digital e didática da Matemática nos processos de ensino e aprendizagem

Teodora Pinheiro Figueroa³⁰

Saddo Ag Almouloud³¹

1. Introdução

A evolução da humanidade no que diz respeito a esfera das relações pessoais e interpessoais, do indivíduo diante das mudanças e do indivíduo em determinadas posições nas diversas esferas de uma sociedade; desde o período Paleolítico, em que o homem era nômade até o momento atual que estamos vivendo; implica em mudanças na forma de se relacionar devido à mudanças na forma de se comunicar, uma vez que os modos de saber-fazer e como saber-fazer acabam se ressignificando diante do processo de evolução.

A revolução industrial estabeleceu um marco nestas mudanças, pois a forma de viver do homem, passou de uma sociedade rural para uma sociedade industrial.

Esta pesquisa discorre sobre um olhar analítico para as mudanças que ocorreram com o desenvolvimento da tecnologia, até a era que nos encontramos, com o advento da Inteligência Artificial (IA), por meio da lupa das Teorias da Didática da Matemática³², mais especificamente sob o olhar da Teoria Antropológica do Didático (TAD), a qual segundo Chevallard (1999), estuda o homem e as suas interações no meio em que atua, estuda o homem aprendendo e ensinando.

Em todo o processo que envolve estas mudanças, pode-se dizer que na dimensão da Didática da Matemática, foco desta pesquisa, os sujeitos são marcados pelas impressões decorrentes do que Chevallard (2019) chama de sujeição institucional, a qual diante das inovações na esfera da tecnologia, em cada período da evolução da humanidade requer

³⁰ Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), <https://orcid.org/0000-0001-8680-5202>. teodora.pinheiro@gmail.com

³¹ Universidade Federal do Pará, <https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>, saddoag@gmail.com

³² A Didática da Matemática é vista como uma ciência que tem por objeto investigar os fatores que influenciam o ensino e a aprendizagem da Matemática, e o estudo de condições que favorecem a sua aquisição, pelos alunos (Almouloud, 2022, p. 19)

adaptações por parte dos sujeitos, os quais passam a ocupar diversas posições na sociedade, ora como aprendiz, ora como alguém que ensina o outro a aprender alguma coisa.

Pode-se observar este fato ao olhar para a configuração da sociedade atual, que com o advento da internet, o mundo passou a trilhar um caminho, que se pode dizer de hiper conectividade, tendo como consequência uma sociedade hiperconectada e codependente desta hiperconexão. Ocupamos a posição de usuários das redes de comunicação e ao mesmo tempo ocupamos a posição de sujeitos que ensinam aos outros a acessar tais tecnologias.

Esta hiperconexão agrega ao mundo uma nova dimensão: a Dimensão Digital, somos e estamos sujeitos aos artefatos³³ desta dimensão, principalmente por intermédio da intensificação da interação homem-máquina em diversos setores da sociedade.

Diante deste cenário, surgem muitas questões em relação à dimensão da Didática da Matemática, mais especificamente no que se refere a formação inicial e continuada de professores, como por exemplo: Quais os impactos de uma sociedade hiperconectada, na era da IA, e quais os impactos nas Instituições de Ensino, no que se refere as relações pessoais, interpessoais e institucionais com os objetos de conhecimento?

De modo a trazer contribuições e reflexões sobre esta questão, propomos uma análise teórica a respeito da Dimensão Digital sob a lupa da TAD, da Dimensão da Didática da Matemática, de tal forma a trilhar por caminhos na direção oposta à armadilha de uma cegueira didática³⁴ (ROINÉ, 2012) em meio à Dimensão Digital.

Esta análise é fundamentada nas Teorias da Didática e o seu processo de investigação requer um Percurso de Estudo e Pesquisa (PEP) (Chevallard, 2009), em um sistema autodidático $S(x, x, \heartsuit)$, em que o pesquisador em Didática da Matemática (x), percorre um processo de pesquisa orientado pelo aporte teórico das obras da Didática da Matemática, suas impressões e sujeições institucionais, bem como a produção científica de pesquisadores da área diante de uma aposta didática \heartsuit , a qual envolve a questão (Q): Quais os impactos de uma sociedade hiperconectada, em meio a era da IA, nas Instituições de Ensino, no que se refere as relações pessoais e interpessoais de seus sujeitos nos espaços de ensino e aprendizagem?

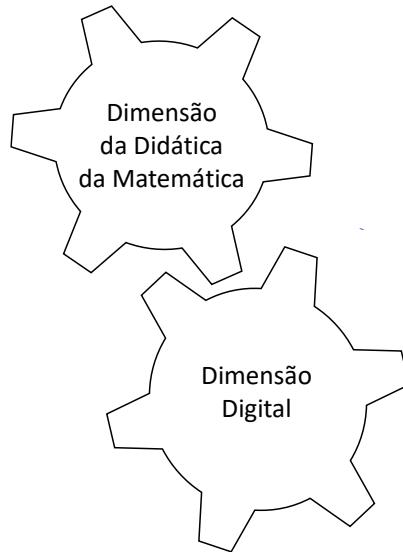
Para responder à esta questão, ressignificou-se este PEP denominando-o como um PEP-PE, Percurso de Estudo e Pesquisa do Pesquisador, cujo percurso é associado ao

³³ Os artefatos são as ferramentas/instrumentos físicos, signos e símbolos que medeiam as ações dos seres humanos em suas diferentes formas, constituindo a cultura. (Moraes, D.A.F.; Lima, C.M., 2019)

³⁴ De acordo com Roiné (2012), a cegueira didática é a impossibilidade de os professores considerarem os parâmetros didáticos e situacionais para atuar.

desenvolvimento de um projeto mecânico de sistema de engrenagens, no qual cada uma representa respectivamente conceitos da Dimensão da Didática da Matemática, conceitos da Dimensão Digital, os quais são abordados respectivamente de acordo com cada engrenagem (Figura 1) do sistema no decorrer do PEP-PE, de modo a trazer elementos que possam configurar o projeto “ideal” de acoplamento entre as mesmas, resultando em um sistema de transmissão de conhecimentos que levarão a um saber constituído que contribuirá para responder à questão Q do sistema $S(x, x Q)$.

Figura 1. Sistema de Engrenagens do PEP-PE



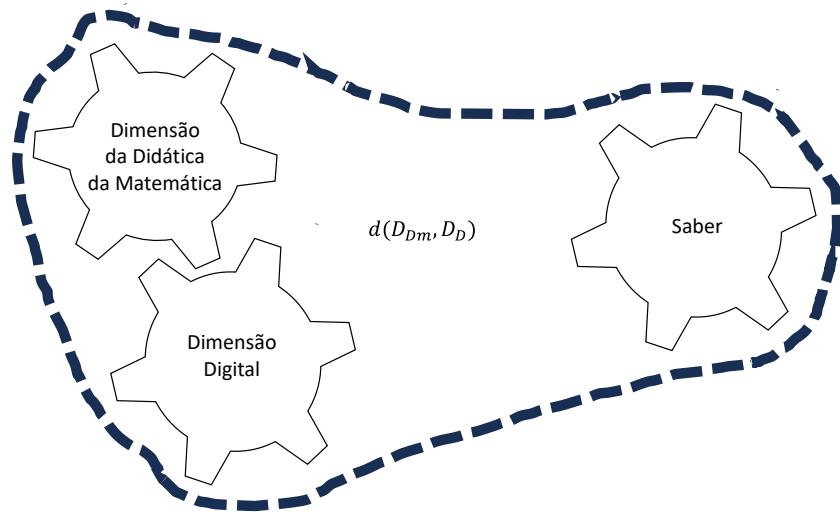
O PEP-PE é descrito em detalhes a seguir.

2. Percorso de Estudo e Pesquisa do Pesquisador (PEP-PE)

O PEP-PE tem como sistema didático inicial, o sistema $S(x, x, Q)$, um sistema autodidático, de forma a responder à questão Q : Quais os impactos de uma sociedade hiperconectada, em meio a era da Inteligência Artificial, nas Instituições de Ensino, no que se refere as relações pessoais e interpessoais de seus sujeitos nos espaços de ensino e aprendizagem?

O saber em jogo da questão Q refere-se a duas dimensões: a Dimensão Digital, a qual denotamos por D_D e a Dimensão da Didática da Matemática, a qual denotamos por D_{Dm} (Figura 2).

Figura 2. Sistema de Engrenagens do PEP-PE



Nesta pesquisa, a Dimensão da Didática da Matemática (D_{DM}) refere-se às Teorias da Didática da Matemática, em particular a Teoria Antropológica do Didático (TAD), a partir das quais investiga-se os fenômenos relativos aos processos de ensino e aprendizagem de matemática que ocorrem nas Instituições de ensino (I_e).

A Dimensão Digital (D_D) compreende o universo das ondas de inovações tecnológicas, as Instituições digitais (I_d) e seus artefatos, em que o constructo teórico seres-humanos-com-mídias³⁵ (Borba, 1999; Borba & Villarreal, 2005) se faz presente.

O PEP-PE sob a lupa da Teoria da Transposição Didática (TTD) traz à luz o sistema didático $S(x, x, \kappa)$, onde κ é o saber a ser constituído, apropriado pelas pessoas que ocupam a posição p de aprendiz nas Instituições I_d e I_e .

Este saber κ possui diferentes versões e/ou perspectivas em ambas as Instituições I_d e I_e , o que resulta na questão Q_I : O que é o saber κ na I_e e na I_d ? Dessa forma, no decorrer do PEP-PE denotamos $d(I_e, I_d)$ como a distância entre estas Instituições, cuja proximidade ou distanciamento pode ser um parâmetro durante o percurso investigativo que pode trazer à tona possíveis restrições e/ou tensões entre as Instituições. Além disso, ao se fazer analogia ao sistema de engrenagens, podemos dizer que se faz necessário uma manutenção do sistema, reciclagem, atualizações nos processos de ensino e aprendizagem, pois no decorrer do tempo, a proximidade pode gerar um nível de ruído decorrente do desgaste.

³⁵ O construto seres-humanos-com-mídias toma como base a ideia de que o conhecimento é produzido por coletivos pensantes de atores humanos e não humanos, em que todos desempenham um papel central.

Em função disso, podemos dizer que a medida da distância $d(I_e, I_d)$ é um parâmetro que precisa ser analisado e discutido nas instituições de ensino, da Educação Básica à Educação Superior, com uma certa periodicidade, pois diante dos avanços tecnológicos e da era da Inteligência Artificial, $d(I_e, I_d)$ pode contribuir para o planejamento de processos de Transposição Didática Externa (TDE) e Transposição Didática Interna (TDI), o que impacta diretamente nas respectivas Instituições das dimensões D_{DM} e D_D e no equipamento praxeológico dos indivíduos dessas Instituições seja na posição p de professor ou aluno que se sujeitam a elas.

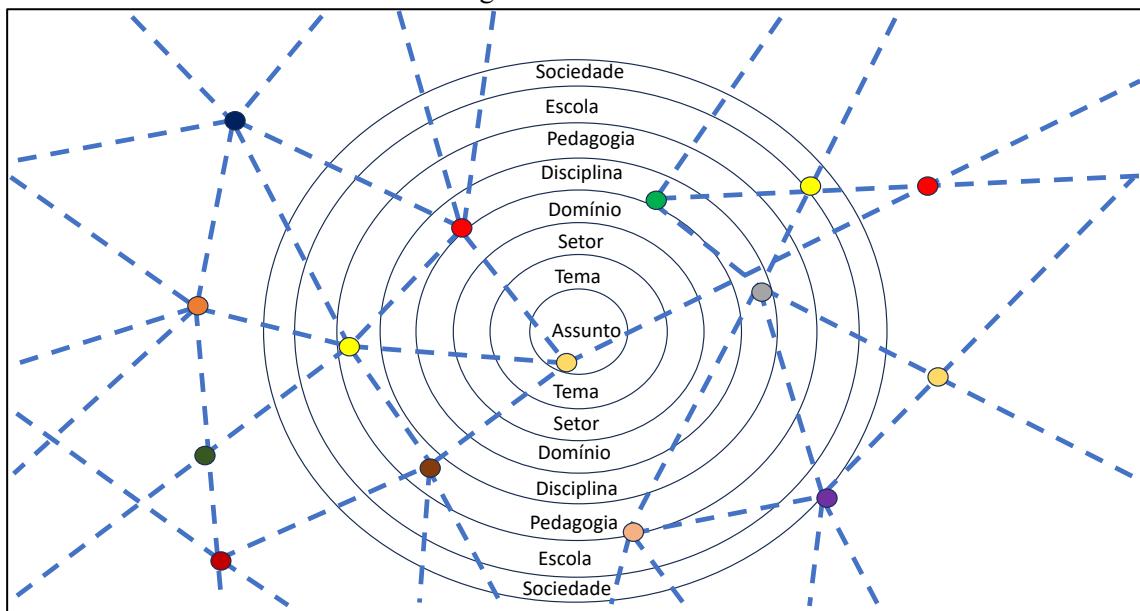
A forma como se dão os processos de TDE e TDI está associada às condições e restrições existentes entre os níveis de Co-Determinação Didática, constructo que será descrito em detalhes.

3. Codeterminação Didática

Nos processos de pesquisa e investigação a respeito dos fenômenos didáticos que ocorrem durante os processos de ensino e aprendizagem em meio as condições e restrições institucionais, faz-se necessário direcionar o olhar além das fronteiras da sala de aula, por meio de um modelo proposto por Chevallard (2002) a respeito da hierarquia dos níveis institucionais que contribuem para investigar o que acontece na sala de aula.

Apresenta-se na Figura 3 uma releitura do cenário mundial atual.

Figura 3. Sociedade Atual



Estas conexões simbolizadas pelas redes de conexão (linhas tracejadas com pontos coloridos) são o “pano de fundo” atual das esferas de nossa sociedade, onde, com as inovações tecnológicas, prevalece o conceito de destruição criativa (Schumpeter, 1984), que segundo o economista Joseph Schumpeter, tem remodelado o mundo ao longo do tempo. Em um processo contínuo, o velho dá lugar ao novo, destruindo e criando setores e, impactando diretamente em cada e/entre cada nível de co-determinação didática (Sociedade ↔ Escola↔ Pedagogia↔ Disciplina↔ Domínio↔ Setor↔ Tema↔ Assunto), a partir de mudanças nos modos de “saber-fazer”, diante da intensificação da interação homem-máquina por intermédio dos meios de comunicação presentes no cotidiano das pessoas: mídias sociais, sistemas automatizados, nos mais diversos postos de serviços e de atendimento à população.

Imersos por essas ondas de inovações tecnológicas (Figura 3), percebe-se o quanto a sociedade passou por um processo de adaptação e/ou sujeição ao estreitamento de uma relação pessoal com artefatos de uma Dimensão Digital, em que tudo está em constante evolução, desde a 1^a onda com a revolução industrial, até a 6^a onda diante da era da IA. Segue uma descrição dessas ondas conforme Graglia; Huelsen (2020, p. 5-9):

- Primeira Onda: impulsionada por novas tecnologias como a invenção da máquina a vapor em 1712 por Thomas Newcomen (1664 a 1729) e seu aperfeiçoamento por James Watt (1736 a 1819). Idade do Vapor (1845–1900)
- Segunda Onda: modernas instalações de transporte e comunicação (destacando-se o sistema ferroviário, o telégrafo, o navio a vapor), o cimento Portland Produção em Massa (1950–1990)
- Terceira Onda: “caracterizada entre o final do século XIX e primeira metade do século XX, foi uma revolução tecnológica que teve entre as principais inovações o desenvolvimento da eletricidade, do motor a combustão interna, de produtos químicos e das primeiras tecnologias de comunicação, como invenção do telefone e do rádio e a difusão do telégrafo.”
- Quarta Onda: “o início da segunda metade do século XX, é marcada pelo primeiro computador, o ENIAC, desenvolvido em 1946 por Mauchly e Eckert, a invenção do transistor pelos físicos Bardeen, Brattain e Shockley, da Bell Laboratories, pela invenção do circuito impresso em 1957 por Jack Kilby da Texas Instruments e do microprocessador em 1971 por Ted Hoff da Intel Corporation.”
- Quinta Onda: “início na década de 90 do século XX, é fortemente baseada nas tecnologias da informação e comunicação - gerando a expansão da telefonia celular digital, a explosão das redes sociais digitais, o crescimento da indústria de software, o desenvolvimento do UHF (Ultra High Frequency) RFID (Radio Frequency Identification) pela IBM, o desenvolvimento das tecnologias de geolocalização, como GPS (Global Positioning System), AGPS (Assisted Global Positioning System), GSM (Global System for Mobile Communications) e o surgimento das novas mídias sociais digitais.”
- Sexta Onda: “pode ter como tecnologias condutoras a inteligência artificial, a biomedicina, o motor a hidrogênio e os robôs (SHIMULA, 2009). Seus efeitos serão alavancados pela digitalização e pelo aumento exponencial do poder computacional, ambos legados da onda anterior, que criou circunstâncias favoráveis para o desenvolvimento de novos produtos e serviços. A digitalização trará possibilidades transformadoras no campo da realidade virtual, que estará presente em diversas situações corriqueiras da vida comum. Novos modelos de negócio incrementarão o fluxo de comunicação e interligação entre diferentes grupos e proporcionarão o

desenvolvimento de novas formas de colaboração, negócios e ecossistemas sociais. Robôs serão capazes de fazer coisas triviais feitas por humanos, desde colher flores até produzir arte.”

A evolução da Dimensão Digital tem perpassado a dimensão da Didática da Matemática imprimindo nas relações de seus sujeitos, aluno, professor e pesquisadores da área, as influências das fases da tecnologia digital a partir da necessidade de praxeologias mistas, compostas por artefatos de ambas as Instituições. Há, portanto, a necessidade de ampliar a visão do saber κ explorando e validando novas técnicas e tecnologias e, dessa forma buscando a distância ideal $d(I_e, I_d)$ de tal forma que a evolução da Dimensão Digital não sobreponha a Dimensão da Didática da Matemática. Assim, a distância ideal $d(I_e, I_d)$ é a distância que respeita os limites de fronteira entre I_e e I_d , de modo que as interações aluno, professor e saber se façam predominantes nos processos de ensino e aprendizagem.

Como se dão os processos de TDE e TDI, impacta diretamente nesta medida de distância $d(I_e, I_d)$ e, consequentemente, no equipamento praxeológico dos indivíduos, $E(x)$, que pode ser ampliado e/ou ressignificado, denotando por $E_l(p)$, o equipamento praxeológico do indivíduo na posição p de ambas as Instituições.

Segundo Borba e Vila Real (2005), ao usar computadores não por convicção de que eles podem ser benéficos, mas porque foi obrigatório, os professores podem tentar usá-los o menos possível e, quando o fizerem, fazer as mudanças mínimas necessárias na estrutura do currículo e nas práticas nele incorporadas. Este é um exemplo de que a distância $d(I_e, I_d)$ precisa ser constantemente discutida para ajustes entre as instituições I_e e I_d de tal modo que o sujeito possa estabelecer relações pessoais com o saber de ambas as instituições.

Portanto, a resposta à questão Q_1 : O que é o saber κ na I_e e na I_d ? a qual denotamos por R_1 , depende de como se dão os processos de TDE e TDI e do que se conhece a respeito do constructo teórico Homem com mídias.

Borba *et al.* (2023) trazem uma síntese de suas pesquisas desde que o constructo teórico Humanos com mídia foi desenvolvido. O resgate histórico dos autores referente ao desenvolvimento deste constructo teórico revela que as mídias têm agência, ou seja, as mídias são agentes que proporcionam aprendizado na interação Humanos com mídias. Os autores consideram mídias: computadores, vídeos, papel, lápis, salas de aula regulares, lares, bibliotecas e, que Humanos com mídias podem se referir a Humanos-com-software-Internet e Humanos-com-vídeos, Humanos-com-lares, Humanos-com-coisas e outras variações, também se referem a coletivos de Humanos-com-mídia.

Para a compreensão da evolução desta interação Humanos com mídias, segue um breve relato, segundo Borba *et al.* (2023, p. 4-6) sobre as fases da tecnologia digital e a interação Humanos com mídias:

- 1a fase: software LOGO que permitiam construir objetos geométricos, introdução de laboratórios de informática nas escolas
- 2a fase: softwares para representar múltiplas funções geométricas e geometria dinâmica.
- 3a fase: popularização da Internet.
- 4a fase: aumento da banda de internet, com isso o volume de conteúdos deixa de ser um limitante, viabilizando o uso da internet para compartilhamento de vídeos, realização de atividades síncronas e trabalho em espaços virtuais compartilhados.
- 5a fase: Apresentada como uma resposta às demandas impostas pela pandemia do COVID-19, reafirmando o protagonismo do vídeo digital e a necessidade de lançarmos novos olhares para os enlaces entre as tendências em Educação Matemática.

Será que a 6^a fase será marcada pela IA?

Neste caso, surge a questão Q_2 : Existe um parâmetro sinalizador para que ocorra um perfeito acoplamento entre a Dimensão Digital e a Dimensão da Didática da Matemática de modo a garantir a redução de possíveis tensões e ruídos em suas respectivas Instituições no sistema de engrenagens em que elas se encontram?

Para responder a esta questão Q_2 faz-se necessário um sistema didático $S_2(x, O_{D_{DM}}^{D_D}, Q_2)$, de modo a responder à questão Q_2 a partir de um resgate histórico da evolução nos Modelos Educacionais desde a Educação 1.0 até a Educação 5.0 em nossos dias atuais, de tal forma a explicitar como se deram as relações entre professor, aluno e saber em cada etapa da evolução educacional, de forma a trazer à tona uma conexão entre as duas dimensões.

Segue um breve relato deste resgate histórico sob a lupa da TAD.

4. Evolução nos modelos educacionais sob o olhar da TAD

A TAD é uma ampliação teórica da Teoria da Transposição Didática (TTD). Segundo Chevallard (2009), ela apresenta algumas noções fundamentais:

- ✓ Objeto (o): qualquer entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo.
- ✓ Relação pessoal ($R(x; o)$): relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o . Dizemos que o existe para x se a relação pessoal de x com o for diferente de vazio, que denotamos por $R(x; o) \neq \emptyset$.
- ✓ Pessoa (x): Todo indivíduo é uma pessoa. O sistema de relações pessoais de x evolui no decorrer do tempo: objetos que não existiam para ele passarão a existir; outros

deixarão de existir; para outros, a relação pessoal de x muda. Nessa evolução, o invariante é o indivíduo; o que muda é a pessoa.

✓ Instituição (I): é um dispositivo social, em que as pessoas x se sujeitam ao ocupar as diferentes posições p oferecidas em I , pondo em jogo os seus próprios modos de fazer e pensar - isto é, suas praxeologias.

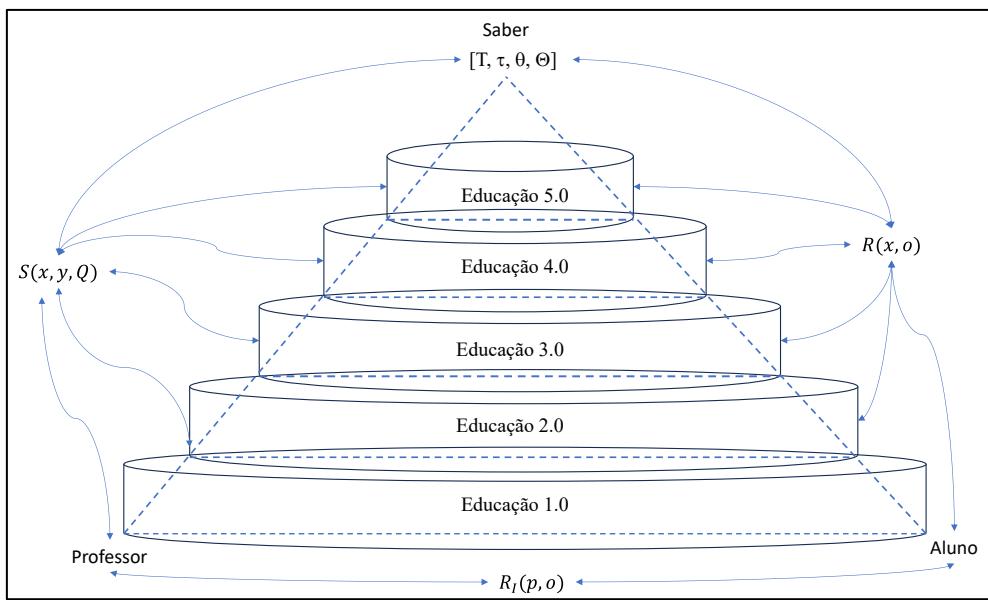
A noção de praxeologia está no cerne da TAD. Essa noção generaliza várias noções culturais comuns - as de saber³⁶ e saber-fazer. Uma praxeologia (\mathcal{P}) é formada pelo bloco práxis $[T, \tau]$, saber-fazer, e o bloco logos $[\theta, \Theta]$ discurso sobre a práxis, em que T se refere ao tipo de tarefa contendo ao menos uma tarefa t , τ a técnica ou modo de se realizar uma tarefa do tipo T , θ a tecnologia, isto é, um discurso sobre a técnica, e Θ a teoria, ou justificativa da tecnologia.

As praxeologias vivem nos sistemas didáticos presentes nas situações didáticas. Ao que nos referimos à situação didática, é o conjunto das relações estabelecidas em um sistema didático $S(x, y, o)$ - x sendo um aluno ou coletivo de alunos, y é o diretor do estudo podendo ser o professor, e o é o objeto matemático que está sendo estudado -, as quais envolvem as relações $R_I(p; o)$, relação que cada sujeito x , na posição p dentro da instituição I , deve manter idealmente com o objeto o e a relação $R(x; o)$, é a relação que cada sujeito tem com o objeto o . Brousseau (1978) assevera que estas relações são estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno x e/ou um grupo de alunos (X), um certo *milieu* e um sistema educativo, professor (y), para que esses alunos adquiriram um saber constituído ou em constituição.

A Figura 4 apresenta estas noções no cenário da evolução dos Modelos Educacionais, desde o que se denomina de Educação 1.0 até a Educação 5.0. Por meio de uma lupa da Didática da Matemática sobre este cenário, observa-se um esboço de um triângulo didático, cuja base varia à medida que ele perpassa cada etapa da evolução. A variação da dimensão desta base representa a variação no distanciamento da relação professor aluno em cada etapa da evolução.

³⁶ Neste texto fazemos a diferença entre **saber** e **conhecimento**, conforme definidos por Margolinhas (2014, p. 15): O conhecimento é o que realiza o equilíbrio entre o sujeito e o milieu, o que o sujeito coloca em jogo quando investe uma situação. O saber é uma construção social e cultural, que vive em uma instituição e que é por natureza um texto (o que não significa que esteja sempre escrito materialmente). O saber é despersonalizado, descontextualizado, destemporalizado, formulado, formalizado, validado e memorizado. O conhecimento, portanto, vive em uma situação, enquanto o saber vive em uma instituição. Para definir um conhecimento, é necessário descrever as situações que o caracterizam. Para definir um saber, é necessário determinar a instituição que o produz e legitima, o que às vezes leva a considerar várias instituições e seus possíveis conflitos. (tradução nossa)

Figura 4. Educação 1.0 à Educação 5.0



Segundo Gerstein (2014):

- ✓ Educação 1.0, 1^a. Revolução Industrial (presencial, baseada em conteúdos, evolui paralelamente ao início da Internet em meados da década de 1990): o professor é o transmissor de conhecimento, os alunos são vistos como receptores do conhecimento. Existe, portanto, um distanciamento na relação aluno-professor e o saber. $R(x, o)$ não é levado em consideração. Neste caso, o que predomina é a forma como se dá a relação $R_I(p; o)$, em que p se refere à posição do professor na Instituição. Pode-se dizer que o sistema didático $S(x, y, Q)$ é um sistema estático, centrado no professor (y) e, consequentemente, a aposta didática (Q) também.
- ✓ Educação 2.0, 2^a. Revolução Industrial (presencial e prática, a partir dos anos 2000): O professor assume uma postura construtivista, tornando-se um facilitador. Os alunos deixam de ser apenas receptores e assumem a postura de interação e compartilhamento dos objetos de conhecimento por meio de atividades de aprendizagem dentro e fora da sala de aula e usando tecnologias (texto, áudio, vídeo, música, imagens etc.). Nesta etapa, ocorre uma maior aproximação (ver base do triângulo didático, Figura 4) entre as relações aluno-professor e saber. Pode-se dizer que o sistema didático $S(x, y, Q)$ é um sistema em evolução, no sentido de que a interação com as ferramentas tecnológicas, amplia o *milieu* e, consequentemente, a aposta didática (Q), é determinada durante os processos de ensino e aprendizagem nas interações entre aluno, professor e saber.

- ✓ Na Educação 3.0, 3^a. Revolução Industrial (híbrida, meados de 2007): uma abordagem mais heutagógica e conectivista de ensino e aprendizagem. O aluno aprende com o professor e os seus colegas de forma colaborativa em um ensino híbrido (presencial e a distância) e envolve vários recursos tecnológicos. É uma etapa de maior aproximação entre o aluno, professor e o saber, onde também ocorre uma evolução na configuração dos sistemas didáticos, devido a possibilidade de interação em diversos meios de aprendizagem, possibilitando uma maior ampliação do milieu, resultando em diversos olhares sobre a aposta didática.
- ✓ Educação 4.0, 4^a. Revolução Industrial (surgiu na Alemanha em 2012): Espera-se que os alunos produzam e adaptem novas tecnologias que contribuirão para o desenvolvimento das sociedades neste processo (Puncreobutr, 2016, p.93-94). Nesta etapa, espera-se que as relações entre professor, aluno e saber sejam estabelecidas na forma de colaboração, cooperação, em que o professor assume a posição de mediador e/ou observador.

Segundo Alharbi (2023):

- ✓ Educação 5.0 (o termo surgiu no Japão a partir de 2016): é uma aprendizagem focada no aluno, na resolução de problemas reais e, no desenvolvimento do pensamento criativo e, em uma cultura de aprendizagem baseada em valores. O professor deve atuar como facilitador de recursos, mentor, mediador da aprendizagem. Segundo o autor, a educação moderna depende mais da fonte de conhecimento em vez de apenas no conhecimento.

Da Educação 4.0 à Educação 5.0, observa-se que se faz necessário um estreitamento maior da relação aluno, professor na busca da apropriação e institucionalização do saber para a resolução de problemas com o auxílio da tecnologia. Por ser uma transição que envolve um letramento digital com foco na inovação e na solução de problemas reais, requer que o professor se aproprie dos artefatos da dimensão digital, os quais estão em constante evolução.

Dessa forma, observa-se que as relações pessoais $R(x, o)$ e as relações Institucionais $R_I(p; o)$ são impactadas pelas evoluções da sociedade e, de um mundo hiperconectado.

Os impactos nestas relações implicam diretamente na forma como os sistemas didáticos $S(x, y, Q)$ se configuram. A forma como se dá esta configuração funciona como um parâmetro quantificador do quanto os equipamentos praxeológicos dos alunos e professores mudam no decorrer das evoluções. Na Figura 4, $R_I(p, o)$ está na base da figura representando um

determinante na ampliação do equipamento praxeológico de ambos, pois no que diz respeito a evolução dos modelos educacionais, esta ampliação depende do quanto as Instituições de ensino estreitam conexões com estas evoluções em seus processos de Transposição Didática.

O quanto as instituições de ensino acompanham estas evoluções diz muito sobre a noosfera, a qual faz parte do pano de fundo dos processos de transposição didática externa do saber sábio ao saber a ensinar.

Ao observar estas evoluções e o contexto educacional diante da pandemia do COVID-19, apesar de todas as evoluções desde a Educação 1.0 até a Educação 4.0, pode-se dizer que não houve um estreitamento das relações entre os professores e alunos e o saber com os artefatos da dimensão digital. A pandemia do COVID-19 revelou outra dimensão: a dimensão da exclusão digital, conforme relata Ogundari (2023).

Além disso, segundo Winter (2021), de acordo com a Pesquisa Internacional sobre Ensino e Aprendizagem da OCDE (Organization for Economic Cooperation and Development), 40% dos professores não tiveram desenvolvimento profissional na utilização da tecnologia e quase 20% consideraram ter necessidade de mais formação.

Neste caso, na perspectiva da didática para responder à questão Q_2 : Existe um parâmetro sinalizador para que ocorra acoplamento ideal entre as Dimensão Digital e Dimensão da Didática da Matemática de modo a garantir a redução de possíveis tensões e ruídos em suas respectivas Instituições no sistema de engrenagens em que as mesmas se encontram? faz-se necessário estudar o que vem acontecendo no âmago das relações $R(x, o)$ e $R_I(p; o)$, p sendo a posição de professor e/ ou aluno, diante da evolução na Dimensão Digital e seus impactos nas relações aluno, professor e saber no universo da Dimensão da Didática da Matemática.

Segundo Chevallard (2019), o estudo destas posições revela as condições e restrições que o sujeito (professor ou aluno) é submetido na Instituição a qual pertence. Para o estudo destas posições a TAD leva em conta o conjunto de todas as condições e restrições, que estão distribuídas em uma escala de níveis de codeterminação didática.

Neste caso, dando continuidade ao PEP-PE tendo como pano de fundo um sistema autodidático $S_2(x, O_{DM}^{DD}, Q_3)$, onde Q_3 é: Como germinam as relações $R(x, o)$ e $R_I(p, o)$ em meio a evolução da Dimensão Digital?

Para responder a esta questão, segue um breve relato sobre o nosso momento atual diante da sexta onda tecnológica e possível sexta fase da tecnologia digital e interação humanos com mídias, ou seja, a era da Inteligência Artificial.

5. Inteligência Artificial (IA): evolução

O conceito de IA surgiu em 1950 quando cientistas e pesquisadores começaram a se perguntar se seria possível criar máquinas capazes de pensar como seres humanos. Essa questão inspirou pesquisadores da época como Alan Turing e John McCarthey que foram os primeiros a tentar explorar essa tecnologia.

De acordo com os resultados de pesquisa (HILDMANN; HIRSCH, 2024; BLAGOJ *et al.*, 2020), apresentamos o desenvolvimento da IA em três gerações.

A 1^a geração de IA foi caracterizada pelos softwares que executavam tarefas pré-estabelecidas sem a capacidade de aprender ou melhorar com a experiência. O exemplo mais emblemático desta 1^a geração foi o Deep Blue que derrotou o campeão de xadrez Garry Kasparov.

Em meados de 2010 entramos na 2^a geração da IA quando surgiram as técnicas de machine learning ou aprendizado de máquina em português. Estas técnicas permitiram que as ferramentas aprendessem a partir de dados disponíveis podendo ainda melhorar suas capacidades com o tempo. Dessa forma, a IA se tornou presente em nosso dia a dia, mesmo que não notemos.

Sabe quando você acessa um site e logo se depara nos destaques com aquele produto que estava querendo? Foi uma ferramenta de IA equipada com machine learning que analisou o seu comportamento na rede para oferecer o produto certo para você.

Mas, atualmente estamos na era da 3^a geração de IA, também chamada de IA generativa, em que ferramentas inteligentes são capazes de ler, interpretar e aprender com grandes conjuntos de dados, identificar padrões complexos e gerar conteúdo.

No que diz respeito a dimensão da Educação, o estudo e a pesquisa para a utilização da IA para criar companheiros de aprendizagem ou em inglês “learning compain” ou agentes pedagógicos está sendo estudada há pelo menos três décadas. Nesta época, trabalha-se com avatares, pequenos robôs para interagir com o aluno³⁷. Porém recentemente, uma nova onda de

³⁷ <https://sites.icmc.usp.br/sisotani/>

inovação em poucos meses vem causando impacto em nossa sociedade, o ChatGPT, lançado em 30/11/22 pela empresa OpenAI.

6. ChatGPT

Segundo Cheng *et al.* (2023), ChatGPT (Generative Pre-trainTransformer) é um modelo de linguagem grande (LLM) baseado na arquitetura GPT-3.5. Ele usa a lógica de “big data + big computing power + algoritmo = intelligentmodel”, que pode extrair informações valiosas de dados massivos de texto e, por meio de treinamento, gerar trabalhos mais complexos e humanizados para saída de respostas e feedback na forma de texto, assim como para realizar o diálogo humano-computador multi-round com a ajuda da linguagem natural.

O funcionamento do ChatGPT se baseia em algoritmos de redes neurais profundas, modelos que se inspiram na organização do sistema nervoso humano e se apoiam em aprendizado de máquina, um campo de estudo que permite extrair padrões de grandes volumes de dados e fazer previsões a partir deles. Esse tipo de sistema funciona com base em unidades de processamento interconectadas em várias camadas, da mesma forma que os neurônios se conectam por sinapses.

O Chat inteligente apresenta para a sociedade uma nova forma de se usar e explorar a inteligência artificial, uma tecnologia que até então era restrita a profissionais altamente capacitados. Esses sistemas de IA não são autônomos, porque todo o processo de sua implementação envolve decisões humanas. São os humanos que definem as tarefas, que montam a base de dados para treinamento do modelo, são os humanos que definem como os resultados deverão ser apresentados, são os humanos que interpretam os resultados, são os humanos que usam os resultados.

Então, em todo o processo, em todas as etapas, tem decisão humana, isso significa que o processo é permeado por subjetividade humana. Logo, quais as habilidades são imprescindíveis para estas tomadas de decisões? Segundo Jarrahi (2023), as limitações e erros de informação produzidos a partir dessas novas tecnologias têm mostrado a necessidade de inteligência humana para intervir e fazer julgamentos em torno de informações factuais, aliviando insights tendenciosos e garantindo fontes originais de conteúdo. O autor relata que não são apenas os humanos que devem adquirir novas capacidades. Os sistemas de IA também devem apresentar um conjunto necessário de competências para serem parceiros valiosos para os humanos nos ambientes de trabalho futuros.

Esta observação do autor traz à luz a resposta R_3 à questão Q_3 : Como germinam as relações $R(x, o)$ e $R_I(p, o)$ em meio a evolução da Dimensão Digital? R_3 : por intermédio do estreitamento das relações pessoais $R(X, art)$ entre os sujeitos (X) inseridos em uma Instituição digital (Id) e os artefatos (art) desta Id:

- ✓ $R(X, art)$ para produção de conhecimento,
- ✓ $R(X, art)$ para geração de insights, $R(X, art)$

Dessa forma, em meio a este PEP-PE surge a questão Q_4 : mas, o que é necessário para que estas relações $R(X, art)$ para produção de conhecimento e $R(X, art)$ para geração de insights, $R(X, art)$ sejam estabelecidas?

A resposta R_4 à Q_4 é sobre a necessidade do desenvolvimento do Pensamento Crítico e a Criatividade fundamentais à produção do conhecimento e a geração de insights, por meio dos quais obtém-se a resposta R_2 à questão. A criticidade e criatividade serão explicitados na próxima seção.

7. Dimensão Digital & Dimensão da Didática da Matemática

Na interseção dessas dimensões (Figura 5) encontram-se as habilidades necessárias ao sujeito das Id, destacando-se o pensamento crítico³⁸ e a criatividade³⁹.

Figura 5. Dimensão Digital & Dimensão Educacional



O pensamento Crítico e a Criatividade vão ao encontro das competências gerais da educação básica propostas pela BNCC (Brasil, 2018):

2.Exercitar a curiosidade intelectual e recorrer à abordagem própria das ciências, incluindo a investigação, a reflexão, a análise crítica, a imaginação e a criatividade, para investigar causas, elaborar e testar hipóteses, formular e resolver problemas e

³⁸ Segundo Noruzi; Hernandez (2011), Gokhale define o termo pensamento crítico como o pensamento que envolve a atividade de analisar, sintetizar e avaliar conceitos.

³⁹ Segundo Figueroa; Almouloud (2023) a criatividade não é a ideia extraordinária surgida do nada, mas uma capacidade de recriar partes parcialmente concebidas por outra pessoa.

criar soluções (inclusive tecnológicas) com base nos conhecimentos das diferentes áreas. (Brasil, 2018, p. 11)

Para orientar essa atuação, torna-se imprescindível recontextualizar as finalidades do Ensino Médio, estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB, Art. 35)⁵³: há mais de vinte anos, em 1996:

III – o aprimoramento do educando como pessoa humana, incluindo a formação ética e o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento crítico; (Brasil, 2018, p. 464)

E para as finalidades do ensino médio, segundo a BNCC, a escola precisa estruturar-se para:

proporcionar uma cultura favorável ao desenvolvimento de atitudes, capacidades e valores que promovam o empreendedorismo (criatividade, inovação, organização, planejamento, responsabilidade, liderança, colaboração, visão de futuro, assunção de riscos, resiliência e curiosidade científica, entre outros), entendido como competência essencial ao desenvolvimento pessoal, à cidadania ativa, à inclusão social e à empregabilidade; (Brasil, 2018, p. 466)

Pode-se concluir que as dimensões se interconectam, conforme Figura 5, bem como as Instituições digitais (I_d) e as Instituições de ensino (I_e) também, ambas devem coexistir nesta sociedade hiper conectada, pois uma depende da outra. A I_d depende do sujeito em formação na I_e e principalmente do grau de estreitamento R (X, art) deste sujeito, o que envolve as habilidades que estão na intersecção das duas dimensões.

Diante do exposto, R_2 é uma possível resposta à questão Q_2 : Existe um parâmetro sinalizador para que ocorra um acoplamento ideal entre as Dimensão Digital e Dimensão da Didática da Matemática de modo a garantir a redução de possíveis tensões e ruídos em suas respectivas Instituições no sistema de engrenagens em que elas se encontram?

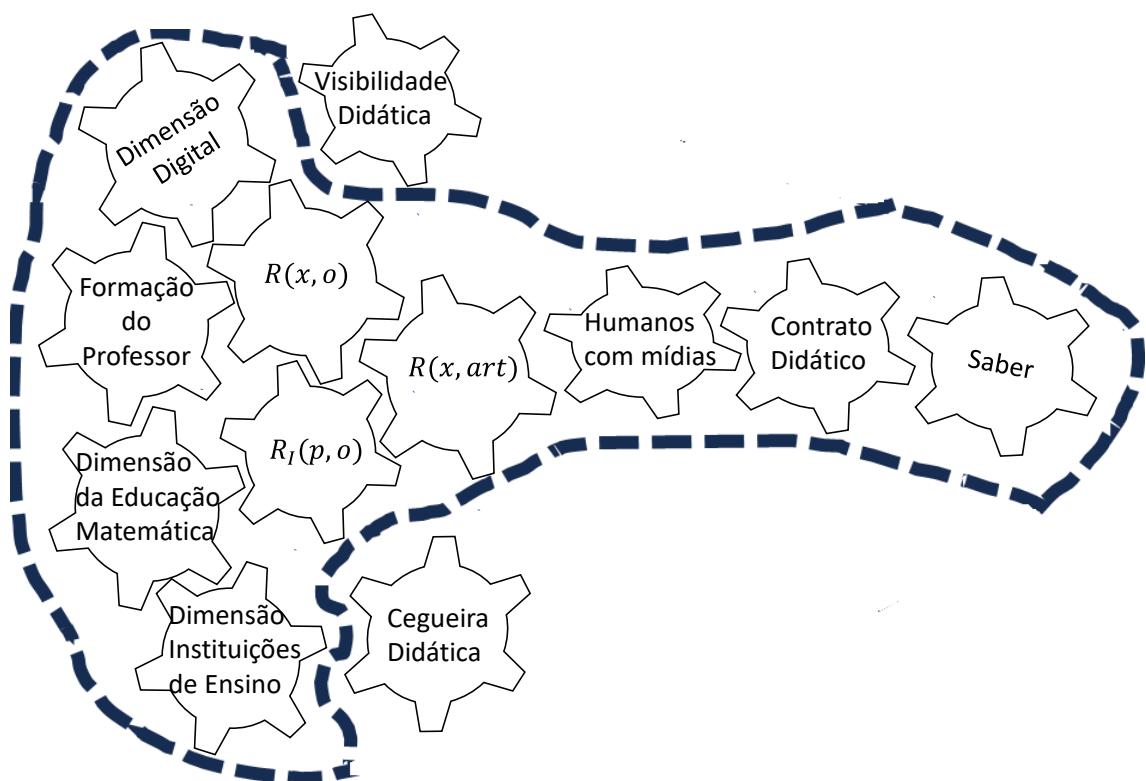
R_2 : $d(I_d, I_e)$ mede o distanciamento entre as instituições I_d e I_e e sinaliza a necessidade de investigação de como os artefatos da Dimensão Digital são legitimados e institucionalizados na Dimensão da Didática da Matemática e vice-versa. Uma vez que o ápice das relações $R(x, o)$ e $R_l(p, o)$, em uma Instituição escolar (I_e) deve estar associado à como se dá a aprendizagem do aluno em formação inicial e da formação do professor (formação continuada), a qual implica diretamente na relação $R(x, art)$ na Dimensão Digital, em que x encontra-se na posição de aprendiz em I_e .

O processo de pesquisa durante o PEP-PE, em um sistema autodidático $S(x, x, Q)$ traz contribuições para a resposta R^* à questão Q inicial: Quais os impactos de uma sociedade hiper

conectada, em meio a era da Inteligência Artificial, nas Instituições de Ensino, no que se refere às relações pessoais e interpessoais de seus sujeitos nos espaços de ensino e aprendizagem?

A resposta R[♦] é representada no esquema da Figura 6 ao se fazer a analogia a um sistema mecânico de engrenagens em que para que o acoplamento seja ideal se faz necessário uma distância ideal entre as Instituições de Ensino, Dimensão da Didática da Matemática, Dimensão Digital, as quais propagarão conhecimento (potência) à Formação do Professor, que se realiza a partir das diversas engrenagens regidas pelas relações pessoais, $R(x, o)$, relações institucionais, $R_I(p, o)$ em um acoplamento (distância ideal) à Dimensão Digital e seus artefatos, que se fazem presentes nas engrenagens relativas às relações $R(x, art)$, associadas às engrenagens Humanos com mídias em que o contrato didático e suas rupturas são peças fundamentais no desenrolar das situações didáticas para a institucionalização do saber.

Figura 6. Sistema de Engrenagens do PEP-PE



É importante destacar dois elementos que impactam no sistema representado pela Figura 6, a Visibilidade Didática que tem como oposto a Cegueira Didática. Acredita-se que, à medida que seja atingido o ajuste ideal entre a distância das engrenagens, $d(I_d, I_e)$, de modo a operarem para o rendimento máximo de potência, a tensão entre estes dois elementos tenderá a diminuir.

A consciência de que diante do conjunto de dados extraordinários (Big Data) gerados por uma sociedade hiperconectada, nós humanos não somos capazes de processar este Big Data, leva a reconhecer que Humanos interagindo com mídias pode atingir níveis de visibilidade didática necessários para a produção de conhecimento a partir do pensamento crítico e da criatividade, gerando modelos didáticos apropriados para diferentes estilos de aprendizagem de acordo com o perfil de alunos, estabelecendo um ajuste ideal entre as Dimensões Digital e da Didática da Matemática para o desenvolvimento de situações didáticas em potencial, ou seja, que vise estreitar as relações entre o aluno, o professor e o saber na produção de conhecimento.

Dante deste pressuposto e das respostas às questões durante o percurso PE-PE consideramos que o esquema representado na Figura 6 requer o desenvolvimento de PEP em cursos de formação continuada e em cursos de Licenciatura em Matemática:

- ✓ PEP-FP (PEP-Formação de professores), (Almouloud *et al.*, 2021) $S(x, y, Q_0)$, onde x é um professor, y é um grupo de pesquisa para discussão de Q_0 : O que é IA? Como utilizar os recursos da IA para proporcionar um ensino de matemática inclusivo, que leve em consideração as diferentes formas de aprender de acordo com cada perfil de aluno?

O desenvolvimento deste PEP-FP impactará na relação $R(x, art)$, onde x é um professor, sendo $art =$ recursos de IA, estreitando esta relação e diminuindo a distância $d(I_d, I_e)$. O que impactará na relação pessoal com o objeto o em meio a dimensão digital e, assim o professor poderá ocupar a posição de um gestor de situações didáticas inovadoras que contribuirão com a aprendizagem de seus alunos de forma a desenvolverem as habilidades de pensamento crítico e criatividade, mesmo que em suas Instituições de ensino não tenham acesso à tecnologia, como acesso à internet e computadores.

Sendo assim, o objetivo é proporcionar a interconexão entre a Dimensão Digital (artefatos digitais) e a Dimensão da Educação Matemática (objetos matemáticos e Teorias da Didática da Matemática) de forma a estreitar a relação $R(x, o)$ a partir de $R(x, art)$. Este estreitamento das referidas relações pode promover o letramento digital e contribuir para formação de cidadãos capazes de utilizar os recursos decorrentes dos avanços tecnológicos. A referida capacitação pode favorecer o desenvolvimento de modelos didáticos inclusivos, modelos de avaliação da aprendizagem e seleção de melhores soluções para um determinado problema a partir da articulação da Dimensão Digital e a Dimensão da Didática da Matemática

para atingir a distância mínima ideal para o funcionamento adequado do sistema de engrenagens.

8. Considerações Finais

A pesquisa tem como objetivo ampliar as discussões a respeito da Dimensão Digital e da Dimensão da Didática da Matemática e a possibilidade de suas interconexões para gerar contribuições na esfera do ensino de matemática tanto nas instituições de ensino da Educação Básica quanto nas instituições de Ensino Superior.

Os avanços tecnológicos são uma realidade de nossa sociedade e tendem a avançar na direção de trazer mudanças em nossos modos de saber-fazer, o que nos coloca na posição de permanentes aprendizes e diante do desafio e da necessidade de desenvolvimento do pensamento crítico e da criatividade nas diversas posições que assumimos nas instituições pelas quais passamos.

Esta pesquisa revela a necessidade do estreitamento entre ambas as Dimensões D_D e D_{Dm} de modo a discutir e rediscutir a distância d (I_d , I_e) necessária para que não predomine a cegueira didática, de modo a ofuscar a visibilidade didática, que impulsiona o acoplamento entre as engrenagens representadas pela Figura 6 para gerar conhecimento entre as instituições e seus sujeitos.

Referências

- ALMOLOUD, Saddo Ag. *Fundamentos da didática da matemática*. Editora da UFPR, 2^a edição ampliada e revisada, 2022, 344p
- ALMOLOUD, Saddo Ag. et al. Percurso de estudo e pesquisa como metodologia de pesquisa e de formação. REVASF, Petrolina-Pernambuco -Brasil, vol. 11, n.24, p.427-467, 2021
- ALHARBI, A.M. Implementation of Education 5.0 in Developed and Developing Countries: A Comparative Study. Creative Education, v.14, n°.5, 2023.
- BLAGOJ, D.; CHRISA, T.; UROŠ, K. AI watch, historical evolution of artificial intelligence: Analysis of the three main paradigm shifts in AI, Publications Office of the European Union, 2020.
- BORBA, M. C. (1999). Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. Em M. A. V. Bicudo (Ed.), *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas* (pp. 285 - 295). São Paulo, Brasil: Editora UNESP.
- BORBA, M. C. & Villarreal, M. E. *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer, 2005.
- BORBA, M. C. et al. Humans-with-Media: Twenty-Five Years of a Theoretical Construct in Mathematics Education, Springer Nature Switzerland AG, B. Pepin et al. (eds.), *Handbook of Digital Resources in Mathematics Education*, Springer International Handbooks of Education, 2023.
- BRASIL. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular: Educação é a base. Educação Básica. Brasília: MEC, 2018
- BROUSSEAU, G. L'observation des activités didactiques. *Revue Français de Pedagogie*, v.45, p.130-139, 1978.

CHENG K., He Y., Li C., Xie R., Lu Y., Gu S., et al. Talk with ChatGPT about the outbreak of Mpox in 2022: reflections and suggestions from AI dimensions. *Ann. Biomed. Eng.* 51, 870–874, 2023

CHEVALLARD, Y. L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266, 1999

CHEVALLARD, Y. Organiser l'étude. Cours 3 - Structures & Fonctions. Actes de la XIème Ecole d'été de didactique des mathématiques. Grenoble, La Pensée Sauvage, 2002.

CHEVALLARD, Y. La notion d'ingénierie didactique, un concept à refonder. Questionnement et éléments de réponse à partir de la TAD. Cours donné à la 15e école d'été de didactique des mathématiques, (Clermont-Ferrand, 16-23), 2009. Disponível em : http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=144. Acesso em : 16 de junho de 2021

CHEVALLARD, Y. Advanced Course 4: Bits and Pieces from the ATD - a Pseudorandom Walk, 2019.

FIGUEROA, T.P.; ALMOULLOUD, S. Ag. Proposta de um Modelo Didático para o desenvolvimento do Pensamento Criativo em Matemática, Zetetiké, Campinas, SP, v.31, pp.1-16, 2023.

GERSTEIN, J. Moving from Education 1.0 Through Education 2.0 Towards Education 3.0 in L M Blaschke, C Kenyon, and S Hase (Eds) Experiences in Self-Determined Learning, 2014. Available online at: <https://usergeneratededucation.wordpress.com/author/jackiegerstein/>

GRAGLIA, M.A.V.; HUELSEN, P.G.V. The sixth wave of innovation: artificial intelligence and the impacts on employment, RISUS – Journal on Innovation and Sustainability, São Paulo, v. 11, n.1, p. 3-17, 2020.

HILDMANN, H.; HIRSCH, B. Overview of Artificial Intelligence, Encyclopedia of Computer Graphics and Games, pp.1310-1319, 2024

JARRAHI, M.H. et al. Artificial intelligence in the work context, Journal of the Association for Information Science and Technology, vol 74, Issue 3, 2023.

MARGOLINAS, C. (2014). Connaissance et savoir. Concepts didactiques et perspectives sociologiques? Revue française de pédagogie, 188, 13-22.

MORAES, D.A.F.; LIMA, C.M. Os artefatos digitais como ferramentas mediadoras das atividades cognitivas dos estudantes: possibilidades para novos cenários de aprendizagem. *Educar em Revista*, Curitiba, Brasil, v. 35, n. 78, p. 243-262, nov./dez. 2019

OGUNDARI, K. Student access to technology at home and learning hours during COVID-19 in the U.S. *Educational Research for Policy and Practice*, 2023.

ROINE, C. (2012). Analyse anthropo didactique de l'aide mathématique aux « élèves en difficulté » : l'effet Pharmakéia. *Carrefours de l'éducation*, 33(1), 131-147.

SCHUMPETER, Joseph A. Capitalismo, socialismo e democracia. Rio: Zahar. 1984.

NORUZI, M.R.; HERNANDEZ, J.G.V., 'Critical Thinking in the Workplace: Characteristics , and Some Assessment Tests', in 3rd International Conference on Information and Financial Engineering, vol. 12, pp. 19–20, 2011.

WINTER, E. et al. Teachers' use of technology and the impact of Covid-19. *Irish Educational Studies*, vol. 40, No. 2, 235–246, 2021.

Capítulo 4

Reflexões teóricas sobre as contribuições das tecnologias emergentes para o ensino e aprendizagem da Matemática

Celina Aparecida Almeida Pereira Abar

José Manuel dos Santos

Marcio Vieira de Almeida

1. Introdução

A integração da tecnologia nas salas de aula reflete práticas pedagógicas em evolução, assim como os desafios inerentes a essa transformação. Professores mais experientes, em particular, podem necessitar de apoio adicional para incorporar eficazmente as ferramentas digitais no seu ensino. As áreas-chave de intervenção incluem o planeamento de aulas, a superação de dificuldades e a promoção da colaboração (Cox, 2013). A transformação dos contextos educacionais para responder às exigências dos alunos do século XXI requer adaptações contínuas. No entanto, a investigação nem sempre acompanha o ritmo das rápidas inovações tecnológicas (Leneway, 2014). A perspectiva multimodal oferece uma visão valiosa sobre as complexas interações entre tecnologia e atividades humanas nos ambientes educativos (Schnaider *et al.*, 2020). A disposição espacial das tecnologias nas salas de aula também influencia as práticas pedagógicas, observando-se uma transição de telas centralizadas para múltiplos dispositivos, o que afeta tanto a organização física como as abordagens pedagógicas (Tondeur *et al.*, 2015).

O ensino e a aprendizagem da matemática sofreram transformações significativas com o advento das tecnologias emergentes. Um corpo crescente de trabalho teórico tem procurado explorar como as ferramentas digitais podem melhorar a pedagogia matemática, promovendo uma compreensão conceitual mais profunda e habilidades de resolução de problemas mais eficazes. Ao longo da última década, essas estruturas evoluíram, refletindo mudanças no cenário tecnológico e na compreensão de como os alunos aprendem matemática em ambientes aprimorados pela tecnologia.

Esta visão geral resume pesquisas recentes sobre contribuições teóricas que sustentam o uso de tecnologias emergentes na educação matemática, que agrega os objetivos da didática da matemática, com base em referenciais e modelos que visam melhorar as práticas de ensino e o envolvimento dos alunos.

A didática da matemática se caracteriza por uma abordagem epistemológica, concentrando-se no conhecimento matemático específico e em sua aquisição (Winsløw, 2007). Ela enfatiza a estrutura, a linguagem e os métodos próprios da matemática como disciplina (Rico, 2012). A educação matemática, por sua vez, aborda de forma mais ampla os aspectos sociais e culturais envolvidos na aprendizagem da matemática (Hudson, 1999). Ambas as áreas examinam a distinção entre a matemática como disciplina científica e como disciplina escolar (Steinbring, 1998). Os trabalhos também analisam o papel da didática na formação de professores, especialmente no que se refere à pedagogia específica da disciplina ou "*Fachdidaktik*" (Hudson, 1999). Apesar das diferenças de terminologia e foco, tanto a didática da matemática quanto a educação matemática compartilham o objetivo comum de aprimorar a compreensão matemática e as práticas de ensino (Rico, 2012; Winsløw, 2007).

O conhecimento dos professores de matemática sobre a integração da tecnologia na pedagogia é amplamente investigado, indicando vários estudos que os professores geralmente possuem conhecimento tecnológico e pedagógico suficiente, com diferenças significativas em diferentes variáveis (Bal; Bedir, 2020). Programas de desenvolvimento profissional, especialmente aqueles focados nas práticas de Comunidade de Investigação, podem melhorar significativamente o conhecimento dos professores sobre tecnologia pedagógica (Anabousy; Tabach, 2022).

O conhecimento tecnológico e o conhecimento de conteúdo tecnológico são preditores significativos do conhecimento geral de Tecnologia Pedagógica de Conteúdo entre os professores de matemática (Malubay; Daguplo, 2018). Professores com sólido conhecimento em tecnologia, pedagogia e conteúdo estão melhor preparados para desenvolver representações e soluções inovadoras para problemas matemáticos, tornando-os mais responsivos às necessidades dos alunos do século XXI (Malubay; Daguplo, 2018). Estudantes de pós-graduação reconhecem a importância da tecnologia no ensino da matemática, enfatizando seu papel na promoção do desenvolvimento curricular e na formação de professores (Naidoo, 2014). O desenvolvimento profissional contínuo e a participação em oficinas de integração de tecnologia são recomendados para fortalecer o conhecimento dos professores nessa área (Malubay; Daguplo, 2018).

Em geral e não só no ensino e da matemática, a pesquisa sobre a colaboração entre professores enfatiza o papel das ferramentas, recursos e tecnologias na melhoria das práticas colaborativas. As ferramentas de orquestração apoiam os professores durante a colaboração dos alunos, monitorizando e analisando as interações dos estudantes (van Leeuwen; Rummel, 2019). Vários métodos e instrumentos de pesquisa, como o Questionário de Avaliação da Colaboração entre Professores, foram desenvolvidos para estudar a colaboração docente (Sandar; Kálmán, 2022). Por exemplo, a colaboração entre professores de inglês para falantes de outras línguas (ESOL) e professores de áreas de conteúdo proporciona oportunidades para aprendizagem compartilhada, utilizando ferramentas para articular objetivos e co-construir conhecimento (Martin-Beltrán; Peercy, 2014). A aprendizagem colaborativa apoiada por tecnologia na formação de professores utiliza uma ampla gama de ferramentas, incluindo computadores, dispositivos móveis e tecnologias baseadas na web, estendendo a colaboração para além da sala de aula (Dahri *et al.*, 2019).

A integração das tecnologias digitais no ensino da matemática tem se tornado cada vez mais relevante devido às constantes transformações no cenário educacional. A educação matemática, como campo de pesquisa, busca entender como essas tecnologias podem potencializar os processos de ensino e aprendizagem, além de identificar os desafios e oportunidades que surgem com sua adoção.

As tecnologias e ambientes de matemática dinâmica apresentam tanto oportunidades quanto desafios no contexto escolar. Embora estas ferramentas possam melhorar a compreensão e as competências de resolução de problemas dos alunos (Shahmohammadi, 2019), o uso excessivo destas tecnologias pode desviar o foco dos conceitos matemáticos centrais (Shahmohammadi, 2019). O software dinâmico apoia a modelação interativa e a experimentação, estendendo o processo de aprendizagem para além da sala de aula tradicional (Freiman *et al.*, 2009). No entanto, o sucesso da adoção dessas ferramentas depende das crenças dos professores sobre a sua utilidade e da sua proficiência no uso da tecnologia (Stols; Kriek, 2011). Estudos indicam que o software de geometria dinâmica (SGD) requer tarefas bem desenhadas e orientação do professor, pois não pode funcionar como um ambiente de aprendizagem autônomo (Jones, 2005). Embora os benefícios do SGD possam levar tempo a manifestar-se, a sua utilização pode melhorar significativamente a compreensão geométrica dos alunos (Jones, 2005).

O uso das tecnologias digitais na educação, particularmente na educação matemática, tem se consolidado como uma ferramenta importante para a ampliação das possibilidades de

ensino e aprendizagem. Este avanço é suportado por uma série de discussões teóricas e metodológicas que visam entender como essas tecnologias podem ser integradas de maneira eficaz no processo educativo.

A eficácia das tecnologias digitais para o ensino de matemática está no seu uso, ou seja, no contexto de ensino e aprendizagem da sala de aula. A partir de alguns exemplos, aqui apresentados e desenvolvidos em projetos de pesquisa espera-se que haja uma compreensão de como funcionam tais recursos na prática da matemática escolar.

Este artigo tem como objetivo explorar o papel das tecnologias emergentes, analisando suas contribuições teóricas e práticas para a didática da matemática, entendida como uma área de investigação sobre os fenômenos relacionados ao ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos. Especificamente, buscamos discutir como processos educativos que utilizam Inteligência Artificial (IA), Realidade Virtual (RV), Realidade Aumentada (RA) e ferramentas de IA generativas podem ser integradas ao currículo, identificar os desafios inerentes a essa integração e apresentar as bases teóricas que sustentam o uso eficaz dessas tecnologias no contexto educacional.

O ensino e aprendizagem da matemática tem passado por transformações significativas com o advento das tecnologias emergentes. Processos educativos que utilizam IA, RV, RA e IA generativa vêm ampliando as possibilidades pedagógicas, promovendo uma educação interativa, personalizada e centrada no aluno. Essas inovações permitem que conceitos matemáticos abstratos sejam explorados de maneira visual e prática, facilitando o aprendizado e a compreensão. Contudo, sua integração eficiente nos processos de ensino e aprendizagem demanda bases teóricas sólidas e o desenvolvimento de novas abordagens pedagógicas que contemplam as especificidades dessas tecnologias.

Estas inovações não apenas ampliam as possibilidades pedagógicas, mas também desafiam os educadores a reimaginar os processos de ensino e aprendizagem. Neste texto, procura-se explorar o potencial e contribuições que elementos da didática da matemática trazem para o uso de tecnologias emergentes. Entendemos que isso pode ocorrer pelo fato de que, essas tecnologias permitem a criação de ambientes de aprendizado envolventes e personalizados, com foco tanto na compreensão conceitual quanto no desenvolvimento de habilidades processuais.

Podemos construir uma relação entre a didática da matemática e tecnologias emergentes, com base em fundamentos teóricos e práticos, pois, tais ferramentas digitais estão reconfigurando a pedagogia em geral.

Referenciais teóricos, advindo da didática da matemática, podem orientar a compreensão atual de como incorporar efetivamente tecnologias emergentes no ensino e aprendizagem da matemática. O uso da tecnologia na educação matemática situa-se, muitas vezes, dentro de referenciais teóricos específicos que orientam as práticas pedagógicas e informam o desenho de ferramentas digitais.

Um exemplo de utilização de tecnologias emergentes, como simulações interativas em realidade virtual, permite que os alunos possam experimentar conceitos matemáticos em diferentes cenários, ajudando a desenvolver flexibilidade cognitiva. Por exemplo, uma simulação de um problema de física que requer cálculos matemáticos pode ser manipulada de várias formas, permitindo aos alunos explorarem diferentes caminhos para a solução.

As tecnologias emergentes, como as plataformas de IA e as ferramentas de realidade aumentada, permitem que os alunos participem ativamente no processo de resolução de problemas e experimentação. Por exemplo, uma ferramenta de RA que permite aos alunos visualizar e manipular gráficos em tempo real suporta a aprendizagem ativa, em que o aluno pode testar hipóteses, ver os resultados imediatos de suas ações e refletir sobre o que aprendeu.

Abar e Souza (2024) ponderam que a possibilidade mais recente do GeoGebra Discovery, outra tecnologia emergente na educação e uma versão experimental do GeoGebra, permite refletir sobre o que caracteriza uma demonstração, do ponto de vista dos sistemas axiomáticos e da lógica formal, e como isso pode ser levado para a sala de aula do ensino fundamental. A descoberta por meio da visualização e interpretação dos resultados pelo usuário, ilustra as funcionalidades das ferramentas automatizadas de raciocínio (ART) e mostra a interação necessária entre o raciocínio humano e a máquina, sintetizando o que é denominada por “inteligência aumentada”⁴⁰.

Este capítulo explora o potencial das tecnologias emergentes, anteriormente referidas, no ensino e aprendizagem da matemática, analisando as contribuições teóricas que essas inovações trazem. Ressalta-se, assim, a rápida evolução das tecnologias emergentes e como elas estão transformando o cenário educacional, especialmente no ensino e aprendizagem da matemática.

⁴⁰ A inteligência aumentada é um padrão de design para um modelo de parceria, centrado no ser humano, de pessoas e inteligência artificial (IA) trabalhando em conjunto para melhorar o desempenho cognitivo, incluindo aprendizado, tomada de decisão e novas experiências. (Glossário Gartner em <https://www.gartner.com/en/information-technology/glossary/augmented-intelligence>)

2. Contribuições das Tecnologias Emergentes

São amplas as possibilidades oferecidas pelas tecnologias emergentes e seu impacto positivo depende fortemente de como elas são integradas ao processo pedagógico. É importante que o uso dessas ferramentas contribui efetivamente para o desenvolvimento das habilidades dos alunos.

2.1 Inteligência Artificial (IA)

O papel da IA no ensino e na aprendizagem é uma área de investigação em crescimento, oferecendo apoio personalizado e experiências de aprendizagem adaptadas às necessidades e estilos de aprendizagem dos alunos (Kaushik *et al.*, 2021; Hwang; Tu, 2021). Contudo, a implementação da IA apresenta desafios, como a garantia da precisão das soluções geradas, no caso da IA Generativa, a mitigação de preconceitos, o caso dos vieses de algoritmos de IA indicados por O’Niel (2020), e o equilíbrio entre automação e supervisão humana (Rane, 2023). As perspectivas dos professores são essenciais para o sucesso da integração da IA, com estudos a mostrar tanto entusiasmo pelo potencial da IA para melhorar o ensino como preocupações com o aumento da carga de trabalho (Wardat *et al.*, 2024). Considerações éticas, incluindo a privacidade de dados, também precisam de ser abordadas (Rane, 2023). Apesar destes desafios, a IA tem potencial para melhorar o desempenho dos alunos, a motivação e o pensamento crítico (Wardat *et al.*, 2024). Investigações futuras devem concentrar-se no desenvolvimento de diretrizes para a integração eficaz da IA na educação e na superação dos desafios existentes (Wardat *et al.*, 2024, Hwang; Tu, 2021).

A IA tem o potencial de personalizar o ensino da matemática de maneiras sem precedentes. Por meio de algoritmos que analisam grandes quantidades de dados de desempenho dos alunos, sistemas baseados em IA podem identificar padrões de aprendizagem, detectar dificuldades específicas e adaptar os conteúdos e as estratégias de ensino às necessidades individuais dos estudantes.

Os Sistemas Tutores Inteligentes (STI) são ferramentas educacionais que procuram adequar o processo de aprendizagem às necessidades individuais de cada estudante. Uma das formas dos tutores atuarem é através do fornecimento de dicas e *feedbacks* aos estudantes. Estas formas de interação são ativadas através de mecanismos pedagógicos e da captura de ações dos alunos, como respostas, solicitações de ajuda, tempo gasto em uma tarefa, entre outros. Entre as características dos STI estão a individualização da aprendizagem, a alta disponibilidade para

resolução de dúvidas, a atuação em deficiências específicas dos alunos e a percepção de seus estados emocionais. Alguns exemplos conhecidos que correspondem a plataformas de tutoria inteligente, pode-se considerar a *Khan Academy* ou o *DreamBox*, que já utilizam elementos de IA para oferecer feedback em tempo real e sugerir caminhos de aprendizado adaptativos.

Além disso, a IA pode automatizar tarefas de avaliação e feedback, liberando tempo para que os professores se concentrem em aspectos mais criativos e interativos do ensino. Sistemas de IA podem auxiliar na correção automaticamente de problemas matemáticos, fornecer feedback detalhado sobre os erros dos alunos e até sugerir atividades de revisão baseadas nas áreas de dificuldade identificadas. Isso pode levar a uma aprendizagem personalizada, permitindo que os alunos avancem em seu próprio ritmo enquanto recebem apoio contínuo.

Outro aspecto importante da IA é a sua capacidade de facilitar a análise de grandes volumes de dados educacionais, o que pode ajudar os educadores a identificarem tendências e tomar decisões informadas sobre o currículo e a prática pedagógica. Ferramentas de análise de dados baseadas em IA podem ajudar a prever quais alunos estão em risco de fracasso e sugerir intervenções apropriadas para apoiar esses alunos.

2.2 Realidade Virtual (RV) e Realidade Aumentada (RA)

A RV e a RA proporcionam ambientes imersivos que permitem aos alunos explorar conceitos matemáticos de maneira visual e interativa. Por exemplo, a geometria espacial pode ser ensinada através de simulações tridimensionais, nas quais os alunos podem manipular objetos virtuais para entender propriedades e relações de forma prática.

A RV tem demonstrado potencial embora sejam identificados desafios significativos. A RV pode aumentar o envolvimento dos alunos e melhorar os resultados de aprendizagem, particularmente em áreas que exigem compreensão espacial (Alali; Wardat, 2024a, Cevikbas *et al.*, 2023). No entanto, a ampla adoção da RV enfrenta obstáculos como custos elevados, complexidade técnica e necessidade de formação extensiva dos professores (Alali; Wardat, 2024a, Buentello-Montoya *et al.*, 2021). Também existem preocupações quanto a possíveis lacunas na compreensão conceptual e o risco de distração em relação aos objetivos de aprendizagem (Alali; Wardat, 2024a). A ausência de padrões estabelecidos e critérios de avaliação apresenta desafios adicionais para a sua implementação eficaz (Alali; Wardat, 2024b). Apesar desses obstáculos, a RV tem potencial para promover o desenvolvimento socioemocional, cognitivo e pedagógico na educação matemática (Cevikbas *et al.*, 2023). Para

concretizar plenamente este potencial, os investigadores sublinham a necessidade de soluções acessíveis, de quadros de avaliação claros e de um apoio robusto aos educadores (Alali; Wardat, 2024a; Alali; Wardat, 2024b).

A RA permite a superposição de informações digitais sobre o mundo físico, facilitando o aprendizado contextualizado de conceitos matemáticos em situações do mundo real. Em uma aula de matemática, os alunos poderiam usar dispositivos móveis para visualizar gráficos ou diagramas sobrepostos em objetos reais, facilitando a compreensão de como os conceitos matemáticos se aplicam no mundo ao seu redor. Por exemplo, ao apontar o dispositivo para um edifício, os alunos poderiam ver as medidas angulares e as proporções geométricas sobrepostas, permitindo uma compreensão dos conceitos em contextos mais envolventes. Em um ambiente de RA, os alunos poderiam realizar medições e cálculos geométricos em edifícios reais ou simulações de engenharia, trabalhando em problemas que profissionais de áreas técnicas enfrentam diariamente.

Essas tecnologias também podem promover uma aprendizagem interativa e envolvente. Jogos educacionais baseados em RV e RA podem transformar o aprendizado da matemática em uma experiência lúdica e motivadora, o que pode ser particularmente eficaz para captar o interesse dos alunos e promover a persistência em tópicos desafiadores. Isso conecta a matemática escolar a aplicações reais, reforçando a relevância dos conceitos matemáticos e motivando os alunos ao mostrar como o que aprendem pode ser aplicado fora da sala de aula. Além disso, ambientes colaborativos online, potencializados por IA, permitem que os alunos aprendam em comunidade, compartilhando soluções e discutindo estratégias, o que é central na aprendizagem situada.

2.3 IA Generativas

As IA generativas, como o ChatGPT (*Generative Pre-Trained Transformer*), são capazes de produzir texto em resposta às entradas dos usuários graças ao seu treinamento em grandes volumes de dados textuais e ao uso da arquitetura de rede neural Transformer. As redes neurais, base técnica do ChatGPT têm o potencial de criar conteúdos educacionais e apoiar a criatividade tanto de professores quanto de alunos (Koubaa *et al.*, 2023).

Essas IA podem auxiliar no desenvolvimento de problemas matemáticos personalizados, explicações detalhadas, exemplos práticos e até simulações interativas baseadas nas necessidades específicas dos alunos. Isso permite que os professores ofereçam uma variedade praticamente infinita de recursos e atividades que podem ser adaptados ao nível de compreensão

e interesse dos estudantes e oferecem um novo paradigma na educação matemática ao possibilitar a criação de conteúdos personalizados, como problemas matemáticos adaptados ao nível de habilidade do estudante ou explicações detalhadas sob demanda. Além disso, essas ferramentas podem ser utilizadas pelos professores para gerar novos materiais didáticos ou até mesmo simular diálogos didáticos, enriquecendo o processo de ensino-aprendizagem.

Um exemplo de aplicação das IA generativas é a geração automática de materiais de estudo. Se um professor deseja focar em um tópico específico, a IA potencialmente pode gerar um conjunto de problemas, vídeos explicativos ou visualizações interativas que abordam exatamente aquele conteúdo. Além disso, essas ferramentas podem ser usadas para criar materiais de revisão ou simulação de provas, permitindo que os alunos pratiquem de forma direcionada.

As IA generativas também podem contribuir para o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas dos alunos. Ao gerar problemas matemáticos que exigem criatividade e pensamento crítico, essas ferramentas podem desafiar os alunos a explorar múltiplas abordagens para a solução, promovendo um entendimento profundo e flexível dos conceitos matemáticos.

De modo geral pode-se afirmar que a IA tem o potencial de personalizar a aprendizagem ao adaptar o conteúdo e o *feedback* de acordo com as necessidades individuais dos alunos. Sistemas de tutoria inteligente oferecem suporte personalizado em tempo real, ajudando os estudantes a superarem dificuldades específicas e a progredir no seu próprio ritmo. Além disso, a IA permite a automatização de tarefas avaliativas, liberando tempo para que os professores se concentrem em aspectos mais criativos e interativos do ensino. Seu uso pode resultar em maior engajamento e compreensão conceitual dos alunos, mas deve ser equilibrado com o acompanhamento humano para evitar a dependência excessiva de algoritmos.

Considerando a RV e a RA, elas oferecem ambientes imersivos que permitem a visualização e manipulação de conceitos matemáticos de forma prática e interativa. Na matemática, a RV possibilita a exploração de formas geométricas em um espaço tridimensional, o que facilita a compreensão de propriedades espaciais e relações geométricas complexas. A RA, por sua vez, integra o mundo real com informações digitais, permitindo que os alunos apliquem conceitos matemáticos em situações concretas, como cálculos de ângulos e distâncias no ambiente físico. Essas ferramentas ampliam a capacidade dos alunos de entender e aplicar conceitos abstratos de forma tangível.

No contexto das ferramentas de IA generativa, como o ChatGPT, elas oferecem novas possibilidades para a criação de conteúdos educacionais personalizados e podem ser usadas para gerar problemas matemáticos adaptados ao nível de habilidade do aluno, fornecer explicações detalhadas e até criar materiais didáticos novos. Além disso, essas IA podem auxiliar professores a elaborar atividades mais diversificadas e dinâmicas, o que favorece o engajamento e a motivação dos estudantes. A IA generativa também pode promover o pensamento crítico e a criatividade ao desafiar os alunos a resolver problemas de maneira inovadora.

Apesar das amplas possibilidades oferecidas pelas tecnologias emergentes, seu impacto positivo depende fortemente de como elas são integradas ao processo pedagógico. É essencial que o uso dessas ferramentas esteja alinhado com objetivos educacionais claros, de modo a garantir que elas contribuam efetivamente para o desenvolvimento das habilidades matemáticas dos alunos. O foco deve sempre ser no fortalecimento do pensamento crítico, da resolução de problemas e da compreensão conceitual, e não apenas no uso das tecnologias por si só. Para isso, é crucial que os professores sejam capacitados a escolher e adaptar essas ferramentas às necessidades de seus alunos, garantindo que a tecnologia atue como um facilitador da aprendizagem e não como um substituto da prática pedagógica intencional.

3. Contribuições Teóricas

As ideias apresentadas sobre o uso de tecnologias emergentes no ensino e aprendizagem da matemática podem ser sustentadas por várias teorias didáticas e educacionais que ajudam a explicar como essas tecnologias podem influenciar e melhorar o ensino e a aprendizagem da matemática.

A inserção das novas ferramentas tecnológicas pode ser grande aliada, mediatizando o ensino-aprendizagem à ludicidade e outras dinâmicas inovadoras, buscando estratégias que ampliem a aprendizagem dos discentes, minimizando assim, dificuldades de aprendizado de matemática.

3.1 *Technological Pedagogical Content Knowledge (TPCK)*

Um modelo amplamente citado é o *Technological Pedagogical Content Knowledge* (TPCK), que integra conhecimento de tecnologia, pedagogia e conteúdo de disciplinas para ajudar os professores a incorporar efetivamente ferramentas digitais em suas instruções (Mishra; Koehler, 2006). O TPCK fornece uma lente através da qual os educadores podem avaliar como

as tecnologias emergentes — como software de geometria dinâmica, calculadoras gráficas e sistemas de álgebra computacional — podem apoiar a compreensão matemática.

A estrutura TPCK, desenvolvida por Mishra e Koehler (2006), é um dos modelos mais amplamente reconhecidos no campo da tecnologia educacional. Conceptualiza o conhecimento de que os professores necessitam para integrar eficazmente a tecnologia no seu ensino. O quadro destaca a intersecção de três áreas de conhecimento fundamentais:

- **Conhecimento tecnológico (TK):** Compreender como utilizar ferramentas e plataformas tecnológicas.
- **Conhecimento pedagógico (PK):** Saber ensinar, incluindo estratégias para gerir os processos de aprendizagem e facilitar o envolvimento dos alunos.
- **Conhecimento de conteúdo (CK):** Compreensão profunda do assunto — neste caso, matemática.

O TPCK propõe que o uso efetivo da tecnologia no ensino não é simplesmente saber operar ferramentas, mas envolve uma interação complexa entre estratégias pedagógicas e conhecimento de conteúdos. Este quadro continua a ser altamente influente, particularmente na definição do desenvolvimento profissional dos professores e na concepção do currículo, uma vez que oferece uma estrutura robusta para compreender a integração de ferramentas digitais nas salas de aula de matemática.

A investigação sobre o uso da tecnologia pelos professores em sala de aula revela uma evolução complexa ao longo do tempo. As crenças dos professores sobre a integração da tecnologia tendem a tornar-se mais nuançadas com a experiência, embora as mudanças nas práticas ocorram mais rapidamente do que as mudanças nas crenças subjacentes (Levin; Wadmany, 2006). O desenvolvimento profissional contínuo influencia as práticas em sala de aula e nas unidades escolares, com os professores ajustando inovações para alinhar-se com os objetivos institucionais (Clark-Wilson *et al.*, 2015). Para os professores principiantes, os recursos escolares e o ambiente de aprendizagem em geral têm um impacto significativo na integração da tecnologia, mesmo quando estes professores demonstram forte motivação interna (Ottenbreit-Leftwich *et al.*, 2018). Com o tempo, os professores passam a dar menos importância às crenças sobre o valor da tecnologia e mais ao seu sentido de autoeficácia em relação ao TPCK—que se torna um fator crucial tanto para o uso centrado no aluno como no professor (Lai *et al.*, 2022). Além disso, a relação entre práticas pedagógicas e o uso de

tecnologia diminui à medida que os professores desenvolvem maior flexibilidade nas suas abordagens (Lai *et al.*, 2022).

O modelo TPCK é um aporte teórico essencial para entender como os professores podem integrar efetivamente as tecnologias emergentes no ensino, especialmente no contexto da educação matemática. O desenvolvimento contínuo das crenças e práticas dos professores em relação à tecnologia, juntamente com o suporte institucional e os recursos disponíveis, molda o sucesso dessa integração. À medida que os professores ganham mais experiência e confiança em seu conhecimento tecnológico, pedagógico e de conteúdo, eles são capazes de adotar abordagens mais flexíveis e eficazes, promovendo uma aprendizagem mais significativa e centrada nos alunos. Dessa forma, o TPCK não apenas orienta o desenvolvimento profissional, mas também contribui para transformar as salas de aula em espaços dinâmicos e inovadores de aprendizado.

3.2 Teoria da Gênese Instrumental

Outra importante contribuição teórica vem da teoria da gênese instrumental (Rabardel, 2008), que examina as maneiras pelas quais os alunos desenvolvem o significado matemático através do uso de ferramentas tecnológicas. Esta teoria enfatiza a coevolução de ferramentas e processos cognitivos, sugerindo que os alunos aprendem não só usando a tecnologia, mas também transformando essas ferramentas em instrumentos para o pensamento matemático. Esta perspectiva tem sido influente na compreensão de como as tecnologias digitais mediam a atividade matemática e os processos de resolução de problemas dos alunos.

Desenvolvida por Rabardel (2008) a teoria da gênese instrumental é uma estrutura chave para entender como os alunos usam a tecnologia para aprender matemática e oferece uma lente importante para entender como os alunos podem transformar ferramentas digitais em instrumentos cognitivos no processo de aprendizagem, particularmente no ensino da matemática. Esta teoria explora a relação dialética entre a ferramenta e o usuário, onde a ferramenta digital inicialmente é um artefato externo que, através da interação do aluno, é transformada em um instrumento cognitivo capaz de mediar o pensamento e a aprendizagem. Essa teoria baseia-se na noção de que os alunos transformam ferramentas digitais em "instrumentos" para pensar e resolver problemas. O processo de gênese instrumental envolve duas componentes principais:

- **Instrumentação:** Como o aluno se apropria da ferramenta para seu próprio uso. O aluno começa a explorar a ferramenta digital, aprendendo suas funcionalidades e formas de

interação. Esse processo é essencial para que o aluno entenda como a ferramenta pode ser usada no contexto da resolução de problemas matemáticos.

- Instrumentalização: Como o aluno adapta a ferramenta influenciando o seu pensamento e os processos cognitivos. Nesse estágio, a ferramenta não é mais usada apenas para resolver problemas específicos, mas é transformada em um instrumento de pensamento e se torna, então, um apoio para a exploração de conceitos abstratos.

Esta teoria é particularmente relevante em ambientes que utilizam plataformas digitais, como software de geometria dinâmica (por exemplo, GeoGebra) ou sistemas de álgebra computacional (CAS). Enfatiza a relação bidirecional entre a ferramenta e o utilizador, destacando que a tecnologia só se torna significativa quando os alunos se envolvem ativamente com ela para aprofundar a sua compreensão dos conceitos matemáticos.

A teoria da gênese instrumental destaca que o verdadeiro poder das ferramentas digitais reside em sua capacidade de se tornarem extensões cognitivas dos alunos. Esse processo transforma a interação com a tecnologia em um caminho para o desenvolvimento do raciocínio matemático. Quando os alunos transformam uma ferramenta em um instrumento cognitivo, eles não apenas a utilizam para automatizar processos, mas também para explorar conceitos, formular hipóteses e refletir sobre suas ações e resultados.

3.3 Teoria dos Registros de Representação Semiótica

Essa teoria oferece uma compreensão sobre como diferentes formas de representação (simbólica, gráfica, algébrica, entre outras) de um objeto matemático podem ser exploradas e integradas através das tecnologias digitais para facilitar a aprendizagem de conceitos matemáticos (Duval, 1993).

O uso da tecnologia envolve propriedades semióticas, como a ampliação de imagens (zoom), que medeiam conteúdos tanto orais como escritos. Estas propriedades semióticas desempenham um papel essencial ao possibilitar a observação das transições e dos vestígios deixados entre as funções tecnológicas e os seus resultados nas atividades de produção de signos (Kress *et al.*, 2014). Os sistemas de signos, incorporados em artefatos físicos e simbólicos, são fundamentais para os processos internos de criação de signos e para o desenvolvimento de funções cognitivas que, por sua vez, promovem a aprendizagem (Bezemer; Kress, 2016). Este processo circular, descrito por Vygotsky (1978) como a internalização e externalização contínua de signos, é impulsionado pela interação entre o ser humano e a tecnologia. Os signos

são internalizados através do processamento mental e depois externalizados em novas formas, transformando os recursos disponíveis; essas transformações constituem os sinais de aprendizagem (Kress, 2010). As representações individuais frequentemente refletem sistemas de signos externos que são visualmente proeminentes e pertinentes no uso da tecnologia para a criação de signos (Kress *et al.*, 2014), alinhando-se com os conceitos de van Leeuwen (2005) sobre a evidência e ocultação da informação. Ao mapear o uso da tecnologia com um foco em camadas multimodais, obtém-se uma compreensão profunda de como os vários sistemas de signos são integrados nas práticas educativas, levando a variações na forma como a tecnologia e as atividades de produção de signos são percebidas. Esta abordagem também esclarece o papel das transições entre as representações dos signos, as funções e as propriedades tecnológicas, ajudando a explicar como essas mudanças se relacionam com as escolhas individuais no uso de recursos (Jewitt, 2017).

Ferramentas de RA e RV permitem que os alunos visualizem e manipulem simultaneamente várias representações de conceitos matemáticos. Por exemplo, uma equação quadrática pode ser representada tanto graficamente quanto algebricamente em um ambiente de RV, permitindo que o aluno interaja e observe as transformações em tempo real. Isso facilita a compreensão de como uma mudança em uma representação (como o coeficiente em uma equação) afeta outra (como a forma do gráfico).

Ao integrar essas tecnologias, o aprendizado se torna mais dinâmico e interativo, promovendo uma compreensão mais profunda dos conceitos ao permitir que os alunos experimentem de maneira prática a transição entre diferentes registros semióticos. Isso é particularmente útil em tópicos complexos, como o cálculo, em que as compreensões gráfica e analítica são essenciais.

Softwares como GeoGebra, por exemplo, permitem que os alunos explorem simultaneamente representações gráficas e algébricas de objetos matemáticos.

Pesquisas exploram como a RA pode auxiliar na conversão entre diferentes registros de representação, como a visualização de gráficos 3D a partir de equações ou a manipulação de objetos geométricos em um ambiente virtual. Isso facilita a compreensão de conceitos abstratos e a construção de significados.

A geometria é uma das áreas da Matemática que pode se beneficiar com o uso das TD, especificamente a Geometria Espacial. Todo esse benefício é porque a geometria espacial exige uma abstração maior por parte do aluno e uma capacidade de visualização em mais do que duas

dimensões. Com o uso de livro e de lousa, ou seja, ferramentas 2D, é necessário realizar projeções planas dos objetos tridimensionais, o que limita o entendimento dos alunos que possuem uma maior dificuldade.

Em uma aula de geometria espacial os alunos podem explorar, por exemplo, a relação entre formas tridimensionais, como prismas e pirâmides. Utilizando um aplicativo de RA, podem apontar seus dispositivos móveis para um espaço físico e ver uma forma tridimensional projetada sobre a realidade (por exemplo, um cubo projetado sobre uma mesa).

Desse modo diferentes registros semióticos entram em ação como uma representação figurativa na visualização do cubo tridimensional no espaço físico através da RA. Registros semióticos que representam fórmulas matemáticas associadas ao cálculo das medidas do volume e da área de superfície de um cubo e na conversão entre representações de diferentes registros ao alterar as dimensões do cubo no aplicativo de RA (por exemplo, modificando a altura ou a largura), para observar a mudança visual na forma e, simultaneamente, observar como as alterações impactam as representações algébricas (por exemplo, a mudança nas relações de volume).

Esse tipo de interação permite que os alunos façam a conversão entre a representação visual e a simbólica, entendendo de forma concreta como uma alteração em um parâmetro geométrico afeta o resultado matemático.

A RA é um conjunto de técnicas computacionais que, a partir de um dispositivo tecnológico, gera, posiciona e mostra elementos virtuais integrados a um cenário real que podem ser visualizados, em tempo real, através da tela de um dispositivo móvel (Figura 1). O usuário, durante toda a interação com a tecnologia, mantém o senso de presença no mundo real (Kirner; Tori, 2006).

Azuma *et al.* (2001) afirmam que um sistema de RA deve apresentar três características principais: (1) combinar elementos reais e virtuais; (2) possuir interatividade em tempo real e (3) registrar e alinhar elementos reais e virtuais entre si.

A Realidade Aumentada pode contribuir de maneira significativa na área de educação como processo de exploração, de descoberta e de construção de uma nova visão do conhecimento, oferecendo ao ambiente escolar a oportunidade de melhorar a compreensão de um objeto de estudo, em especial, de conteúdos matemáticos.

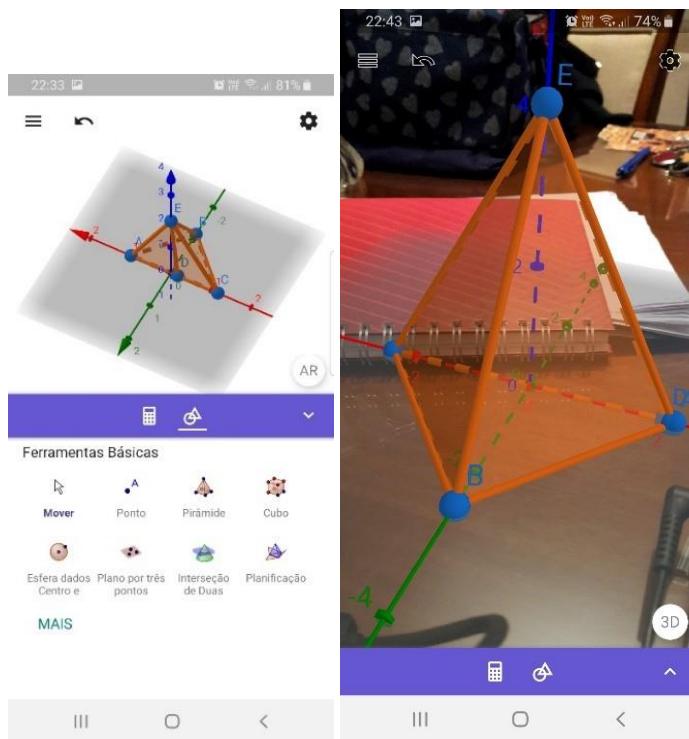
Figura 1 – Exemplo de aplicação em realidade aumentada



Fonte: techtudo.com.br/listas/2020/09/.

O aplicativo Calculadora GeoGebra 3D (GeoGebra, 2024), com funcionalidade de RA, cria e manipula construções geométricas em 3D através de suas características matemáticas e pode ser usado em dispositivos móveis com câmera que executam os diferentes sistemas operacionais. Este aplicativo, com o recurso de RA, foi desenvolvido especificamente para o ensino de Matemática. Através da ferramenta é possível manipular objetos 3D, movimentando-os na tela sobre o cenário real e permitindo alterar as características matemáticas destes objetos em tempo real (Figura 2).

Figura 2 – Ambiente da Calculadora GeoGebra 3D



Fonte: autores.

Na plataforma de recursos do GeoGebra na internet é possível encontrar um acervo de material didático, ideias de atividades e manuais de ajuda para que o professor de Matemática possa desenvolver ambientes de aprendizado exploratórios e dinâmicos. Um dos autores destes materiais disponíveis é Tim Brzezinski (Brzezinski, 2020) com sugestões de aulas para a aprendizagem ativa e centrada no aluno com a Calculadora GeoGebra 3D com RA

A RA pode contribuir de maneira significativa na área de educação como processo de exploração, de descoberta e de construção de uma nova visão do conhecimento, oferecendo ao ambiente escolar a oportunidade de melhorar a compreensão de um objeto de estudo, em especial, de conteúdos matemáticos.

3.4 Construtivismo e Construcionismo

As ideias de Jean Piaget (1970) e Seymour Papert (1980) são aspectos teóricos importantes, sobre a construção do conhecimento e fornecem a base para a aprendizagem ativa através da construção de artefatos tangíveis.

O construtivismo de Jean Piaget, enfatiza que o conhecimento é construído ativamente pelos aprendizes, e o construcionismo de Seymour Papert, foca na construção do conhecimento através da criação de artefatos e ambas oferecem uma base sólida para o uso de tecnologias emergentes. Ferramentas baseadas em inteligência artificial e IA generativas, que permitem aos alunos criar e experimentar com diferentes conceitos matemáticos, se alinham bem com essas teorias. Por exemplo, ao usar software de programação como o Scratch, os alunos podem criar animações que exemplificam conceitos matemáticos, promovendo uma compreensão profunda por meio da construção ativa. Outra situação, por exemplo, ao programar, a trajetória de um objeto em um ambiente de RV, os alunos não apenas aplicam conceitos de álgebra e geometria, mas também experimentam as consequências das suas construções em um ambiente visualmente rico e interativo.

Tecnologias como a realidade aumentada podem criar contextos de aprendizagem autênticos, onde os alunos aplicam conceitos matemáticos em situações do mundo real, como calcular distâncias ou ângulos em ambientes físicos. Além disso, a colaboração online facilitada por plataformas digitais e IA promove a ideia de comunidades de prática, onde os alunos aprendem uns com os outros em um contexto socialmente rico.

O uso de ambientes de programação, como o Scratch⁴¹, sucessor do LOGO substituindo linguagem natural de programação por programação por blocos, permite aos estudantes construir e explorar conceitos matemáticos de maneira ativa, criando e manipulando objetos digitais que representam ideias matemáticas, em cenários construídos pelo utilizador. Isso alinha-se com a ideia de que o aprendizado é mais eficaz quando os alunos estão ativamente envolvidos na criação de algo tangível, um princípio fundamental do construcionismo.

As abordagens construtivistas da educação matemática, particularmente aquelas influenciadas pelo construcionismo de Papert (1980), forneceram insights teóricos sobre o papel da tecnologia na promoção da aprendizagem do aluno. As teorias construcionistas sugerem que os alunos aprendem matemática de forma mais eficaz quando estão ativamente envolvidos na criação de artefatos, tais como programas de codificação ou conceção de simulações digitais. O trabalho de Papert com a programação LOGO lançou as bases para as tecnologias educacionais atuais, incluindo plataformas de codificação e manipulativos virtuais, que incentivam os alunos a explorarem ideias matemáticas através da resolução criativa de problemas.

3.5 Teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal de Lev Vygotsky

A Teoria da Zona de Desenvolvimento Proximal de Lev Vygotsky (1978) destaca a importância da mediação social e do apoio de um "outro mais competente" no processo de aprendizagem. A IA pode atuar como essa figura mediadora, oferecendo feedback personalizado e apoio adaptativo dentro da zona de desenvolvimento proximal dos alunos. Isso significa que as tecnologias de IA podem ajustar a dificuldade dos problemas matemáticos de acordo com o nível de habilidade atual do aluno, oferecendo desafios que são acessíveis, mas ainda assim promovem o desenvolvimento e suporte adaptativo dentro da zona de desenvolvimento proximal dos alunos. Isso garante que os alunos sejam continuamente desafiados e apoiados de maneira apropriada.

Sistemas de tutoria inteligente, por exemplo, podem ajustar a dificuldade dos problemas de matemática em tempo real, oferecendo ajuda adicional ou desafios maiores conforme o desempenho do aluno. Isso permite que o ensino seja altamente individualizado, garantindo que todos os alunos sejam continuamente desafiados de maneira apropriada e receba suporte

⁴¹ Disponível em: <https://scratch.mit.edu/>

personalizado. Como resultado, o aprendizado pode se tornar mais eficiente e eficaz, ajudando os alunos a progredirem em seu próprio ritmo.

No contexto de tecnologias emergentes o ChatGPT pode ser considerado uma ferramenta eficaz para auxiliar os alunos no âmbito da Zona de Desenvolvimento Proximal (ZDP) de Vygotsky. A integração do ChatGPT na educação matemática apresenta uma infinidade de benefícios para os educadores, abrangendo aspectos como planejamento de aulas, design de tarefas e outras considerações pedagógicas (Wardat *et al.*, 2023).

Yunianto *et al.* (2024) apresentam em um estudo a experiência de alunos realizando uma tarefa baseada em GeoGebra e Pensamento Computacional (PC) com o auxílio do ChatGPT. Os dados foram coletados e analisados, incluindo gravações de tela dos alunos, interações com o ChatGPT e questionários. Os resultados indicam que poucos alunos conseguiram construir objetos no GeoGebra com a ajuda do ChatGPT. A maioria dos alunos percebeu o ChatGPT como útil, embora suas respostas exigissem adaptações. O estudo destaca a importância de integrar e utilizar tanto o ChatGPT quanto o GeoGebra para melhorar as habilidades de PC.

Assim, pode-se considerar que estas teorias educacionais fornecem uma base necessária para o uso eficaz das tecnologias emergentes, garantindo que o foco permaneça no desenvolvimento do pensamento matemático.

4. Considerações Finais

A integração de tecnologias emergentes no ensino de matemática tem gerado resultados significativos no que diz respeito à personalização do ensino e à melhoria da compreensão conceitual dos alunos. A IA, por exemplo, tem se mostrado eficaz em fornecer feedback em tempo real e adaptar o ensino às necessidades individuais, resultando em um aprendizado mais focado e eficiente. Por outro lado, a RV e a RA têm permitido que os alunos explorem conceitos geométricos de maneira mais tangível, o que facilita a visualização e manipulação de objetos matemáticos tridimensionais.

Esses avanços também se refletem na prática dos professores, que agora podem contar com ferramentas eficazes para identificar as dificuldades dos alunos e adaptar suas estratégias pedagógicas. Além disso, a IA generativa oferece uma nova dimensão de criatividade ao processo de ensino, permitindo a criação de conteúdos personalizados e dinâmicos, o que favorece a motivação e o engajamento dos estudantes.

À medida que as tecnologias emergentes continuam a evoluir, espera-se que novas abordagens pedagógicas surjam, transformando a educação matemática em uma experiência mais acessível, significativa e envolvente. A pesquisa contínua e a prática reflexiva serão cruciais para entender plenamente o impacto dessas tecnologias e garantir que elas promovam uma educação matemática de qualidade.

A integração de tecnologias emergentes na educação matemática pode oferecer um potencial transformador, proporcionando novas maneiras de ensinar e aprender conceitos complexos de forma mais interativa e personalizada. Ferramentas como IA, RV, RA e IA generativas estão ampliando as fronteiras da pedagogia, tornando o aprendizado mais acessível e envolvente. No entanto, para garantir que essas tecnologias sejam utilizadas de maneira eficaz, é fundamental que sua implementação seja guiada por referenciais teóricos sólidos acima apresentados.

A combinação de IA, RV, RA e IA generativas na educação matemática oferece novas oportunidades para uma pedagogia interativa, personalizada e criativa. As tecnologias emergentes possibilitam a transformação de conceitos abstratos em experiências tangíveis e envolventes, promovendo um aprendizado mais profundo e significativo. No entanto, é fundamental que essas inovações sejam integradas de maneira estratégica, com base em sólidos referenciais teóricos, para garantir que o foco continue na compreensão conceitual, e não apenas no uso instrumental das ferramentas digitais.

Apesar das inúmeras vantagens, ainda há desafios a serem superados, como a desigualdade digital, o risco de dependência excessiva de ferramentas tecnológicas, que levam a uma compreensão superficial ou errônea sobre os conceitos. Portanto, é essencial que a integração dessas tecnologias seja planejada estrategicamente, garantindo que elas funcionem como um suporte ao desenvolvimento de um aprendizado profundo e significativo.

A integração consciente e fundamentada de tecnologias emergentes na didática da matemática tem o potencial de revolucionar o ensino e a aprendizagem dessa disciplina. Ao considerar teorias educacionais e metodológicas, os educadores podem planejar a implementação dessas tecnologias de maneira estratégica, garantindo uma aprendizagem significativa e inclusiva para todos os alunos.

A investigação sobre avaliação apoiada por tecnologia na educação matemática identifica tanto oportunidades como desafios. A tecnologia pode melhorar as avaliações formativas ao oferecer feedback em tempo real sobre tarefas complexas, o que pode contribuir

para a reforma do ensino (Olsher *et al.*, 2016). No entanto, a integração da tecnologia nas práticas de avaliação exige uma consideração cuidadosa do seu papel na promoção da compreensão matemática e no desenvolvimento de competências técnicas (Forster, 2006). Ferramentas dinâmicas de representação gráfica podem facilitar a aprendizagem conceptual, embora as telas estáticas possam ser menos eficazes para a introdução de novos tópicos (Forster, 2006). Manter um equilíbrio entre o desenvolvimento da competência tecnológica dos alunos e a compreensão matemática continua a ser um desafio, especialmente perante os requisitos de avaliação (Forster, 2006). Galbraith (2006) alerta contra expectativas excessivamente otimistas em relação ao ensino com suporte tecnológico, sublinhando a necessidade de uma maior exploração das relações entre máquinas, matemática e aprendiz. Suurtamm *et al.* (2016) observam que as avaliações em grande escala e em sala de aula na educação matemática enfrentam desafios e oportunidades diferentes, destacando a complexidade das práticas de avaliação nesse contexto.

As tecnologias digitais desempenham um papel crucial na promoção da colaboração e aprendizagem entre professores de matemática. Estas tecnologias oferecem novas formas de facilitar a comunicação, a colaboração e a interação social em comunidades de prática (Beatty; Geiger, 2009). Várias ferramentas computacionais em rede permitem que alunos e professores colaborem na criação de representações visuais da matemática, com potencial para um avanço adicional através das tecnologias da web (Jones *et al.*, 2013). As tarefas matemáticas, incluindo aquelas em formato digital, são recursos fundamentais no ensino da matemática e na formação de professores. Envolver os professores como parceiros no design de tarefas pode beneficiar a sua aprendizagem profissional e garantir que aspectos importantes do design não sejam negligenciados (Jones; Pepin, 2016). Diferentes modelos de colaboração e aprendizagem entre professores, como os modelos de Ação-Educação, Estudo da Aprendizagem e Centrado na Comunidade, oferecem diversas abordagens para integrar pesquisa e prática, fomentando interações entre investigadores e professores e abordando a natureza tácita do conhecimento sobre o ensino da matemática (Ding; Jones, 2020).

A integração da tecnologia em sala de aula destaca tanto benefícios quanto desafios. Os benefícios incluem um acesso aprimorado à informação, oportunidades de aprendizagem colaborativa e melhores resultados educacionais (Fonseca *et al.*, 2023, Dolo; Flomo, 2024). No entanto, existem barreiras significativas, como limitações de infraestrutura, formação inadequada dos professores e disparidades socioeconómicas (Dolo; Flomo, 2024, Johnson *et al.*, 2016). Os professores enfrentam tanto desafios externos (por exemplo, acesso a recursos,

apoio) quanto barreiras internas (por exemplo, atitudes, competências) ao integrar tecnologia (Johnson *et al.*, 2016). Para abordar estas questões, os investigadores recomendam investimento em infraestrutura, desenvolvimento profissional contínuo e como um assunto premente, investindo em políticas educativas que aprofundem o uso das tecnologias no sentido do desenvolvimento da literacia digital necessária aos cidadãos do século XXI (Dolo; Flomo, 2024). Groff e Mouza (2008) propõem o quadro de Inventário Individualizado para a Integração de Inovações Instrucionais (i5) para ajudar os professores a preverem o sucesso e identificar possíveis barreiras em projetos de integração de tecnologia. Ao abordar estes desafios de forma proativa, os educadores podem criar ambientes de aprendizagem mais eficazes com suporte tecnológico e preparar melhor os alunos para a era digital (Dolo; Flomo, 2024, Groff; Mouza, 2008).

A colaboração entre professores no ensino da matemática tem sido cada vez mais apoiada por ferramentas digitais, que melhoraram a comunicação e o aprendizado conjunto. Ferramentas de orquestração como a organização das discussões em sala de aulas, por exemplo, permitem aos professores monitorizarem e analisar as interações dos alunos durante o trabalho colaborativo (van Leeuwen; Rummel, 2019). A aprendizagem colaborativa na formação de professores também é facilitada por uma série de dispositivos digitais, estendendo a experiência de aprendizagem para além da sala de aula (Dahri *et al.*, 2019). Estas ferramentas promovem novas formas de interação dentro das comunidades de prática, fomentando um maior envolvimento na educação matemática (Beatty; Geiger, 2009). As tarefas, especialmente as que envolvem recursos digitais, são centrais no ensino da matemática e no desenvolvimento profissional, com os professores a desempenhar um papel fundamental na curadoria e adaptação de materiais para os seus contextos de ensino específicos (Clark-Wilson *et al.*, 2015). As comunidades online apoiam ainda mais a colaboração entre professores, proporcionando um espaço para a partilha de recursos e práticas (Hallinger; Kulophas, 2019). As redes online de desenvolvimento profissional contínuo permitem que os professores se envolvam em formação profissional permanente, contribuindo para a disseminação de novas práticas e fomentando uma cultura de investigação colaborativa (Trust *et al.*, 2016). No entanto, o sucesso dessas iniciativas depende do desenvolvimento de infraestruturas técnicas adequadas e de sistemas de apoio tanto para professores como para alunos (Trust *et al.*, 2016).

Também é importante considerar que, durante cursos de formação de professores, sejam disponibilizados roteiros práticos de como usar, onde usar e em qual conteúdo da Matemática aplicar. Estes roteiros serviriam como sugestão para estimular o uso de tecnologias emergentes

e colaborar para a criatividade dos professores durante o planejamento de suas aulas com aplicação destas tecnologias.

Este capítulo explorou como as tecnologias emergentes, como IA, RV, RA e IA generativas, estão transformando a didática da matemática, proporcionando práticas pedagógicas mais interativas, personalizadas e eficientes. A aplicação dessas inovações é sustentada por importantes referenciais teóricos que garantem sua integração eficaz no ensino. No entanto, desafios como a desigualdade no acesso às tecnologias, competências não adequadas para seu uso em face da dependência excessiva de ferramentas digitais, devem ser cuidadosamente considerados para garantir que o foco permaneça no desenvolvimento de habilidades conceituais profundas.

Referências

- ABAR, C. A. A. P.; CUNHA, D. V. Formação Inicial e Continuada de Professores de Matemática no Contexto da Realidade Aumentada. *Abakós*, v. 9, n. 2, p. 73-94, 2021. DOI: <https://doi.org/10.5752/P.2316-9451.2021v9n2p73-94>
- ABAR, C.; SOUZA, D. Utilizando o GeoGebra Discovery no contexto da Geometria Plana em uma formação de professores de matemática. *Indagatio Didactica*, v. 16, n. 2, p. 363-386, 2024. DOI: <https://doi.org/10.34624/id.v16i2.35191>
- ALALI, R.; WARDAT, Y. (2024a). The Role of Virtual Reality (VR) as a Learning Tool in the Classroom. *International Journal of Religion*, [S. l.], v. 5, n. 10, p. 2138–2151, 2024a. DOI: <https://doi.org/10.61707/e2xc5452>
- ALALI, R.; WARDAT, Y. Challenges and Limitations of Implementing Virtual Reality in K-12 Mathematics Education. *International Journal of Religion*, [S. l.], v. 5, n. 10, p. 2174–2184, 2024b. DOI: <https://doi.org/10.61707/zr0jf346>
- ANABOUSY, A.; TABACH, M. In-service mathematics teachers' pedagogical technology knowledge development in a community of Inquiry context. *Mathematics*, v. 10, n. 19, 3465. 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/math10193465>
- AZUMA, R.; BAILOT Y.; BEHRINGER, R.; FEINER, S.; JULIER, S.; MACINTYRE B. Recent advance in augmented reality. *IEEE Computer Graphics and Applications*, v. 21, n. 6, p. 34 – 47, 2001. DOI: <https://doi.org/10.1109/38.96345>
- BAL, A. P.; BEDİR, S. G. Investigation of technological pedagogical field knowledge levels of mathematics teachers. *International Journal of Educational Studies in Mathematics*, v. 7, n. 3, p. 198–213, 2020. DOI: <https://doi.org/10.17278/ijesim.737612>
- BEATTY, R.; GEIGER, V. Technology, communication, and collaboration: Re-thinking communities of inquiry, learning and practice. In: HOYLES, C., LAGRANGE, JB. (eds) **Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. New ICMI Study Series**, vol 13 (p. 251–284), Springer: Boston, MA. 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0_11
- BEZEMER, J.; KRESS, G. **Multimodality, Learning and Communication a Social Semiotic Frame**. Routledge: London. 2016.
- BRZEZINSKI, T. GeoGebra – Materiais. 2020. Disponível em: <https://www.GeoGebra.org/search/Tim%20Brzezinski>.
- BUENTELLO-MONTOYA, D. A.; LOMELÍ-PLASCENCIA, M. G.; MEDINA-HERRERA, L. M. The role of reality enhancing technologies in teaching and learning of mathematics. *Computers & Electrical Engineering: An International Journal*, vol. 93, 107287. 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compeleceng.2021.107287>

CEVIKBAS, M.; BULUT, N.; KAISER, G. Exploring the benefits and drawbacks of AR and VR technologies for learners of mathematics: recent developments. **Systems**, vol. 11, n. 5, 244. 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/systems11050244>

CLARK-WILSON, A.; HOYLES, C.; NOSS, R.; VAHEY, P.; ROSCHELLE, J. Scaling a technology-based innovation: windows on the evolution of mathematics teachers' practices. **ZDM: The International Journal on Mathematics Education**, vol. 47, n. 1, p. 79–92. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0635-6>

COX, J. Tenured teachers & technology integration in the classroom. **Contemporary Issues in Education Research (Littleton, Colo.)**, vol. 6, n. 2, p. 209–218. 2013. DOI: <https://doi.org/10.19030/cier.v6i2.7730>

DAHRI, N. A.; VIGHIO, M. S.; DAHRI, M. H. A survey on technology supported collaborative learning tools and techniques in teacher education. **2019 International Conference on Information Science and Communication Technology (ICISCT)**, Karachi, Pakistan. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1109/CISCT.2019.8777421>

DING, L.; JONES, K. A comparative analysis of different models of mathematics teacher collaboration and learning. In BORKO, H.; POTARI, D. (Eds.), **Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups, ICMI Study 25 Conference Proceedings** (p. 110-117). Universidade de Lisboa, Portugal. 2020.

DOLO, W. G. S.; FLOMO, S. M., JR. (2024). Design thinking approach to overcoming challenges in integrating technology in the classroom: A case study of Gbarnga School District bong county, Liberia. **International Journal of Innovative Science and Research Technology**, vol. 9, n. 3, p. 2583–2593. DOI: <https://doi.org/10.38124/ijisrt/IJISRT24MAR1940>

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. **Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives**, IREM-ULP, v. 5, p. 37-65, Strasbourg, 1993.

FONSECA, E.; LING, B.; GUIMARÃES JUNIOR, J. O Papel da Tecnologia na Sala de Aula Explorando os Benefícios e Desafios da Integração Tecnológica no Ambiente Educacional. **Revista Acadêmica Online**, vol. 9, n. 48, p. 1–10. 2023.

FORSTER, P. A. Assessing technology-based approaches for teaching and learning mathematics. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, vol. 37, n. 2, p. 145–164. 2006. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207390500285826>

FREIMAN, V.; KADIJEVICH, D.; KUNTZ, G.; POZDNYAKOV, S.; STEDØY, I. Technological environments beyond the classroom. In: TAYLOR, P.; BARBEAU, E. (eds) **Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. New ICMI Study Series**, (p. 97–131). vol 12. Springer, Boston, MA. 2009. DOI: https://doi.org/10.1007/978-0-387-09603-2_4

GALBRAITH, P. Students, mathematics, and technology: assessing the present – challenging the future. **International Journal of Mathematical Education in Science and Technology**, vol. 37, n. 3, p. 277–290. 2006. DOI: <https://doi.org/10.1080/00207390500321936>

GROFF, J.; MOUZA, C. A Framework for Addressing Challenges to Classroom Technology Use. **AACE Review (formerly AACE Journal)**, vol. 16, n. 1, p. 21-46. 2008.

HALLINGER, P.; KULOPHAS, D. The evolving knowledge base on leadership and teacher professional learning: a bibliometric analysis of the literature, 1960-2018. **Professional Development in Education**, vol. 46, n. 4, p. 521–540. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1080/19415257.2019.1623287>

HUDSON, B. Seeking connections between different perspectives on teacher education: in support of a science of the Teaching Profession. **TNTee Publications**, 2(1), 37-47.1999.

HWANG, G.-J.; TU, Y.-F. Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education: A bibliometric mapping analysis and systematic review. **Mathematics**, vol. 9, n. 6, p. 584. 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/math9060584>

JEWITT, C. The move from page to screen: the multimodal reshaping of school English. **Visual Communication**, vol. 1, n. 2, p. 171-195. 2002. DOI: <https://doi.org/10.1177/147035720200100203>

JOHNSON, A. M.; JACOVINA, M. E.; RUSSELL, D. G.; SOTO, C. M. Challenges and Solutions when Using Technologies in the Classroom. In CROSSLEY, S. A.; MCNAMARA, D. S. (Eds.) **Adaptive Educational Technologies for Literacy Instruction** (p. 13–29). New York: Taylor & Francis. 2016. DOI: <http://dx.doi.org/10.4324/9781315647500-2>

JONES, K. Research on the Use of Dynamic Geometry Software: implications for the classroom. In: EDWARDS, J.; WRIGHT, D. (Eds), **Integrating ICT into the Mathematics Classroom**. Derby: Association of Teachers of Mathematics. 2005.

JONES, K.; GERANIOU, E.; TIROPANIS, T. Patterns of collaboration: Towards learning mathematics in the era of the semantic web. In: MARTINOVIC, D., FREIMAN, V., KARADAG, Z. (eds) **Visual Mathematics and Cyberlearning**. Mathematics Education in the Digital Era (p. 1 – 21), vol 1. Springer, Dordrecht. 2013. DOI: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2321-4_1

JONES, K.; PEPIN, B. Research on mathematics teachers as partners in task design. **Journal of Mathematics Teacher Education**, v. 19, p. 105–121. 2016. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9345-z>

KAUSHIK, R.; PARMAR, M.; JHAM, S. Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education. *2021 2nd International Conference on Computational Methods in Science & Technology (ICCMST)*. Presented at the 2021 2nd International Conference on Computational Methods in Science & Technology (ICCMST), Mohali, India. 2021. DOI: 10.1109/iccmst54943.2021.00050

KIRNER, C.; TORI, R. Fundamentos de Realidade Aumentada. In: TORI, R.; KIRNER, C.; SISCOUTTO, R. **Fundamentos e Tecnologia de Realidade Virtual e Aumentada**. Livro do Pré-simpósio do VIII Symposium on Virtual Reality (p. 22 - 38) Belém: SVR, 2006.

KOUBAA, A.; BOULILA, W.; GHOUTI, L.; ALZAHEM, A.; LATIF, S. Exploring ChatGPT capabilities and limitations: a survey. **IEEE Access**, vol. 11, p. 118698–118721. 2023. DOI: <https://doi.org/10.1109/ACCESS.2023.3326474>

KRESS, G. **Multimodality**: A Social Semiotic Approach to Contemporary Communication, Routledge: London. 2010.

KRESS, G.; JEWITT, C.; OGBORN, J.; TSATSARELIS, C. **Multimodal Teaching and Learning**: The Rhetorics of the Science Classroom. London, England: Bloomsbury Academic. 2014.

LAI, C.; WANG, Q.; HUANG, X. The evolution of the association between teacher technology integration and its influencing factors over time. **Journal of Research on Technology in Education**, vol. 55, n. 4, p. 727–747. 2023. DOI:10.1080/15391523.2022.2030266

LENEWAY, R. J. Transforming K-12 classrooms with digital technology: a look at what works. In **Transforming K-12 Classrooms with Digital Technology** (p. 1506–1530.) IGI Global: Hershey, EUA, 2017. 2014. DOI:10.4018/978-1-4666-4538-7.ch001

LEVIN, T.; WADMANY, R. Teachers' beliefs and practices in technology-based classrooms. **Journal of Research on Technology in Education**, vol. 39, n. 2, p. 157–181. DOI: <https://doi.org/10.1080/15391523.2006.10782478>

MALUBAY, J.; DAGUPLO, M. S. Characterizing Mathematics teachers' technological pedagogical content knowledge. **European Journal of Education Studies**, vol. 4, n. 1, p. 199-219. 2018.

MARTIN-BELTRAN, M.; PEERCY, M. M. Collaboration to teach English language learners: opportunities for shared teacher learning. **Teachers and Teaching**, vol. 20, n. 6, p. 721–737. 2014. DOI:10.1080/13540602.2014.885704

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, vol. 108, n 6, p. 1017–1054. 2006. DOI: <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>

NAIDOO, J. Responsive and Innovative Pedagogies: Exploring Postgraduate Students' Insights into the Use of Technology in Mathematics Teaching. **Alternation**, vol. 12, n. 1, p. 99 – 123. 2014.

O'NEIL, C. **Algoritmos de destruição em massa: como o big data aumenta a desigualdade e ameaça à democracia**. Trad. Rafael Abraham. SP: Rua do Sabão. 2020.

OLSHER, S.; YERUSHALMY, M.; CHAZAN, D. How might the use of technology in formative assessment support changes in mathematics teaching? **For the Learning of Mathematics**, vol. 36, n. 3, p. 11–18. 2016.

OTTENBREIT-LEFTWICH, A.; LIAO, J. Y.-C.; SADIK, O.; ERTMER, P. Evolution of teachers' technology integration knowledge, beliefs, and practices: How can we support beginning teachers use of technology? **Journal of Research on Technology in Education**, vol. 50, n. 4, p. 282–304. 2018. DOI: <https://doi.org/10.1080/15391523.2018.1487350>

PAPERT, S. **Mindstorms**: Children, computers, and powerful ideas. New York: Basic Books. 1980.

- PIAGET, J. **The science of education and the psychology of the child**. Orion. 1970.
- RABARDEL, P. From artefacts to instruments. **Interacting with Computers**, vol. 15, n. 5, p.641–645. 2008. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0953-5438\(03\)00056-0](https://doi.org/10.1016/S0953-5438(03)00056-0)
- RANE, N. Enhancing mathematical capabilities through ChatGPT and similar generative artificial intelligence: roles and challenges in solving mathematical problems. **SSRN Electronic Journal**. 2023. DOI: <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.4603237>
- RICO, L. Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. **Avances De Investigación En Educación Matemática**, (1), 39–63. 2012. DOI: 10.35763/aiem. v1i1.4
- ROSCHELLE, J. M.; PEA, R. D.; HOADLEY, C. M.; GORDIN, D. N.; MEANS, B. M. Changing How and What Children Learn in School with Computer-Based Technologies. **The Future of Children**, vol. 10, n. 2, p. 76–101. 2015. DOI: <https://doi.org/10.2307/1602690>
- SANDAR, M.; KÁLMÁN, O. Collaborative learning for professional development: A review of research methods and instruments. **Journal of Education in Black Sea Region**, vol. 8, n. 1, p. 110–122. 2022. DOI: <https://doi.org/10.31578/jeps.v8i1.283>
- SCHNAIDER, K.; GU, L.; RANTATALO, O. Understanding technology use through multimodal layers: a research review. **International Journal of Information and Learning Technology**, vol. 37, n. 5, p. 375–387, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1108/ijilt-02-2020-0020>
- SHAHMOHAMMADI, S. B. Opportunities and challenges in using dynamic software in mathematics education. **International Journal for Infonomics**, vol. 12, n. 1, p. 1834–1840. 2019. DOI: 10.20533/iji.1742.4712.2019.0187
- STEINBRING, H. Epistemological Constraints of Mathematical Knowledge in Social Learning Settings. In: Sierpinska, A., Kilpatrick, J. (eds) Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity. New ICMI Studies Series, vol 4. 1998. Springer, Dordrecht. DOI: 10.1007/978-94-011-5470-3_34
- STOLS, G.; KRIEK, J. Why don't all maths teachers use dynamic geometry software in their classrooms? **Australasian Journal of Educational Technology**, vol. 27, n. 1. 2011. DOI: <https://doi.org/10.14742/ajet.988>
- SUURTAMM, C.; THOMPSON, D. R.; KIM, R. Y.; MORENO, L. D.; SAYAC, N.; SCHUKAJLOW, S.; VOS, P. Assessment in mathematics education. In: **Assessment in Mathematics Education. ICME-13 Topical Surveys**. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-32394-7_1
- TONDEUR, J., DE BRUYNE, E., VAN DEN DRIESSCHE, M., MCKENNEY, S., ZANDVLIET, D. The physical placement of classroom technology and its influences on educational practices. **Cambridge Journal of Education**, vol. 45, n. 4, p. 537–556. 2015. DOI: <https://doi.org/10.1080/0305764X.2014.998624>
- TRUST T.; KRUTKA, D. G.; CARPENTER, J. P. “Together we are better”: Professional learning networks for teachers. **Computers & Education**, vol. 102, p. 15–34. 2016. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2016.06.007>
- VAN LEEUWEN, A.; RUMMEL, N. Orchestration tools to support the teacher during student collaboration: a review. **Unterrichtswissenschaft**, vol. 47, n. 2, p. 143–158. 2019. DOI: <https://doi.org/10.1007/s42010-019-00052-9>
- VAN LEEUWEN, T. **Introducing Social Semiotics**. Routledge: London. 2005.
- VYGOTSKY, L. **Mind in Society**: The Development of Higher Psychological Processes. Harvard University Press: Cambridge. 1978.
- WARDAT, Y.; TASHTOUSH, M.; ALALI, R.; SALEH, S. Artificial intelligence in education: Mathematics teachers' perspectives, practices and challenges. **Iraqi Journal For Computer Science and Mathematics**, vol. 5, n. 1, p. 60–77. 2024. DOI: <https://doi.org/10.38124/ijisrt/IJISRT24MAR1940>
- WINSLØW, C. Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education. **The Curriculum Journal**, 18(4), 523–536. 2007. DOI: 10.1080/09585170701687969
- YUNIANTO, W.; GALIC, S.; LAVICZA, Z. Exploring computational thinking in mathematics education: Integrating ChatGPT with GeoGebra for enhanced learning experiences. **International Journal of Education in Mathematics, Science, and Technology (IJEMST)**, vol. 12, n. 6, p. 1451-1470. 2024. DOI: <https://doi.org/10.46328/ijemst.4437>

Capítulo 5

Reflexões sobre a Inteligência Artificial Generativa nos ambientes escolares e o papel crítico do conhecimento

Gerson Pastre de Oliveira⁴²

1. Introdução

No ano de 2018, escrevemos um capítulo para um livro que organizamos com os colegas da instituição em que atuávamos à época. No texto, tratamos da questão da fluência no uso de tecnologias nos processos de ensino de matemática (OLIVEIRA, 2018). Não era uma novidade em si, mas uma compilação de elementos teóricos, entre os quais as propostas da articulação de pessoas e tecnologias, objetivada nas ideias de Borba e Villarreal (2005), conhecidas no âmbito do constructo *seres-humanos-com-mídias*. Outro constituinte importante das bases indicadas no texto provinha de Lévy (1993) e sua poderosa argumentação acerca das *tecnologias da inteligência*. Não menos importantes, o construcionismo (PAPERT; RESNICK, 1995) e as descrições da inserção de tecnologias em processos didáticos feitas por Mishra e Koehler (2006) também apoiaram o conjunto das argumentações que o capítulo procurava instaurar.

A noção de fluência, como propusemos, ocorrendo em um contexto educativo, pressuporia dois tipos de construção de conhecimento, que, por sua vez, se desenvolveriam em momentos próximos e interligados: a exploração dos componentes da interface e a internalização da lógica de utilização dos recursos disponíveis. Do ponto de vista da educação matemática, seriam dinâmicas voltadas à compreensão de como a tecnologia se conectaría com os objetos ou temas tratados e, no âmbito de um processo de ensino, de que forma essas relações se vinculariam às estratégias didáticas. Em outras palavras, essa conjunção possibilitaria “o refinamento das perspectivas abertas pela fluência”, dando corpo à “formação de coletivos constituídos por configurações de seres-humanos-com-mídias, por meio do desenvolvimento de um saber integrado do uso de tecnologias para a construção do conhecimento matemático”.

⁴² Universidade Paulista (UNIP) – Campus Jundiaí, Fatec Jundiaí (CEETEPS), <https://orcid.org/0000-0001-8113-936X>, gepasoli@gmail.com

(ou sua ressignificação) em um contexto de estratégias de ensino ou trajetórias de aprendizagem” (OLIVEIRA, 2018, p. 68).

Escrevemos o texto atual em 2025, pensando no sentido da ideia de fluência que defendemos naquele (já longínquo...) ano de 2018, e o fazemos a partir de questionamentos que surgem no arrasto de outra revolução⁴³, constituída pelo desenvolvimento das pesquisas e a entrega de resultados recentes da inteligência artificial (IA) para a sociedade, em caráter amplo e maciço. Se para os pesquisadores diretamente envolvidos nos avanços da IA, obtidos a partir do crescimento do poder computacional, da construção de algoritmos mais eficientes e do aumento significativo em investimentos, os resultados superaram as expectativas iniciais, para a população em geral, a entrega resulta em perplexidade e euforia, com um toque de “e agora?” diferente das novidades anteriores: uma legítima surpresa, como em um mergulho súbito em um cenário que antes surgia apenas em enredos de filmes de ficção. No entendimento comum, seria como se, de uma hora para outra, os programas computacionais começassem a produzir textos autônomos com sentido e profundidade, sobre os mais diversos assuntos; a criar representações artísticas originais em variados estilos; a gerar sons, vídeos e simulações, envolvendo personagens reais e fictícios, entre outras construções verdadeiramente impressionantes – e algumas, inclusive, preocupantes, uma vez que envolvem o uso de dados pessoais, registros biométricos e a própria imagem, estática ou em movimento, das pessoas. Isso sem falar na influência sobre o cotidiano, na vida comum, no processo educativo, no mercado de trabalho e em outras esferas.

Evidentemente, a pesquisa em IA não começou ontem: os primeiros estudos datam da década de 50 do século passado. Como na maioria das áreas de conhecimento, os resultados obtidos em investigações realizadas em um determinado período subsidiam as próximas, de modo que a evolução do conhecimento também se justifica pelo progresso e o avanço proporcionado pelos resultados consolidados parcialmente ao longo do tempo. A concentração de pesquisas e o aumento de financiamento em termos significativos são fatores que, entre outros, contribuem para ampliação de resultados em praticamente todos os domínios da ciência.

É inegável, entretanto, que, a partir de 2010, a escalada de desenvolvimento em pesquisa, incluindo a chamada Inteligência Artificial Generativa (IAG), responsável por grande parte dos resultados exemplificados anteriormente, forneceu a impressão de que tudo ocorreu

⁴³ Autores como Lévy (1993), Chartier (1999), Delors *et al.* (1998) e Castells (2002), entre outros, mencionaram o termo “revolução” para se referirem às potenciais profundas modificações que o uso e a apropriação de tecnologias provocaram na sociedade historicamente. É nesse sentido que usamos o termo aqui.

repentinamente. Não foi assim, compreendendo que resultados além das expectativas e obtidos rapidamente não são repentinos, como se não tivessem origem em conhecimento e não tivessem demandado todo um desenvolvimento anterior. De toda a forma, é importante compreender isso para, em seguida, entender o que fazemos com esses resultados e discutirmos para onde isso nos leva, ou seja, como isso impacta na vida das pessoas e como as diferentes áreas da ciência lidam com esse cenário.

Em específico, aqui, vamos falar sobre alguns usos da IAG nos processos de ensino de matemática, com foco em nossa experiência docente e de pesquisa, que é predominantemente voltada para o ensino superior. De forma ainda mais clara, o presente texto pretende discutir alguns efeitos e características da presença de programas baseados em modelos de arquitetura GPT (*Generative Pre-trained Transformer*) nos contextos educativos. A partir dessas asserções, levantaremos algumas conjecturas acerca do uso dessas tecnologias nos processos didáticos e a importância do conhecimento matemático das pessoas na validação dos resultados colhidos a partir de consultas aos programas por meio da elaboração de *prompts*⁴⁴. Finalmente, proponho uma reflexão sobre a questão da fluência, que levantei em 2018, considerando se a mesma permanece válida e em que termos. Podemos começar a partir de noções relacionadas à inteligência artificial para, em seguida, apresentarmos um quadro que nos permita compreender e posicionar os contextos escolares com IAG; depois, vamos descrever algumas experiências com o uso de IAG e alinhar algumas perspectivas. Seguiremos assim, então, sem a pretensão de esgotar os assuntos ou criar um guia infalível, mas de colaborar com um tema que pede amplas pesquisas também na área de educação.

2. Sobre inteligência artificial e um panorama evolutivo

Na visão de Oliveira *et al.* (2024), a inteligência artificial cumpriu, desde seus primórdios até a atualidade, um extenso caminho, com momentos de entusiasmo e de desânimo. Os estudos iniciais cogitavam a possibilidade da existência de máquinas pensantes, e podem ser sintetizados pela questão seminal de Turing (1950): “as máquinas podem pensar?”. De forma mais organizada, o ano de 1955 marcou o uso inaugural do termo e seu tratamento por nomes como John McCarthy, Marvin Minsky, Nathaniel Rochester e Claude Shannon (MCCARTHY; MINSKY; ROCHESTER; SHANNON, 1955). Esse último, aliás, responsável

⁴⁴ Um *prompt* é a entrada fornecida por um usuário para guiar a geração de conteúdo por um modelo de IA. Ele funciona como um comando ou instrução que define o contexto, a tarefa ou o estilo da resposta desejada. Esta entrada é majoritariamente composta por texto, mas pode conter também áudio e imagens, ou, ainda, uma combinação desses elementos.

pelo fundamental trabalho acerca da teoria de comunicação bastante referido como base para técnicas e modelos de IA baseados em entropia e entropia cruzada (SHANNON, 1948).

O caminho da pesquisa e dos resultados em IA não foi, contudo, um ‘mar de rosas’ o tempo todo. Antes dos avanços das primeiras décadas do século 21, longos períodos de descrença e de pausas nos progressos pontuaram a trajetória:

Durante cerca de 50 anos a área de inteligência artificial (IA) apresentou uma evolução marcada por períodos de euforia e depressão. Por exemplo, a década de [19]60 viu grandes promessas sobre a iminente programação de mestres de xadrez e especialistas em matemática, enquanto a década de [19]70 trouxe críticas aos resultados obtidos na área, um período frequentemente referido como o “inverno da IA” (Cozman, 2020, p. 13).

Para Rodrigues e Rodrigues (2023), o limitado acesso às redes de computadores nas décadas de 1950 e 1960, devido a desigualdades econômicas e sociais, influenciou negativamente o financiamento dessas tecnologias. Nessa época, a inteligência artificial dependia de dados fornecidos por especialistas em campos específicos, e integrar informações de diversas áreas exigia recursos financeiros elevados, enquanto os benefícios dessa integração permaneciam incertos. Mais tarde, na década de 1980, os sistemas especialistas dão certo revigoramento ao desenvolvimento da IA, que recebeu outros impulsos na década seguinte, incluindo discussões sobre a possibilidade de carros autônomos, o acesso mais amplo das pessoas às redes e o lançamento de obras de ficção científica. As autoras mencionam, ainda, um novo declínio, superado já no século XXI, com a emergência das *redes neurais artificiais profundas*, inaugurando “uma subárea importante da IA no ano de 2010, conhecida como *deep learning* ou *aprendizagem profunda*” (p. 3).

Superados os percalços e o ceticismo, os resultados alcançados pela pesquisa e produção de algoritmos avançados superou de longe as expectativas dos especialistas. O alcance da IA, então, fez por ampliar seu campo de noções e as teorias nas quais se baseia. Sem pretensão de grande aprofundamento, uma breve recuperação desses elementos conceituais pode nos ajudar a entender melhor essa trajetória.

Entre os textos clássicos sobre inteligência artificial, sem dúvida é impossível omitir o livro de Russell e Norvig (2022), cujas primeiras edições foram publicadas na década de 1980 e que foi amplamente traduzido e adotado em cursos universitários. Para esses autores, haveria quatro definições, de distintas categorias sobre IA envolvendo, de um lado, sistemas que agiriam como seres humanos e sistemas que pensariam como seres humanos, e, de outro, sistemas que pensariam racionalmente, além dos sistemas que agiriam racionalmente. Nessa

última categoria, estariam os programas que, idealmente, manteriam interações e percepções em relação ao ambiente, o que lhes permitiria efetuar adaptações diante de mudanças (RUSSELL; NORVIG, 2022).

Outro texto de igual valor histórico é o produzido por Rich e Knight (1994). Para esses autores, a finalidade da inteligência artificial seria produzir sistemas para desempenhar tarefas as quais, no momento de sua automatização, seriam realizadas de maneira mais adequada por humanos do que por máquinas e que não encontrariam equacionamento ou solução algorítmica por meio dos recursos tradicionais de programação/computação⁴⁵.

De outro modo, Gallent-Torres, Zapata-González e Ortego-Hernando (2023) referem a IA como um conjunto de “sistemas que, ao aprender com grandes quantidades de dados, são capazes de entender, argumentar, resolver problemas e tomar decisões” (p. 3, tradução nossa). Essa definição, como poderemos ver mais adiante, já é fruto das transformações promovidas pelas pesquisas deste século – isso fica claro quando os autores mencionam o aprendizado a partir de grandes massas de dados.

Ainda no campo da compreensão sobre os significados da expressão, o trabalho de Santaella (2023) traz, em sua introdução, um competente apanhado sobre definições, ou, segundo a própria autora, “o que se entende por inteligência artificial” (p. 9). Para isso, vale-se de outros autores e de posicionamentos em sites oficiais de corporações. A lista seguinte sintetiza o levantamento por ela realizado:

- “A inteligência artificial potencializa computadores e máquinas para imitar recursos da mente humana para solucionar problemas e tomar decisões” (IBM *apud* SANTAELLA, 2023, p.9);
- Para Webb (2020 *apud* SANTAELLA, 2023), a inteligência artificial poderia ser definida como “um sistema que toma decisões autônomas” (p. 10). Com essa finalidade, tal sistema poderia “simular a inteligência humana como reconhecer sons e objetos, resolver problemas, compreender linguagem e usar estratégia para atingir objetivos” (*idem*);

⁴⁵ É preciso ter em mente, aqui, que a recuperação de definições sobre IA em fontes das décadas de 1980 e 1990 tem um caráter que busca ilustrar, também, as mudanças e reorganizações que ocorreram ao longo do tempo. Para Cozman (2021), o livro de Rich e Knight (1994), por exemplo, refletia “uma disciplina imatura e dividida entre um sem-número de técnicas rivais”.

- Ainda da IBM, a autora menciona outra definição, dando conta que a “IA é um campo que combina a ciência da computação a conjuntos de dados robustos para permitir a resolução de problemas” (SANTAELLA, 2023, p. 10).

Na contemporaneidade, a convergência desses estudos parece indicar a prevalência de modelos baseados em aprendizado de máquina (*machine learning*) e aprendizado profundo (*deep learning*). Existem diferenças entre as definições relativas a essas duas subáreas específicas, por vezes referidas como sinônimos.

Para a IBM, “*machine learning* é uma área da inteligência artificial (IA) e da ciência da computação que se concentra no uso de dados e algoritmos para imitar a maneira como os humanos aprendem, melhorando gradualmente sua precisão” (IBM, 2020, s/p). Os algoritmos que empregam essa noção se valem de conceitos estatísticos e de métodos de otimização para gerar modelos treinados para classificar, prever e/ou identificar padrões (BERKELEY, 2018). Dessa forma, um algoritmo de *machine learning* deve levar em conta pelo menos três componentes essenciais (IBM, 2020; BERKELEY, 2018):

- *Um processo de decisão*: um roteiro, envolvendo cálculos ou comparações, por exemplo, que, ao longo de certo número de etapas, procura promover aproximações com valores conhecidos ou determinar os padrões que o algoritmo tenta encontrar;
- *Uma função de erro*: responsável por avaliar o desempenho do modelo e/ou sua capacidade de predição, por meio de esquemas de quantificação do afastamento do desempenho do modelo em certo ponto em relação aos exemplos conhecidos (se houverem), ou seja, de determinar os erros (resíduos), cuja expectativa é minimizar ao longo do processo;
- *Um processo de otimização*: visando atingir determinada precisão, o algoritmo deve ser capaz de repetir o processo de obtenção dos erros e ajuste dos mesmos, por meio da otimização, de maneira autônoma – em outras palavras, o algoritmo pode, por exemplo, obter “resíduos”, trabalhar na correção das falhas com base neles e ajustar o processo de decisão/avaliação, de modo a, gradualmente, diminuir as discrepâncias.

De outro modo, *deep learning* é um ramo específico de *machine learning* que utiliza redes neurais profundas (com muitas camadas) para modelar e resolver problemas complexos. Para ficar mais claro, é correto dizer que *machine learning* é um subcampo da IA que utiliza algoritmos para que máquinas aprendam com dados. As redes neurais são uma técnica (ou abordagem) no contexto de *machine learning*. Dessa forma,

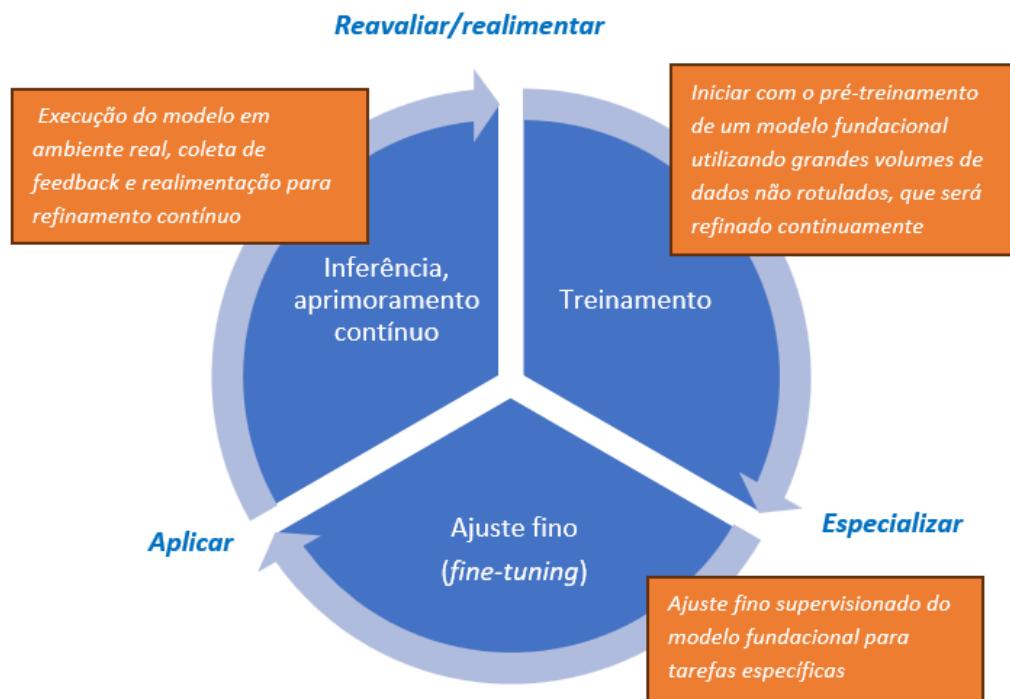
O deep learning e o machine learning diferem na forma como cada algoritmo aprende. O "deep" machine learning pode usar conjuntos de dados rotulados, também conhecidos como aprendizado supervisionado, para informar seu algoritmo, mas não requer necessariamente um conjunto de dados rotulados. O deep learning pode inferir dados não estruturados em sua forma bruta (por exemplo, texto, imagens) e pode determinar automaticamente o conjunto de recursos que distinguem diferentes categorias de dados umas das outras. Isso elimina parte da intervenção humana necessária e permite o uso de conjuntos de dados maiores (IBM, 2020, s/p).

Na esteira dessas noções, a partir dos anos 2010, ocorrem uma série de evoluções importantes. O aumento do poder computacional é um fator importante, com o desenvolvimento de GPUs (*Graphics Processing Unit*), essenciais para a realização de cálculos e renderização de gráficos, entre outras tarefas, em alta velocidade e com boa performance; além disso, as *unidades de processamento tensorial* (TPUs) passam a acelerar o treinamento em modelos de *deep learning*, otimizando altos volumes de cálculos para obtenção de resultados mais precisos. Ainda na esfera da aceleração da capacidade de computação, podemos mencionar a emergência de infraestruturas de computação em nuvem e a larga disponibilidade de dados digitais para treinar modelos complexos.

Assim, especificamente, a IAG, foco de nosso interesse, seria um tipo de IA capaz de “criar conteúdo original, como texto, imagens, vídeo, áudio ou código de software, em resposta a um prompt ou solicitação do usuário” (IBM, 2024). A IAG depende de modelos de *deep learning* que funcionam, nesse caso, especificamente “identificando e codificando os padrões e relacionamentos em grandes quantidades de dados e, em seguida, usando essas informações para entender as solicitações ou perguntas de linguagem natural dos usuários e responder com novo conteúdo relevante” (IBM, 2024).

A IAG pode ser vista, também, como um modelo cíclico, com base em etapas explicitadas na figura 1.

Figura 1 – Ciclo de vida operacional de sistemas de IAG



Fonte: IBM (2024) – adaptado

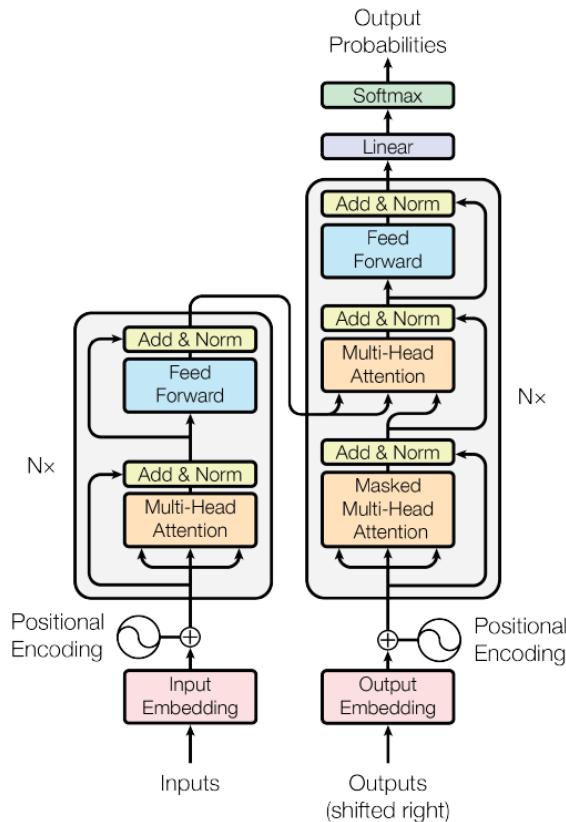
Especificamente, em termos teóricos, a Inteligência Artificial Generativa é uma classe de modelos capazes de gerar novos conteúdos a partir de exemplos, baseando-se em grandes modelos fundacionais (*foundation models*), que passam por um ciclo iterativo de pré-treinamento, especialização (*fine-tuning*) e inferência com realimentação.

Neste contexto, podemos mencionar os LLM (*Large Language Models* ou Modelos de Linguagem de Grande Escala) – um LLM é um modelo de inteligência artificial treinado em uma vasta quantidade de dados textuais para compreender e gerar linguagem natural utilizando algoritmos baseados em redes neurais profundas para processar e produzir textos que seriam coerentes e contextualizados. Em 2017, o modelo teórico de *transformadores* é proposto, a partir do artigo *Attention Is All You Need* (Vaswani et al, 2017). Modelos baseados nessas estruturas, como GPT, tendem a elevar as capacidades de compreensão e geração de linguagem consideravelmente. Essa proposta foi decisiva para o surgimento e consolidação da IAG em texto, que passou a ser utilizada por diversos segmentos da sociedade devido à capacidade de gerar conteúdo, em tese, original e de certa qualidade.

Os modelos GPT são baseados em escala massiva, ou seja, bilhões de parâmetros concorrem para o treinamento em textos diversificados, de modo a gerarem respostas contextuais. Além disso, esses modelos utilizam técnicas como aprendizado por reforço com

feedback humano (RLHF), que concorrem para aumentar a precisão e a utilidade das aplicações. De maneira mais específica, funcionam a partir de um pré-treinamento, feito com grandes volumes de dados, geralmente oriundos da Internet, de maneira a aprender padrões linguísticos; posteriormente, o modelo pode ser refinado para tarefas específicas (figura 2).

Figura 2 – O transformador (arquitetura do modelo)



Fonte: Vaswani *et al.* (2017, p. 3)

De maneira mais específica, a figura 2 ilustra a arquitetura básica de um transformador, que, como mencionamos, é um modelo de rede neural projetado para processar dados sequenciais, como texto, de forma eficiente. A estrutura central é composta por camadas de codificador e decodificador, ambas utilizando mecanismos de atenção que permitem ao modelo priorizar informações relevantes em um contexto amplo. A proposta deste design foi a de superar limitações de modelos sequenciais anteriores, permitindo maior paralelismo e desempenho na compreensão e geração de linguagem natural.

Esse é o panorama em que recapitulamos a questão de Turing sobre máquinas inteligentes. Sem dúvida, a questão sobre a inteligência e a autonomia passa a ser relevante nesses cenários. Nas palavras de Cozman,

[...] existe uma considerável superposição entre aprendizado de máquina, estatística e ciência de dados, além de uma significativa superposição com a área de mineração de

dados e de big data. Todos esses campos lidam com massas de dados a partir das quais se extraem padrões, regras, fatos, possibilidades, palpites, expectativas. Em todos eles hoje predominam métodos estatísticos e técnicas inspiradas no cérebro, como as celebradas redes neurais [...] (2020, p. 17).

Trata-se de um tipo de inteligência, alimentada por aprendizagem, mas de maneira diversa da forma como aprendem os seres humanos, pelo menos em termos mais amplos. Nesse sentido, recuperando o discurso de Santaella (2023), essas diferenças estão relacionadas às formas pelas quais as máquinas executam tarefas de aprendizado. Enquanto os seres humanos interpretam exemplos que recebem, envolvendo discernimento e apelando a referências, as máquinas necessitam de uma grande massa de exemplos (dados sobre determinado assunto). Citando a autora, asseveram Rodrigues e Rodrigues:

Desse modo, a justificativa de que “[...] a IA é inteligente porque o computador adquiriu o potencial de aprender e tomar decisões com base nas informações que recebe” ([Santaella, 2023], p. 187) e ao combinar os padrões, adquire competência de resolver problemas de maneira quantificada, que difere da maneira qualificada da inteligência humana. Trata-se de uma inteligência útil ao ambiente organizacional, que é diferente da inteligência humana, por não gerir fatores como imaginação, criatividade e emoção. [...] Ao discorrer sobre as características da inteligência humana e IA, podemos inferir que os algoritmos presentes no *ChatGPT* podem recriar, com a repetição de respostas automatizadas por seus habilidosos padrões estatísticos quantificáveis, e otimizar as tendências relevantes, que devem ser analisadas de maneira cautelosa por seus usuários; mas felizmente não é uma linguagem que pode agir por si mesmo, automatizada (Rodrigues; Rodrigues, 2023, p. 7-9).

As contribuições das autoras supramencionadas nos ajudam a introduzir e distinguir dois termos essenciais nesse dilema sobre inteligência, que seriam “IA fraca” e “IA forte” (ou “geral”). A segunda categoria ainda não existe, a não ser teoricamente:

A IA forte, frequentemente utilizada como sinônimo de Inteligência Artificial Geral (AGI), refere-se a uma forma teórica de Inteligência Artificial (IA) que possui capacidades cognitivas comparáveis às dos seres humanos. Ao contrário dos sistemas de IA especializados concebidos para tarefas específicas, a IA forte apresentaria um vasto leque de capacidades intelectuais, incluindo a aprendizagem, o raciocínio, a resolução de problemas em diferentes domínios, a compreensão de conceitos complexos e, potencialmente, a consciência ou autoconsciência. Representa o objetivo de criar máquinas com compreensão e inteligência genuínas, em vez de apenas as simular para aplicações limitadas (Ultralytics, 2025).

Em outro sentido, a IA fraca é caracterizada por parâmetros limitados (ainda que em enormes quantidades) e responde a um conjunto de regras (ainda que amplas). Nesse sentido, “a IA fraca depende da interferência humana para definir os parâmetros dos seus algoritmos de aprendizado e fornecer os dados de treinamento relevantes para garantir a precisão. [...]. Carros autônomos e assistentes virtuais, como a Siri, são exemplos de IA fraca” (IBM, 2025). Em 2025, mesmo as mais impressionantes respostas de programas GPT e de aplicações com base em conceitos como visão computacional, por exemplo, são construídas a partir desse princípio.

Disso se conclui que a IA de que estamos falando – e a que temos disponível, no melhor caso, quando este texto é escrito – é estrita, baseada em treinamento intensivo e funções matemáticas/estatísticas, com refinamento executado em larga escala e baseada em padrões, não em raciocínio.

Ainda que seja outra inteligência (ou um uso amplamente sofisticado e contextual de dados para combinar conteúdos), não se pode ignorar que respostas potencialmente coerentes grande parte das vezes, complexas, amplas e contextualizadas passam a ficar disponíveis para as pessoas em geral. Na escola, entre estudantes e professores, não é diferente. As noções levantadas nessa parte do texto são importantes para as discussões propostas, tanto em relação à fluência com IAG quanto em relação ao trabalho didático com essas tecnologias. Queremos entender, ainda que de forma provisória e sujeita às mudanças constantes que podem sobrevir, se as lógicas ligadas aos processos de ensino e de aprendizagem são alteradas, especificamente, aqui, em contextos em que se trabalha com conteúdos matemáticos. Podemos falar de outra escola? Podemos falar de pessoas-com-IAG?

3. A IAG na escola e as questões críticas do saber e da didática

A escola, como um lugar do mundo, também é um espaço de inserção, experimentação, uso e aplicação de tecnologias. Desde que mundo é mundo (ou desde que escola é escola, se preferirem) alguma mediação ocorre tendo em conta alguma tecnologia – ainda mais se considerarmos o conceito de tecnologias da inteligência, em Lévy (1993). As chamadas “tecnologias novas” (ou “inovadoras”) nem sempre surgem nos lugares em que são intensivamente usadas. Todavia, como permeiam a evolução humana, vão entrando nos espaços com as pessoas, que as desenvolvem e aprimoram – e nem sempre o fazem de maneira organizada e institucional.

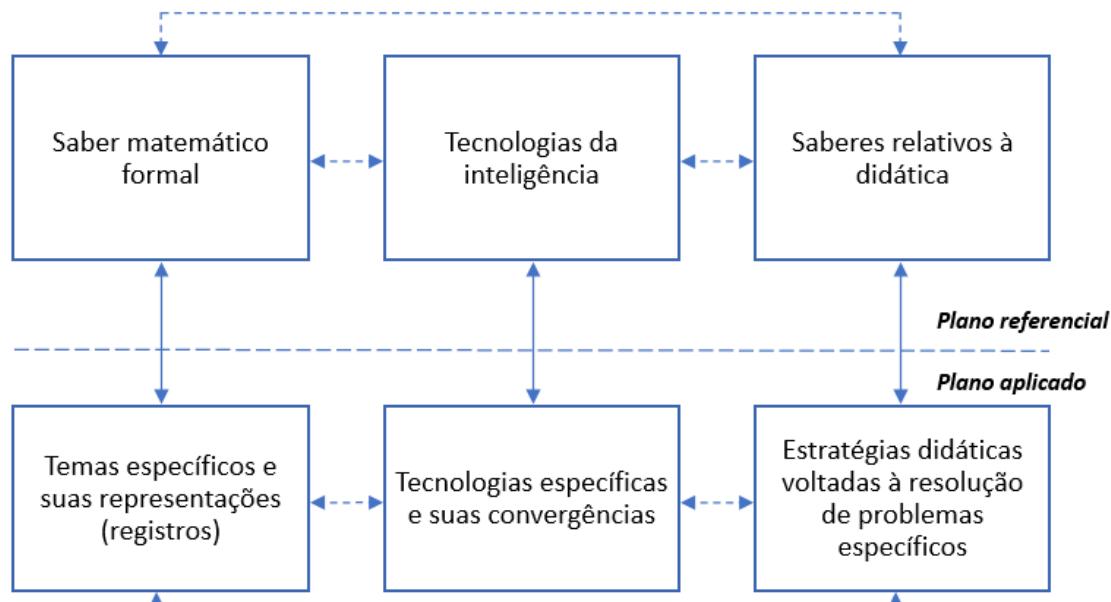
Muitas vezes, as pessoas usando tecnologias vão subvertendo as lógicas estabelecidas, os regramentos, as sequências e os modelos nos quais as relações de ensino e de aprendizagem foram estabelecidos. A partir desses movimentos, por exemplo, professores e membros dos corpos diretivos vão sendo impactados, em conjunto com seus grupos de estudantes. Inserida na sociedade e em um sistema regulatório, a escola vai se equilibrando como pode, até a atualização dos elementos formais que regem seus funcionamentos (leis, currículos, orientações). Atualmente, praticamente todos esses instrumentos legais dedicam partes consideráveis ao uso de tecnologias nos processos de ensino.

Quase que em paralelo, ainda que não idealmente, corre a pesquisa em educação. Na formação de professores, Mishra e Koehler (2006) indicaram ser fundamental inserir o componente tecnológico em conjunto com os recomendados por Shulman (1986), relativos à didática e ao conteúdo, na formação de professores. De outro modo, a argumentação de Borba e Villarreal (2005) estrutura o constructo seres-humanos-com-mídias, considerando a proposição de que o conhecimento é construído a partir de um coletivo formado por pessoas e tecnologias.

A ideia de fluência, que referimos no começo deste texto, implica em construir uma apropriação do uso de tecnologias que não é independente da construção do próprio conhecimento – pelo contrário, amplia seu sentido e seu alcance ao ocorrer de forma conjunta. Mais especificamente, o desenvolvimento da fluência em tecnologias usadas para ensinar e/ou aprender não é um processo isolado e não considera o aprimoramento de habilidades em interfaces e dispositivos como o objetivo primordial a ser alcançado: é parte de algo que se integra a um processo com várias articulações, principalmente com o saber de referência e com as estratégias didáticas.

Assim, nem toda tecnologia é adequada em qualquer momento ou em qualquer cenário, mas depende de encaixe e de planejamento, como o processo em si. Uma vez, então, entendidas as restrições e as potencialidades de cada elemento tecnológico cogitado para compor o processo, é preciso ter em relação a ele a proximidade e a integração que permita um fazer conjunto, assim como se deve ter em relação ao conhecimento em processo de construção e às estratégias didáticas desenhadas para buscar os objetivos. Se há um conhecimento a construir, considerando um contexto específico em um processo de ensino, há estratégias e tecnologias adequadas, e a fluência é igualmente importante em todas essas dimensões. Isso nos levou a considerar as articulações em um esquema de dependências mútuas, que reproduzimos aqui.

Figura 3 – Articulações relativas à fluência no uso de tecnologias nos processos educacionais



Fonte: Oliveira, 2018, p. 76

O esquema representado na figura 3 indica a existência de dois planos, que chamamos de “referencial” e “aplicado”. São dimensões cujos componentes são articulados e é justamente na articulação que reside a importância dessa visão em um processo de ensino ou de aprendizagem. Temas específicos desenvolvidos em uma aula encontram suporte e legitimidade no saber que os leva a serem transformados em elementos de interesse nos currículos; tecnologias específicas são formas pensadas como as mais adequadas, em um contexto, para reorganizar o pensamento e subsidiar a inteligência; e estratégias didáticas específicas são as maneiras destacadas desde o acervo de saberes sobre didática em geral para conduzir o processo de construção do conhecimento por uma trajetória adequada às pessoas que dele participam.

Um aspecto subjacente, mas não menos importante, que o esquema da figura 3 aponta é o da validação: o conhecimento posto em construção no plano aplicado tem sua referência de validade no chamado plano referencial, especialmente se considerarmos a necessidade de termos por base, no campo em que atuamos, o estatuto formal do conhecimento matemático. Parece óbvio, mas vamos manter isso em mente: são importantes as referências para o planejamento no campo da tecnologia e da didática, mas é imprescindível a validade no campo do saber.

Voltemos à IAG. Uma análise mais apressada poderia supor que as asserções trazidas nesta parte cairiam por terra – afinal, pode-se perguntar praticamente tudo aos *chats* que representam interfaces para GPTs, obtendo respostas organizadas, prontas e contextuais. Isso

dispensaria as reflexões sobre os planos, envolvendo saberes, tecnologias e estratégias, certo? Bem, achamos que a resposta para isso é um “não” bem grande.

O papel orientador do professor, discutido desde que as tecnologias começaram a ser inseridas em contextos educativos, aparece aqui com ainda maior relevância, bem como o aspecto crítico e o discernimento. O ChatGPT, por exemplo, programa construído e mantido pela empresa *OpenAI*, é uma tecnologia que responde perguntas, mas sem garantia de acerto. Avisos sobre essa possibilidade, inclusive, constam na tela principal do aplicativo, onde se pode ler a mensagem “*O ChatGPT pode cometer erros. Considere verificar informações importantes*”. Até aí, tudo bem, já que as pessoas também cometem erros, não é? Na verdade, é diferente: tecnicamente, como IA fraca, os GPTs não possuem consciência crítica e autonomia para reconhecerem, após uma entrega, que há falhas a serem corrigidas. Outro aspecto a ser considerado fica por conta do imaginário das pessoas, que podem confundir uma tecnologia com limitações com um oráculo infalível.

Entretanto, alguns fatores podem influenciar na obtenção de respostas mais precisas; entre eles, a qualidade do *prompt*, ou seja, do questionamento elaborado para a aplicação. Em algumas versões desses programas, é possível agregar imagens, planilhas e outros arquivos como elementos considerados na análise. A relevância da forma como se elabora um questionamento é tão considerável ao ponto de uma nova subárea de estudos e atuação ter sido aberta em atenção a este fato, conhecida como *engenharia de prompts*⁴⁶.

Entretanto, mesmo em alguns casos cujos questionamentos se referem a problemas simples, podem ocorrer equívocos. Isso não deveria ser tão impressionante: ainda que treinado com bilhões de parâmetros, os esquemas baseados em funções de ativação, padrões matemáticos/estatísticos e técnicas específicas de IA não são livres de falhas.

Tomemos um caso prático para ilustrar essa asserção e justificarmos essas afirmações. Em seu artigo, Borba e Balbino Junior (2023) indicam alguns casos em que usam o ChatGPT para a resolução de problemas, inclusive um de geometria, cujo enunciado é inserido em um *prompt* nos seguintes termos: “um hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros,

⁴⁶ A ideia por trás desse conceito é a de que prompts feitos com qualidade podem obter resultados muito mais precisos. Neste sentido, o entendimento é que “a IA generativa se baseia no refinamento iterativo de diferentes técnicas de engenharia de prompts para aprender efetivamente com diversos dados de inputs e se adaptar para minimizar vieses e confusões e produzir respostas mais precisas” (IBM, 2025b). Em outras palavras, reconhecendo a possibilidade de respostas de baixa qualidade, é preciso, entre outras coisas, elaborar da forma mais precisa possível as consultas desejadas, considerando, para os profissionais que atuam nesta especialidade, “uma compreensão profunda de vocabulário, nuances, fraseado, contexto e linguística, porque cada palavra em um prompt pode influenciar o resultado” (IBM, 2025b). Sobre a influência dos prompts em resultados de consultas em plataformas LLM, ver Schorcht, Buchholtz e Baummans (2024).

com os lados medindo 12 cm. Determine a área do hexágono” (p. 151). A resposta fornecida e documentada pelos autores foi $36\sqrt{3}$ cm². Entretanto, a resposta correta seria $216\sqrt{3}$ cm².

Submetemos o mesmo problema ao ChatGPT, agora na versão 4.0. As solicitações foram feitas com dois *prompts* ligeiramente distintos, com cerca de 30 dias de diferença uma da outra: um dos *prompts* era exatamente igual ao do artigo de Borba e Balbino Junior (2023), enquanto o outro trazia o enunciado contido na figura 4.

Figura 4 – Reposta do ChatGPT-4.0 a uma questão de cálculo de área de um hexágono regular

Calcule a área de um hexágono regular constituído por triângulos cujos lados medem 12 cm

Para calcular a área de um hexágono regular constituído por triângulos equiláteros cujos lados medem 12 cm, siga estas etapas:

- Número de triângulos:** Um hexágono regular pode ser dividido em 6 triângulos equiláteros.
- Área de um triângulo equilátero:** A fórmula para calcular a área de um triângulo equilátero com lado a é:
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$
Neste caso, $a = 12$ cm, então:
$$A_{\text{triângulo}} = \frac{\sqrt{3}}{4}(12)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 144 = 36\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
- Área do hexágono:** Como o hexágono é composto por 6 triângulos, a área total do hexágono é:
$$A_{\text{hexágono}} = 6 \times A_{\text{triângulo}} = 6 \times 36\sqrt{3} = 216\sqrt{3} \text{ cm}^2$$
Aproximando $\sqrt{3} \approx 1,732$, temos:
$$A_{\text{hexágono}} \approx 216 \times 1,732 = 374,832 \text{ cm}^2$$
Portanto, a área do hexágono é aproximadamente **374,83 cm²**.

Fonte: elaborado pelo autor (com uso do ChatGPT-4.0)

Desta vez, o aplicativo entregou uma resposta correta. Pode-se conjecturar que o caráter evolutivo da tecnologia, que aprende com ciclos de retreinamento em larga escala, e o uso de uma versão melhorada interferiu na resposta para esse problema em particular. Outra possibilidade é um problema típico da IAG (IBM, 2024), e que se relaciona com *saídas inconsistentes*: em função da natureza probabilística presente em boa parte dos modelos de IAG, entradas sobre um mesmo tópico podem gerar saídas que contêm, entre si, diferenças que variam de pequenas partes até todo o conteúdo, o que pode ser problemático em certos contextos – principalmente, se umas respostas estão certas e outras não.

Além da questão supramencionada, em sua página sobre IAG, a IBM indica outros riscos, limitações e desafios relacionados ao uso de sistemas que têm esse conceito como base (IBM, 2024):

- Alucinações e outros tipos de saídas imprecisas: alucinações são saídas geradas por IAG que podem ser classificadas como absurdas ou completamente imprecisas, com o agravante de que são entregues sob uma roupagem bastante convincente. Para Schorcht, Buchholtz e Baummans (2024), ainda que as plataformas LLM tenham apresentado aumento da qualidade em suas respostas, as alucinações ainda são um problema a ser enfrentado;
- Vieses: modelos de IAG podem aprender conteúdos de caráter ofensivo ou preconceituoso, em função dos elementos presentes nas fontes de dados ou como resultado da interação com humanos;
- Dificuldade na compreensão de critérios e métricas: dada a complexidade, os processos de tomada de decisão e os critérios adotados por modelos de IAG podem ser bastante difíceis de compreender – em alguns casos, até mesmo por seus criadores;
- Deepfakes e ameaças à segurança, à privacidade e à propriedade intelectual: são conteúdos criados ou manipulados por IA de forma maliciosa para convencer pessoas acerca de inverdades – trata-se de uma possibilidade assustadora de mau uso desse tipo de tecnologia; da mesma forma, modelos de IAG podem ser usados para gerar identidades falsas, e-mails que visam roubar dados sensíveis (*phishing*), além de outras práticas criminosas.

Como se vê, alguns dos problemas possíveis são extremamente graves e mereceriam, cada um deles, todo um arrazoado sobre a necessidade de mediação e exame minucioso por parte dos usuários, o que naturalmente se estende ao planejamento de aulas nos mais diversos contextos. Uma *deepfake*, por exemplo, pode ser disseminada e “aprendida” por sistemas de IAG para falsear princípios científicos consolidados, substituindo-os por bobagens mal-intencionadas.

Por outro lado, aspectos problemáticos não excluem a possibilidade de uso de IAG em estratégias didáticas com tecnologias para o ensino de diversos assuntos, inclusive matemática. Como em todo o processo de ensino e de aprendizagem, cabe a professores e alunos identificarem e cumprirem seus papéis. No entanto, em se tratando de tecnologias que podem ser usadas para fornecer respostas diretas, é importante reconhecer a presença de um cenário

distinto, o que reforça o elo entre o uso da tecnologia, o suporte e a validação do conhecimento em questão, além do correto desenho didático das tarefas e/ou problemas envolvidos.

O objetivo da IAG não deve ser o de substituir a construção do conhecimento como processo autônomo do estudante, mesmo porque a própria afirmação de substituição não tem o menor sentido – vamos lembrar Tikhomirov (1981), segundo o qual a questão é que as tecnologias reconfiguram o pensamento, não o substituem. Também não deve ser um mero facilitador do trabalho do professor, quando apenas entrega conteúdo de aula que não passa por crítica, revisão, encaixe em um tema ou plano de ensino. A tarefa não parece simples, mas, ainda que desafiadora, é necessária e até urgente. Nesse sentido, como proposta de ação e convite à reflexão, vamos apresentar, em seguida, duas experiências que ilustram o ponto de vista que buscamos trazer aqui.

4. Recortes sobre experiências com IAG em cenários de ensino

A primeira das abordagens trazidas aqui também surgiu por inspiração provinda da leitura do artigo de Borba e Balbino Junior (2023). Além da questão que já tratamos aqui, outras duas foram propostas pelos pesquisadores ao ChatGPT. Uma delas tinha um conteúdo elaborado com base em princípios lógicos, o clássico problema conhecido como “paradoxo do mentiroso”. O *prompt* foi elaborado com o seguinte enunciado: “se uma criança que sempre fala a verdade diz que está mentindo, ela está dizendo a verdade ou está mentindo?” (BORBA; BALBINO JUNIOR, 2023, p. 150). Os autores indicaram que a resposta do programa foi clara e coerente, revelando compreensão dos princípios de lógica envolvidos e da impossibilidade de fornecer uma solução que supere o paradoxo – assim, o acerto e a boa qualidade da resposta se revelaram pelo reconhecimento das limitações impostas pelo paradoxo no campo da lógica.

Dessa forma, em um estudo em que falávamos sobre alguns elementos da didática da matemática, apresentamos a um programa ChatGPT-4o um questionamento para o qual, por outros motivos, também não haveria uma resposta coerente a ser dada e que consistia no conhecido “problema da idade do capitão”. A pergunta formulada e a resposta do programa podem ser vistas na figura 5.

Figura 5 – Reposta do ChatGPT-4o ao “problema da idade do capitão”

Se um barco transporta 26 ovelhas e 10 cabras, quantos anos tem o capitão?

Essa pergunta parece ser uma charada, pois não há informações suficientes para determinar diretamente a idade do capitão com base no número de ovelhas e cabras que o barco transporta. Em charadas como essa, muitas vezes a resposta é um jogo de palavras ou um trocadilho.

A resposta mais comum a essa charada é: "O capitão tem a mesma idade que a pessoa que responde." Ou seja, a idade do capitão não é determinada pela quantidade de ovelhas ou cabras.

Se precisar de mais alguma coisa, estou à disposição!

Fonte: elaborado pelo autor (com uso do ChatGPT-4o)

Como se pode observar, a entrega do ChatGPT apresenta coerência e, em si, não está errada: realmente não há resposta. Entretanto, trata-se de um problema bastante conhecido no âmbito da Didática da Matemática e que foi proposto em vários estudos para investigar e evidenciar os efeitos do contrato didático. No caso, conforme esclarece Silva (2008), a questão é típica da ruptura do contrato – uma série de esquemas geralmente disponíveis nas questões típicas oferecidas pelo professor ao estudante (operações aritméticas, regras de três etc.) não levariam à solução. Mesmo assim, em diversas situações, o aluno fornece respostas absurdas ao questionamento, em si também absurdo⁴⁷.

Ainda que não solicitada explicitamente, a relação com a teoria mencionada poderia ser esperada. Quando mencionamos isso em outro *prompt*, outra resposta foi entregue:

⁴⁷ Sintetizando a questão dos efeitos do contrato didático, o autor assevera: “esse comportamento dos alunos revela que existem regras vigentes, ainda que implícitas, completamente internalizadas por eles, regras essas que, quando aplicadas, conduzem a uma grande quantidade de erros dos alunos e a incoerências no tratamento desses erros pelos professores” (SILVA, 2008, p. 59).

Figura 6 – ChatGPT-4o sobre “problema da idade do capitão” (após intervenção)

Exatamente! O exemplo que você trouxe, proposto por Guy Brousseau, é uma crítica à lógica de ensino tradicional, especialmente àquela que busca respostas definitivas e uma associação automática entre uma pergunta matemática e uma operação específica. Brousseau usou essa charada para ilustrar o que ele chama de “contrato didático”, no qual os alunos, muitas vezes, tentam aplicar regras matemáticas de maneira mecânica, mesmo quando o problema em questão não exige uma solução matemática direta.

O “problema da idade do capitão” serve para questionar como a educação matemática, muitas vezes, incita os alunos a procurar uma solução quantificável para qualquer situação, mesmo quando a questão proposta é absurda ou sem uma relação matemática concreta, como no caso da quantidade de ovelhas e cabras. Isso é uma crítica à tendência de sempre associar números e operações a todas as questões, sem considerar contextos mais amplos, reflexivos ou mesmo lúdicos.

O conceito de contrato didático de Brousseau também envolve a ideia de que o professor e os alunos têm expectativas implícitas sobre como a matemática deve ser ensinada e aprendida, e essas expectativas podem limitar a compreensão mais profunda dos conceitos. Esse tipo de problema serve como um excelente ponto de partida para discussões sobre metodologias de ensino e aprendizagem mais flexíveis e abertas à reflexão.

Se precisar de mais informações sobre Brousseau ou sobre o conceito de contrato didático, estarei por aqui!

Fonte: elaborado pelo autor (com uso do ChatGPT-4o)

Pelo conteúdo da nova resposta, evidenciado na figura 6, é possível perceber que o programa dispunha de dados para discorrer sobre a teoria envolvida, mas não construiu a relação a partir de um questionamento que favoreceria essa providência. Não ocorreu um erro, portanto, mas uma resposta superficial e descolada de elementos teóricos que lhe confeririam substância e teor acadêmico – ou seja, uma resposta dada como um “palpite”, não a que seria provida por um especialista. Uma conjectura que podemos levantar aqui é que existem limitações quando o uso do programa implicaria em correlações menos evidentes e/ou anunciadas, explícita ou implicitamente: no caso mencionado, em tese, se um problema não é reconhecido como típico, em certo contexto, o GPT parece ter dificuldade em o relacionar com um campo teórico.

Entretanto, seria possível argumentar, até pelas definições trazidas anteriormente neste texto, que os GPTs e demais programas baseados em IAG aprendem por treinamento e refinam suas bases, melhorando seus padrões de respostas, a partir de feedbacks e reestruturações das conexões e dos dados. Sim, mas esse aprendizado não tem as mesmas características daquele que frequentemente ocorre com as pessoas, que interpretam os exemplos recebidos, podendo construir, com base neles, inferências e tratamentos instaurados pelo raciocínio. Um indicativo disso é que, em seguida, submetemos o mesmo problema, com outra construção, repetindo a proposta do “problema da idade do ascensorista” (ou “problema do elevador”), contido em Silva (2008). Apesar da “experiência” recente, e das evidentes semelhanças, o programa não aplicou

a teoria de referência, mesmo mencionada contextualmente e que está relacionada ao contrato didático.

Figura 7 – Reposta do ChatGPT-4o ao “problema da idade do ascensorista”

Preciso da resposta para o seguinte problema: "o elevador de um edifício de 10 andares parte do térreo com 4 pessoas: 2 mulheres, 1 homem e 1 criança. Para no 4º andar e aí sai 1 mulher e entram 3 homens. No 7º, saem 2 pessoas. Sabendo-se que houve apenas mais uma parada no 9º onde não desceu nenhuma criança e que o elevador chegou ao 10º andar com 11 pessoas, pergunta-se qual é a idade do ascensorista". Se possível, mencione alguma teoria para justificar sua resposta.

A resposta para esse problema pode ser encontrada com base na interpretação da situação e no raciocínio lógico. Vamos analisar passo a passo as informações fornecidas.

1. Início (Térreo):
 - O elevador parte com 4 pessoas: 2 mulheres, 1 homem e 1 criança.
2. No 4º andar:
 - Sai 1 mulher e entram 3 homens.
 - Depois dessa parada, o elevador tem: 1 mulher, 1 homem, 1 criança e 3 homens, ou seja, 6 pessoas no total.
3. No 7º andar:
 - Saem 2 pessoas.
 - Vamos assumir que essas 2 pessoas são adultos (não crianças). Agora, o elevador tem 4 pessoas: 1 mulher, 1 homem, 1 criança e 1 homem (um dos novos passageiros).
4. No 9º andar:
 - Não desce nenhuma criança, o que significa que a criança ainda está no elevador.
 - O elevador ainda tem 4 pessoas, mas podemos inferir que nada de novo aconteceu além dessa informação.
5. Chegada no 10º andar:
 - O elevador chega com 11 pessoas.
 - Agora, podemos concluir que no total o número de pessoas no elevador aumentou para 11. Isso sugere que o número de passageiros aumentou à medida que as paradas ocorreram.

O Enigma:

O elemento chave do enigma é o fato de que o número de pessoas no elevador aumenta de forma significativa. A questão pede para determinar a idade do ascensorista, o que implica que ele é alguém que não foi contado diretamente entre os passageiros. Se considerarmos que o ascensorista é um "homem" (pois ele foi um dos "homens" que entrou no elevador), a solução seria essa: o ascensorista tem, então, a idade de um "homem adulto" que entrou no elevador.

Teoria para justificar a resposta: O problema é um quebra-cabeça lógico que envolve números e a análise de dados simples, com uma pitada de interpretação. A inclusão de termos como "não desceu nenhuma criança" e o aumento de passageiros no elevador são pistas de que o raciocínio se baseia em uma manipulação de números e identificação das pessoas. A solução final, se baseada nas pistas, leva à conclusão de que o ascensorista é uma pessoa adulta, que entrou junto com outros homens, não sendo uma criança.

Com base nesse raciocínio lógico, a idade do ascensorista seria a de um homem adulto, sendo uma suposição razoável de acordo com o contexto.

□ ▲ ▾ ⟲ ⟳

A resposta, contida na figura 7, baseia-se em uma série de reflexões, típicas da resolução de problemas lógicos, que o programa chama de “quebra-cabeças”, relacionando a resolução proposta à análise de dados e à interpretação, envolvendo, inclusive, como “pistas”, as pessoas

que desceram e o “fato”, não autorizado por qualquer descrição fornecida, que o ascensorista seria homem. A resposta, agora, não tem o menor sentido, como, aliás, de maneira proposital, também não tem sentido o problema.

Podemos aventar que, nesse caso do ascensorista, faltou um melhor contexto para a resposta. Pensando nisso, voltamos a questionar o programa, complementando o *prompt*: “*suponha que o problema da idade do ascensorista tenha sido proposto em uma aula de matemática ou em um contexto de pesquisa em educação matemática. Pode me dizer o que basearia, teoricamente, essa proposição?*”

Figura 8 – “Justificativa” teórica do ChatGPT-4o ao “problema da idade do ascensorista”

A proposição do problema da idade do ascensorista em um contexto de educação matemática serviria para exercitar raciocínio lógico, interpretação de texto, modelagem de situações reais e a resolução de problemas, aspectos fundamentais no desenvolvimento da competência matemática dos alunos. Ele poderia ser usado como uma forma de aplicar e reforçar conceitos matemáticos e lógicos de maneira prática e envolvente.



Fonte: elaborado pelo autor (com uso do ChatGPT-4o) e com base em SILVA (2008, p. 57)

A resposta fornecida, expressa na figura 8, apenas corrobora nossas conjecturas: não há que se justificar por elementos teóricos o problema em si *como se ele tivesse sentido e não fosse absurdo*. Assim, permanecemos entre a imprecisão e o erro, ainda que em um conjunto de casos bem específico.

Não estamos afirmando aqui que os GPTs aprenderiam imediatamente e conservariam este aprendizado para instâncias futuras: sabemos que o treinamento se dá em larga escala e é feito pela empresa responsável (no caso do ChatGPT, a OpenAI). Objetivamente, isso significa que o programa não utiliza feedback imediato para alterar ou 'melhorar' a aptidão durante a conversa. Embora o modelo se adapte ao estilo de comunicação e às necessidades do usuário, isso não implica que seu 'conhecimento' ou 'habilidades' sejam modificados de maneira permanente: as melhorias acontecem de forma geral e são baseadas em ajustes em larga escala. Não há correções instantâneas baseadas em cada interação específica, ainda que possa haver adaptações em um contexto de conversa para tornar as respostas mais adequadas à situação em andamento. Se houver um feedback durante a conversa, o programa pode usá-lo para propor respostas mais eficazes no âmbito de determinada interação; porém, esse feedback não é preservado para interações futuras, exceto em casos específicos — como quando se utiliza um

histórico local configurado pelo usuário ou se autoriza o sistema a usar a memória das conversas anteriores⁴⁸.

Outra experiência em nosso contexto de ensino nos permitiu colher mais dados para essa argumentação. Em cursos superiores de tecnologia e de Ciência da Computação, atuamos com algumas frentes que envolvem o uso de matemática em disciplinas específicas, como Segurança da Informação, Estrutura de Dados, Sistemas Operacionais, Inteligência Artificial, entre outras. Especificamente, uma atividade realizada pelos alunos em grupos consistia em empregar um algoritmo de encriptação para ocultar uma mensagem, que deveria ser decifrada pelos demais. Dentre as possibilidades consideradas, no campo da criptografia simétrica, escolhemos a *cifra de Hill*, justamente pela possibilidade de trabalhar com conceitos ligados às operações com matrizes e equações lineares.

De acordo com Stallings (2015), o algoritmo proposto por Lester Hill em 1929 emprega m letras sucessivas do que chamamos “texto claro” (a mensagem original), substituindo-as pela mesma quantidade de letras de texto cifrado: “a substituição é determinada por m equações lineares, em que cada caractere recebe um valor numérico ($a = 0, b = 1, \dots, z = 25$)” (STALLINGS, 2015, p. 32). Trata-se de um procedimento criptográfico utilizado atualmente apenas fins didáticos. Por exemplo, com $m = 3$, podemos descrever o sistema como pode ser visto na figura 9:

Figura 9 – Equações lineares (algoritmo de Hill)

$$\begin{aligned}c_1 &= (k_{11}p_1 + k_{21}p_2 + k_{31}p_3) \text{ mod } 26 \\c_2 &= (k_{12}p_1 + k_{22}p_2 + k_{32}p_3) \text{ mod } 26 \\c_3 &= (k_{13}p_1 + k_{23}p_2 + k_{33}p_3) \text{ mod } 26\end{aligned}$$

Isso pode ser expresso em termos de vetores de linhas e matrizes:⁶

$$(c_1 \ c_2 \ c_3) = (p_1 \ p_2 \ p_3) \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{pmatrix} \text{ mod } 26$$

ou

$$\mathbf{C} = \mathbf{PK} \text{ mod } 26$$

Fonte: Stallings (2015, p. 32)

A atividade proposta consistia em utilizar o algoritmo relativo à cifra de Hill para criptografar e descriptografar uma mensagem, descrevendo o processo e as estruturas matemáticas utilizadas para a solução. A resolução poderia ser apresentada a partir do uso de

⁴⁸ A proposta do ChatGPT para essa funcionalidade por ser conferida em: <https://help.openai.com/en/articles/10303002-how-does-memory-use-past-conversations>

linguagens de programação ou de outros recursos, como fórmulas em planilhas eletrônicas. As soluções foram apresentadas pelos grupos de alunos e discutidas coletivamente. Ao final, apresentamos o exemplo dado por Stallings (2015), resolvido de forma detalhada, comentando sobre o uso de matrizes e determinantes, além de aritmética modular. A matriz K , indicada abaixo, foi utilizada na encriptação, enquanto a matriz K^{-1} , na descriptografia.

$$(1) K = \begin{pmatrix} 17 & 17 & 5 \\ 21 & 18 & 21 \\ 2 & 2 & 19 \end{pmatrix} K^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 15 \\ 15 & 17 & 6 \\ 24 & 0 & 17 \end{pmatrix}$$

As letras da mensagem são transformadas em códigos numéricos correspondentes à posição delas no alfabeto – por exemplo, A recebe o código 0, B tem o código 1, e assim por diante, até $Z = 25$. Assim, com a mensagem *paymoremoney* (STALLINGS, 2018, p. 32), as 3 primeiras letras *PAY* seriam criptografadas como *RRL*:

$$(2) (15\ 0\ 24)K = (303\ 303\ 531) \text{ mod } 26 = (17\ 17\ 11) = \text{RRL}$$

Na institucionalização, procuramos abordar um processo iterativo de produção da matriz inversa, que incluía as seguintes etapas:

- a) Obter o determinante da matriz K ;
- b) Calcular o determinante módulo 26 (26 = número de letras do alfabeto);
- c) Encontrar o inverso do determinante módulo 26:

$$(3) \det(K) \times \det^{-1}(K) \equiv 1 \text{ mod } 26$$

- d) Calcular a matriz dos cofatores;
- e) Calcular a matriz adjunta $\text{Adj}(K)$, transposta da matriz dos cofatores;
- f) Multiplicar a matriz adjunta pelo inverso do determinante mod 26: a matriz inversa K^{-1} é obtida multiplicando a matriz adjunta pelo inverso do determinante módulo 26.

$$(4) K^{-1} \equiv \det^{-1}(K) \times \text{Adj}(K) \text{ mod } 26$$

Após as discussões sobre dúvidas e casos específicos, apresentamos os cálculos feitos usando o Microsoft Excel, conforme pode ser visto na figura 10. A planilha é completamente automatizada, de modo que, se a matriz chave for alterada no processo de encriptação, a cifra pode ser diferente.

Figura 10 – Processo de encriptação e decifração com cálculos da cifra de Hill

Fonte: elaborado pelo autor (com uso do Microsoft Excel)

Após apresentação dos resultados, um grupo de alunos alegou que eles estariam errados, mesmo após verificar que os vários testes mostrados eram compatíveis com as explicações e o conhecimento matemático mencionado. Quando questionados, os estudantes indicaram que o resultado apresentado para a matriz inversa pelo programa GPT era outro. Mesmo mencionando que era possível que a entrega do programa estivesse equivocada, precisamos analisar a resposta para sustentar o argumento. Para isso, submetemos o mesmo exemplo à aplicação e solicitamos os cálculos, inclusive da matriz de cofatores. A resposta devolvida está na figura 11.

Figura 11 – Matriz de cofatores relativa à atividade da cifra de Hill, calculada pelo ChatGPT

Passo 5: Formar a matriz dos cofatores

A matriz dos cofatores C é formada pelos cofatores que calculamos:

$$C = \begin{pmatrix} 300 & -357 & 6 \\ -313 & 313 & 0 \\ 252 & -252 & -51 \end{pmatrix}$$

Agora, esses valores são usados para calcular a matriz adjunta, e posteriormente a inversa. Se precisar, posso detalhar os próximos passos também!



Fonte: elaborado pelo autor (com uso de programa GPT)

Comparando com nossos cálculos, verificamos que o coeficiente C_{31} estava calculado incorretamente. Recuperando os cálculos no processo, verificamos que eles foram feitos da seguinte forma:

Figura 12 – Cálculo incorreto feito pelo programa GPT

Cofator C_{31} :

- Submatriz resultante de excluir a terceira linha e primeira coluna:

$$\begin{pmatrix} 17 & 5 \\ 21 & 21 \end{pmatrix}$$

- Determinante:

$$17 \times 21 - 5 \times 21 = 357 - 105 = 252$$

- Cofator C_{31} :

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times 252 = 252$$

Fonte: elaborado pelo autor (com uso de programa GPT)

O erro é bastante fácil de ser determinado e pode ser visto na figura 12: a posição C_{31} da matriz de cofatores é igual a 267. O determinante exclui a terceira linha e a primeira coluna no cálculo, como pode ser visto na matriz K da figura 10, o que daria $(17 \times 21) - (5 \times 18) = 267$. Apontamos o erro para o programa e solicitamos que refizesse os cálculos. Nas respostas seguintes, que podem ser vistas nas figuras 13 e 14, o programa altera, por conta própria, o nome da matriz K para matriz A , sem outras consequências, ou seja, ainda se trata da matriz chave original.

Figura 13 – Tentativa de recalcular a matriz de cofatores feita pelo programa GPT

Mostre como calcula a matriz adjunta, mas corrija C₃₁ na matriz de cofatores, uma vez que você calculou errado. A posição C₃₁ é 267.

Obrigado por apontar o erro. Vamos corrigir o cálculo do cofator C₃₁ e, em seguida, calcular a matriz adjunta corretamente.

Correção do cofator C₃₁

Cofator C₃₁:

Para calcular C₃₁, removemos a terceira linha e a primeira coluna da matriz A:

$$\begin{pmatrix} 17 & 5 \\ 21 & 21 \end{pmatrix}$$

- Determinante:

$$17 \times 21 - 5 \times 21 = 357 - 105 = 252$$

Multiplicado pelo fator de sinal $(-1)^{3+1}$, o cofator C₃₁ é:

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times 252 = 252$$

Assim, o valor correto para C₃₁ é 252, não 267.

Agora que temos isso corrigido, a matriz dos cofatores é:

$$C = \begin{pmatrix} 300 & -357 & 6 \\ -313 & 313 & 0 \\ 252 & -252 & -51 \end{pmatrix}$$

Fonte: elaborado pelo autor (com uso de programa GPT)

Como indicado na figura 13, o cálculo permanece com o erro apontado anteriormente, no mesmo cofator. Foi apenas quando mencionamos como o cálculo deveria ser feito que o programa pode entregar um resultado correto (figura 14), o que impressionou bastante os estudantes que acompanharam o processo. O erro identificado pode ser relacionado ao cenário em que a questão foi sugerida, um tanto mais complexo do que poderia advir de um questionamento mais simples. Neste sentido, Schorcht, Buchholtz e Baumanns (2024) conduziram um cuidadoso estudo sobre a relação entre a qualidade dos *prompts* e o desempenho de três diferentes versões do ChatGPT em tarefas que envolviam resolução de problemas matemáticos. Para esses pesquisadores:

[...] os LLMs podem ter mais dificuldades em gerar soluções abrangentes para problemas que exigem mais do que cálculos simples, particularmente aqueles que exigem raciocínio algébrico mais complexo. Esse desafio também é aparente na correção dos resultados, onde o desempenho das versões do GPT declinou significativamente quando a tarefa de resolução de problemas se estendeu além dos cálculos algébricos básicos (SCHORCHT, BUCHHOLTZ, BAUMMANS, 2024, p. 10).

Figura 14 – Recálculo correto da matriz de cofatores feito pelo programa GPT

Para calcular o cofator C_{31} , removemos a terceira linha e a primeira coluna da matriz A . A submatriz resultante é:

$$\begin{pmatrix} 17 & 17 \\ 18 & 21 \end{pmatrix}$$

O determinante dessa submatriz é:

$$(17 \times 21) - (17 \times 18) = 357 - 90 = 267$$

Multiplicado pelo fator de sinal $(-1)^{3+1}$, o cofator C_{31} é:

$$C_{31} = (-1)^{3+1} \times 267 = 267$$

Agora, com o cálculo correto de C_{31} , a matriz dos cofatores é:

$$C = \begin{pmatrix} 300 & -357 & 6 \\ -313 & 313 & 0 \\ 267 & -252 & -51 \end{pmatrix}$$

Fonte: elaborado pelo autor (com uso de programa GPT)

A conferência desse resultado considerou o uso de tecnologias “mais tradicionais” (“menos inteligentes”, talvez?), como planilhas eletrônicas, mas empregadas a partir do conhecimento matemático necessário à resolução do problema, bem como do processo relativo à proposta didática em curso na atividade. Não havíamos indicado o uso do programas GPT como recurso para os grupos, mas também não apontamos qualquer restrição ao dizer que tecnologias poderiam ser usadas, o que sugere que o planejamento didático precisa considerar essa possibilidade, em cada caso específico – permitir ou restringir é claramente uma questão contextual e uma escolha, com consequências. Entretanto, nos casos em que o uso do recurso GPT é considerado, achamos importante, face às experiências descritas, levar em consideração alguns fatores:

- Modular a estratégia didática para evitar que a resolução seja mera cópia de resposta pronta: o processo de aprendizagem visa à construção do conhecimento, não apenas o fornecimento de respostas. Ainda que programas GPT possam ser úteis para consulta de noções envolvidas na resolução de problemas ou conferência de resultados, entregar a tarefa para o sistema simplesmente “resolver” e entregar, sem espaço para reflexões e crítica, não parece colaborar para a compreensão de temas e conceitos envolvidos;
- Considerar a relevância do uso do conhecimento, conectado ao saber de referência sobre o tema em estudo, como critério de mediação principal e de validação das respostas: para além da estratégia didática, resta a questão do conhecimento, considerando que as respostas podem apresentar falhas de diversas naturezas, como as que discutimos neste

texto. O conhecimento permite avaliar a qualidade das entregas realizadas pelos programas, bem como a pertinência do conteúdo entregue pelos sistemas;

- Estabelecer (ou sugerir) teorias de referência para os casos em que a construção do conhecimento necessite de articulações específicas: no caso de a estratégia didática prever o uso de referências específicas, pode ser importante elaborar *prompts* que descrevam essa necessidade, de modo a evitar respostas superficiais e/ou desconectadas do tema em estudo;
- Desfazer o “mito do oráculo”: a inteligência artificial generativa e os programas do tipo GPT, em particular, não são “especialistas de tudo” – como mencionamos no texto, os treinamentos realizados em larga escala com técnicas de *deep learning* podem alcançar resultados significativos, mas não conferem infalibilidade aos sistemas. A confiança acrítica nas respostas aproxima os usuários aos consultentes de um oráculo, cujas respostas estariam acima das contestações. Ainda aqui, observamos a relevância do conhecimento e de sua apropriação pelas pessoas para que seja possível prosseguir, em processos de aprendizagem, com os critérios imprescindíveis de validação.

A inteligência artificial generativa abre diversas perspectivas e tem, sem dúvidas, muitos aspectos positivos, que convivem com diversas características preocupantes. São desafios, que precisam ser enfrentados: “os benefícios da IA são extraordinários, assim como seus potenciais danos. A sociedade parece não ter alternativa senão enfrentar os desafios de, pelo menos, mitigar os danos já identificados e tentar prever danos futuros com antecedência” (KAUFMAN, 2024, p. 13, tradução nossa). Assim, a contrapartida ao possível aumento de produtividade é o esforço de planejamento didático e de confronto das entregas com o saber de referência. A questão não é apenas monitorar possíveis erros, mas desenvolver estratégias de aprendizado e construção de conhecimentos que aumentem e refinem efetivamente o repertório das pessoas.

5. Palavras finais

As características evidenciadas pelas experiências descritas neste texto dão força aos argumentos de Santaella (2023) e de Rodrigues e Rodrigues (2023) em torno das diferenças entre a *inteligência humana* (e seus modelos de aprendizado) e as *inteligências artificiais* referidas nesse texto. Enquanto pessoas usam experiências, vivências, impressões e se adaptam enquanto constroem conhecimento, as inteligências artificiais generativas, e os modelos GPT, em particular, dependem de treinamentos centralizados e em escala significativa, de modo a construir padrões. Mesmo depois disso, a possibilidade de esses modelos gerarem respostas

ambíguas, inconsistentes, superficiais ou mesmo equivocadas é concreta. Essa constatação apenas reforça a necessidade que o conhecimento sirva como balizador da qualidade das interações e como critério avaliativo que permita investigar respostas, compará-las e perceber o grau de validade com que se apresentam. Aliás, isso não é novidade alguma: qualquer estratégia de ensino que não preveja o conhecimento, em seu estatuto formal e válido, como balizador epistemológico é, no mínimo, temerária – venham os dados de pessoas ou de máquinas.

Disso tudo, pensamos ser possível, em ambientes de ensino e de aprendizagem, processos desenhados a partir de *seres-humanos-com-IAG*⁴⁹. Mais do que isso, entendemos que a IAG na escola (e, provavelmente, em qualquer outro lugar) só faz sentido com a participação intensiva das pessoas, às quais cabe estabelecer os critérios de controle e validação.

É precisamente nesse ponto que o conhecimento humano assume papel insubstituível: ele constitui o critério epistemológico de verificação das respostas e inferências produzidas pelas inteligências artificiais generativas. O que legitima uma resposta não é o fato de ter sido gerada por um modelo avançado, mas sua conformidade com o saber de referência, com o discernimento crítico das pessoas que a interpretam, e, se for o caso, com os métodos científicos. Curiosamente, passamos anos falando sobre as tecnologias como mediadoras até vermos o surgimento de tecnologias cujo uso impõe que nós, seres humanos, sejamos mediadores também, agora dos conteúdos que podem ser disponibilizados pela IAG. Também devemos considerar que a proposta de seres-humanos-com-IAG é uma alternativa crítica ao uso de IAG sem mediações e que esse papel pertence, nos processos de construção de conhecimento promovidos pela escola, a professores e alunos. Não é apenas uma adaptação didática, mas uma posição epistemológica e ética, que reafirma o papel do professor e do estudante como avaliadores e produtores de sentido, e não meros consumidores de respostas. Essa construção reconfigura, em bases mais críticas, a própria noção de fluência tecnológica da qual falávamos longinquoamente.

Como dissemos antes, as tecnologias vão ocupando lugares em contextos nos quais não existiam e não esperam as regulações ou os processos reflexivos. Nesse sentido, a IAG nos desafia. Cabe a nós compreendermos de que forma a transformamos em nossa aliada.

⁴⁹ O termo *seres-humanos-com-IAG* tem base e inspiração na proposta largamente consolidada a partir de Borba e Villarreal (2005), conhecida como *seres-humanos-com-mídias*.

Referências

- BERKELEY. School of information. **What is machine learning (ML)?** 2018. Disponível em: <https://ischoolonline.berkeley.edu/blog/what-is-machine-learning/>. Acesso em: 25 mar. 2024.
- BORBA, M.C.; BALBINO JUNIOR, V. R. O ChatGPT e Educação Matemática. **Educação Matemática Pesquisa**, v. 25, n. 3, 2023. p. 142 – 156.
- BORBA, M. C; VILLARREAL, M. **Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking:** information and communication technologies, modelling, visualization and experimentation. 1. ed. New York: Springer, 2005.
- CASTELLS, M. **A sociedade em rede** – a era da informação: economia, sociedade e cultura. v.1. 6. ed. rev. amp. São Paulo: Paz e Terra, 2002.
- CHARTIER, R. **A ordem dos livros:** leitores, autores e bibliotecas na Europa entre os séculos XIV e XVIII. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 1999.
- COZMAN, F. G. No canal da inteligência Artificial – nova temporada de desgrenhados e empertigados. **Estudos Avançados**, 35 (101), janeiro/abril, 2021. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/s0103-4014.2021.35101.002>. Acesso em: 20 abr. 2025.
- COZMAN, F. G. O futuro da (pesquisa em) inteligência artificial: algumas direções. **Revista USP**, n. 124, janeiro/março, 2020. p. 11 – 20.
- DELORS, J. et al. Educação, um tesouro a descobrir. In: **Relatório para a Unesco da Comissão Internacional sobre Educação para o Século XXI**. Brasília: MEC/UNESCO, 1998.
- IBM. **O que é IA forte?** 2025a. Disponível em: <https://www.ibm.com/br-pt/think/topics/strong-ai>. Acesso em: 20 abr. 2025.
- IBM. **O que é engenharia de prompts?** 2025b. Disponível em: <https://www.ibm.com/br-pt/think/topics/prompt-engineering>. Acesso em: 20 abr. 2025.
- IBM. **O que é IA generativa?** 2024. Disponível em: <https://www.ibm.com/br-pt/think/topics/generative-ai>. Acesso em: 18 mar. 2025.
- IBM. **O que é machine learning?** 2020. Disponível em: <https://www.ibm.com/br-pt/topics/machine-learning>. Acesso em: 25 mar. 2025.
- KAUFMAN, D. Lógica e fundamentos da inteligência artificial e reações da sociedade para maximizar benefícios e mitigar danos. **Filosofia Unisinos**, São Leopoldo, v. 25, n. 1, p. 1–13, 2024. DOI: 10.4013/fsu.2024.251.10. Disponível em: <https://revistas.unisinos.br/index.php/filosofia/article/view/27011>. Acesso em: 2 maio 2025.
- LÉVY, P. **As tecnologias da inteligência:** o futuro do pensamento na era da informática. 2. ed. Rio de Janeiro: Editora 34, 1993.
- MCCARTHY, J.; MINSKY, M. L.; ROCHESTER, N.; SHANNON, C. E. A Proposal for the Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence, August 31, 1955. **AI Magazine, [S. l.]**, v. 27, n. 4, p. 12, 2006. DOI: 10.1609/aimag.v27i4.1904. Disponível em: <https://ojs.aaai.org/aimagazine/index.php/aimagazine/article/view/1904>. Acesso em: 25 mar. 2024.
- MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: a new framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, 108 (6), 1017-1054. 2006.
- OLIVEIRA, G. P. ; ALMEIDA, D. F.; ROSA, V. S. **Um estudo sobre técnicas, algoritmos e modelos de machine learning:** o desenvolvimento de protótipos baseados em regressão linear para estudo e teste de conceitos. Jundiaí: UNIP, 2024.
- OLIVEIRA, G.P. Sobre tecnologias e educação matemática – fluência, convergência e o que isto tem a ver com aquilo. In: OLIVEIRA, G. P. (org.). **Educação Matemática:** epistemologia, didática e tecnologia. São Paulo, Editora Livraria da Física, 2018.
- GALLENT-TORRES, C.; ZAPATA-GONZÁLEZ, A.; ORTEGO-HERNANDO, J.L. El impacto de la inteligencia artificial generativa en educación superior: una mirada desde la ética y la integridad académica. **RELIEVE**, v.29, n. 2, art. M5. <http://doi.org/10.30827/relieve.v29i2.29134>. p. 1 – 20.
- PAPERT, S.; RESNICK, M. **Technological Fluency and the Representation of Knowledge:** proposal to the National Science Foundation. Cambridge: MIT MediaLab, 1995.

- RICH, E.; KNIGHT, K. **Inteligência Artificial**. 2.ed. São Paulo: Makron Books, 1994.
- RODRIGUES, O. S.; RODRIGUES, K. S. A inteligência artificial na educação: os desafios do ChatGPT. **Texto livre**, v. 16, e45997, 2023. p. 1 – 12. doi: 10.1590/1983-3652.2023.45997.
- RUSSELL, S.; NORVIG, P. **Inteligência Artificial**: uma abordagem moderna. 4.ed. Rio de Janeiro: Campus, 2022.
- SANTAELLA, L. **A inteligência artificial é inteligente?** São Paulo: Almedina Brasil, 2023.
- SCHORCHT, S.; BUCHHOLTZ, N.; BAUMANN, L. Prompt the problem – investigating the mathematics educational quality of AI-supported problem solving by comparing prompt techniques. **Frontiers in Education**, v.9 (1386075). doi: 10.3389/feduc.2024.1386075. p. 1 – 15.
- SHANNON, C. E. A Mathematical Theory of Communication. **The Bell System Technical Journal**, v. 27, pp. 379–423, 623–656, July, October, 1948.
- SHULMAN, L. S. Those who understand: knowledge growth in teaching. **Educational Researcher**, v. 15, n. 2, 1986. p. 4-14.
- SILVA, B. A. Contrato didático. In: MACHADO, S. D. A. M. (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. São Paulo: Educ, 2008.
- STALLINGS, W. **Criptografia e segurança de redes**: princípios e práticas. 6. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2015.
- TIKHOMIROV, O. K. The psychological consequences of computerization. In: WERTSCH, J. V. (Org.). **The concept of activity in soviet psychology**. New York: M. E. Sharpe. Inc, 1981. p. 256-278.
- TURING, A. M. Computing Machinery and Intelligence. **Mind**, New Series, Vol. 59, No. 236 (Oct., 1950), pp. 433-460.
- ULTRALYTICS. **IA forte**. 2025. Disponível em: <https://www.ultralytics.com/pt/glossary/strong-ai>. Acesso em: 10 abr. 2025.
- VASWANI, A.; SHAZEER, N.; PARMAR, N. et al. Attention is all you need. 31st Conference on Neural Information Processing Systems (NIPS 2017), 2017, Long Beach. **Proceedings** [...]. New York: Curran Associates Inc., 2017. p. 1 – 11.

**PARTE II: TECENDO REFLEXÕES
SOBRE USO DE TECNOLOGIAS
DIGITAIS E DIDÁTICAS**

Capítulo 6

As tecnologias relacionadas à Álgebra e à Geometria no ensino médio: atividades com o Geogebra

Maria José Ferreira da Silva⁵⁰

Saddo Ag Almouloud⁵¹

1. Introdução

O ensino de Geometria e de Álgebra e sua importância vem sendo discutido há décadas por pesquisadores de todo o país. A importância desses ensinos, com foco no ensino e na aprendizagem, é tratada em diferentes referenciais, nacionais e internacionais, algumas pesquisas ainda apontam dificuldades dos alunos em lidar com esses conteúdos, enquanto outras focam então na prática do professor e suas possíveis mudanças. Para Munzón, Bosch e Gascón (2015, p. 107) “a maioria das investigações didáticas a respeito de álgebra elementar centram-se em estudar as principais dificuldades dos alunos no início da aprendizagem e as possíveis atuações do professor (ou do ensino) para minimizá-las.”

Os estudos de Chevallard, da década de 80 do século passado, a respeito do ensino de Álgebra, mostram que seu ensino se apoia no contexto numérico como aritmética generalizada, com expressões algébricas que representam e manipulam números desconhecidos identificados como incógnitas, que requerem apenas a aprendizagem de cálculo algébrico. A manipulação de expressões algébricas no ensino não tem qualquer objetivo externo ao cálculo algébrico, segundo Chevallard (1989, p. 47) e, por isso, “deve encontrar em si mesmo a fonte de suas próprias exigências.” Acrescenta que “a funcionalidade do cálculo algébrico, em uma perspectiva de renovação curricular, deve visar, desde cedo, a utilização de parâmetros, para conduzir à noção de fórmula (produção e implementação) e a noção de função.” (p. 65). Para o autor, as fórmulas são modelos funcionais construídos para estudar os objetos modelizados com base em relações funcionais entre variáveis. Gascón (1994), ao concordar com Chevallard (1989), afirma que a álgebra não deve focar apenas em problemas aritméticos, mas, o estudo de campos de problemas que envolvam outras áreas da matemática, como é o caso da geometria e

⁵⁰ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, <https://orcid.org/0000-0002-1249-8091>, maze.fsilva@gmail.com

⁵¹ Universidade Federal do Pará, <https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>, saddoag@gmail.com

do desenho geométrico. Silva, Gaita e Almouloud (2018) complementam que esses temas e a generalização de problemas devem ser objetivos do ensino, para que a álgebra deixe de ser tratada como produtora de ferramentas, mas sim como possuidora de diversos objetos de estudo.

Assim, ao falar do ensino de Geometria, não podemos esquecer da importância do Desenho Geométrico, pois é ele que baseia as construções geométricas necessárias em muitos problemas de Geometria, no entanto, essa disciplina não consta do currículo do ensino básico. Esse ensino, para Zuin (2001, p. 16), propicia compreensão e embasamento teórico para a geometria, tanto para professores, quanto para alunos e afirma que “a compreensão de muitos conceitos geométricos se materializa por meio de construções geométricas.” (p. 16). Contudo, quando tratamos de Geometria Espacial, as construções com instrumentos de desenho podem ser difíceis e cansativas, dificuldades que podem ser contornadas com o uso de algum software de representação dinâmica, como é o caso do GeoGebra. Esse recurso tecnológico, segundo Gravina e Contiero (2011), pode desencadear mudanças nas práticas dos professores e para os alunos ajuda a desenvolverem as habilidades de: “observar, conjecturar, relacionar, refinar suposições, dividir um problema em pequenos problemas” (p. 9). Nesse sentido, Mishra e Koehler (2006) apontam para a necessidade de os professores possuírem conhecimentos integrados de pedagogia, de conteúdo e de tecnologia, para proporcionar um bom ensino.

Além disso, o presente trabalho foi motivado pela constatação de que os sólidos geométricos, mais comuns e conhecidos, são apresentados por modelos físicos que são dados aos alunos (às vezes com a representação de sua superfície planificada), com o objetivo de que verifiquem apenas suas características e o cálculo da medida de seus volumes por aplicação de fórmulas, como foi verificado por Freitas e Bittar (2016). Assim, nós apoiamos em alguns trabalhos que tratam a Geometria Espacial e volumes de sólidos geométricos, com foco na participação efetiva dos alunos em seu aprendizado, entre eles as pesquisas de Silva e Almouloud (2013, 2018, 2020), Almeida e Silva (2012, 2016), Possani (2012), Palles (2013), Silva (2021, 2012), Santos (2016), Silva, Gaita e Salazar (2017), dos quais adaptamos algumas atividades para este capítulo, sob outro ponto de vista para observar as relações entre Álgebra, Geometria Sintética e Tecnologia, com o software GeoGebra. Cabe elucidar que a álgebra pode se relacionar com a geometria, no ensino básico, por geometria sintética ou por geometria analítica que impõe a utilização de um referencial.

Dessa forma, neste capítulo, faremos uma breve relação entre a modelização algébrica e a teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2012a), observaremos o que sugere

a BNCC para o ensino de geometria no Ensino Médio, seguido de seis atividades inspiradas e analisadas sob o olhar dessas teorias, para então apresentar nossas considerações finais.

2. Referencial teórico

Como tratamos de atividades que relacionam álgebra, geometria espacial e tecnologia focamos na modelização algébrica, na teoria dos Registros de Representação Semiótica e no uso de alguma tecnologia, escolhemos um software de representação dinâmica, o GeoGebra.

O pano de fundo dessas atividades é proporcionar ao aluno a construção de seus conhecimentos, em um processo em que possa agir, refletir, perceber, construir relações, falar, ouvir, ... Nesse sentido, para Vergnaud (1998, p. 1), o progresso da inteligência é medido pela aprendizagem de conhecimento preciso e, por isso o professor deve ter paciência para estudar “o progresso e as condições de conceitualização dos alunos, nas diferentes disciplinas ensinadas na escola” (p. 2), portanto, é necessário buscar diversas classes de problemas e as conceitualizações imprescindíveis para resolvê-los.

Para além de Vergnaud (1998), as atividades aqui apresentadas e suas análises se apoiam na modelização algébrica e na teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 2012a, das quais faremos uma breve exposição.

A “álgebra elementar”, para Gascón (1994, p. 57), deve estudar um campo de problemas, “não apenas problemas “aritméticos”, mas também de construção geométrica” entre outros. Para o autor, o método algébrico deve fornecer uma “simbolização global da relação entre os dados e as incógnitas do problema” cujo objetivo principal é “a explicação da estrutura (formal) desta relação”, além da solução procurada “(seja uma figura geométrica, um número ou qualquer outro objeto)”. Acrescenta que a modelização algébrica “permite descobrir as condições de existência do objeto desconhecido [...] , bem como a forma de dependência de cada variável em relação às demais variáveis”, em particular, estudar como variáveis “conhecidas” dependem de variáveis “desconhecidas”, além da possibilidade de “produzir novos problemas a respeito do sistema modelado para produzir novos conhecimentos para ele. (p.58).

Essa modelização algébrica foi definida por Bolea (2002), como um processo que é desenvolvido em quatro etapas. Na **primeira**, o sistema a ser modelizado, ou seja, a situação problemática extra ou intramatemática que será estudada, provoca questões gerais que surgem porque não possui respostas imediatas. Nessa etapa escolhemos o tipo de modelo que será construído ao definir, por exemplo, a escolha por diferentes variáveis ou apenas uma no sistema.

A **segunda** consiste na construção de um modelo inicial com a definição do sistema por sua identificação e designação das variáveis pertinentes, além das relações entre elas. Nas atividades dessa etapa ocorre a construção de modelos algébricos, baseados em um sistema de variáveis/parâmetros ou dados/incógnitas, nos quais surgem expressões algébricas.

Na **terceira** etapa ocorre o trabalho manipulativo com o modelo matemático construído, com o objetivo de obter um modelo final, que mostre as propriedades do sistema modelizado, sua interpretação e seus resultados. Nessa etapa, o trabalho com o modelo conduz à manipulação e transformação de expressões algébricas, além de sua interpretação, pois elas podem ser de dois tipos de variáveis/parâmetros ou dados/incógnitas.

Esta é uma etapa matemática, enquanto as anteriores estão no domínio da realidade a que pertence o sistema, por isso o trabalho com o modelo inclui tanto a manipulação, quanto a transformação de expressões, com sua interpretação, que dependem da estrutura da expressão. Na **quarta etapa** o conhecimento do sistema é ampliado com a proposta de novos problemas e a organização dos resultados já obtidos.

Bolea, Bosch e Gascon (1998, p. 139), especificamente, afirmam “que um trabalho matemático é algebrizado se puder ser considerado um modelo algébrico de outro trabalho matemático, o sistema a ser modelado” e para Chevallard (1989), a geometria é um excelente ponto de partida para conduzir o aluno ao papel modelizador da álgebra.

Nesse sentido, para Duval (2003, p. 11), o objetivo do ensino de Matemática é “contribuir para o desenvolvimento geral de suas capacidades de raciocínio, e análise e de visualização” que são obtidas ao analisar a atividade cognitiva que a área requer, ou seja, a importância das representações semióticas e a variedade de representações semióticas utilizadas. Mas, nem todos sistemas são adequados para Duval (2012a), de acordo com Almouloud e Moretti (2021, p. 562), apenas os que se caracterizam como um registro, por permitir “três atividades de representação: inicialmente, constituir um traço ou um apanhado de traços que seja identificado como uma representação de qualquer coisa”, “transformar as representações pelas regras próprias do sistema” e converter as representações produzidas em um sistema, em representações de um outro sistema” para explicitar outros significados para o que foi representado inicialmente.

Quanto aos problemas em geometria, para Duval (2012b, p. 119-120), sua resolução depende de um raciocínio que se refere a uma axiomática local, que se desenvolve no registro da língua natural e “conduz ao desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por

substituição, como se tratasse de uma língua formalizada, ainda que situado em um registro em que o discurso é construído de modo natural.”

Além disso, a heurística desses problemas “refere-se a um registro de representações espaciais que originam formas de interpretações autônomas” entre elas, as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras.” Para Duval (2012b), a **sequencial** está associada à ordem que a construção de uma figura geométrica deve seguir, por meio de instrumentos ou para a descrição dos passos para uma construção já realizada, com o objetivo de reproduzi-la. A **perceptiva** permite a identificação ou a interpretação imediata das formas de uma figura ou o reconhecimento visual imediato da forma. A **discursiva** permite interpretar e explicitar propriedades matemáticas da figura que vão além das que são dadas por uma legenda, por hipóteses ou articuladas nos enunciados, em suma, permite a interpretação dos elementos da figura geométrica por meio de um discurso.

Por fim, a apreensão **operatória** foca nas possíveis modificações ou transformações possíveis em uma figura dada e as reorganizações possíveis para essas modificações que permitem novos elementos para solução de um determinado problema. O autor distingue três tipos de modificações para essa apreensão: a modificação **ótica** que permite aumentar, diminuir ou deformar uma figura em outra com a produção de uma imagem da figura inicial, que pode ou não alterar sua forma (homotetia, cisalhamento); a modificação **posicional**, de orientação ou do lugar da figura em seu ambiente, que desloca uma figura sem modificar medidas e forma (rotação, translação) e a modificação **mereológica**, que ocorre por uma relação parte-todo, para decompor uma figura em várias subfiguras e compor uma nova figura ou a incluir em outra figura de modo que a figura inicial se torne uma subfigura. Essa modificação é realizada por uma operação, que o autor chama de **reconfiguração** intermediária, que se apoia na apreensão perceptiva e permite mobilizar tratamentos.

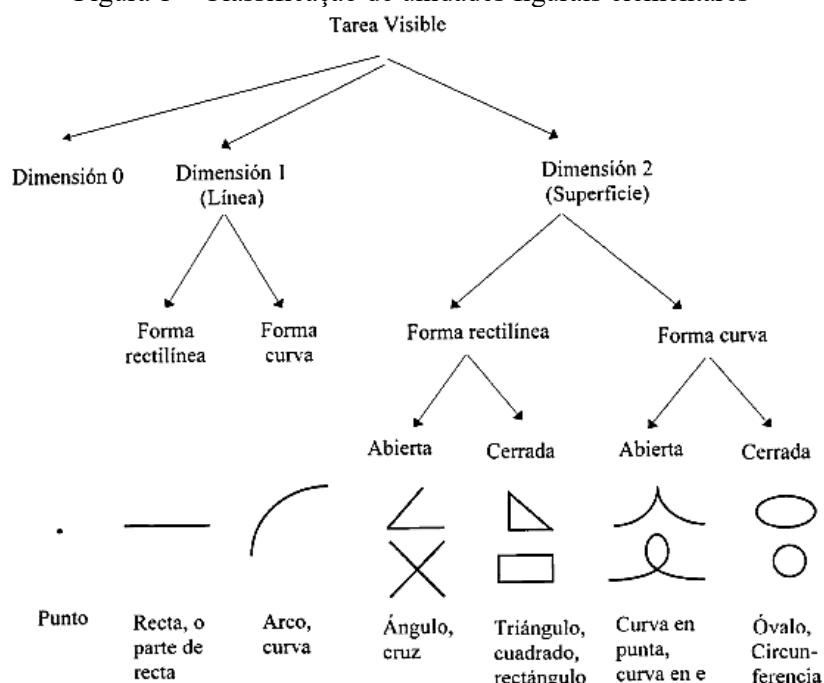
Para Duval (2012b), independente da figura considerada em uma atividade matemática, ela provoca duas atitudes, em geral, contrárias “uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas, e outra controlada, “que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais”, pois independente do enunciado a figura mostra objetos que se destacam, enquanto os objetos apresentados no enunciado podem não aparecer de forma espontânea. “O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses.” (p.120). Assim, afirma que as construções em geometria “ensinam a ver”, ou seja, “permitem descobrir, mobilizar e controlar a produtividade heurística das figuras” e aponta que suas principais

funções são visualizar, fazer ver, resumir informações, além de ajudar a provar e a conjecturar (Duval, 2012b, p. 287).

Diretamente ligado aos problemas geométricos, para Duval (2016, p. 14), existe outra maneira de ver uma figura “que constitui o mecanismo cognitivo da visualização matemática: a desconstrução dimensional.” Para Souza, Moretti e Almouloud (2019, p. 322), a **desconstrução dimensional das formas** é uma operação cognitiva que ocorre logo após as apreensões perceptiva e discursiva, que atua diretamente na resolução de problemas com figuras, para auxiliar no planejamento heurístico do sujeito e o conduz a decompor os elementos da figura e a solucionar o problema. Para Duval (2016, p. 31), essa operação cognitiva provoca uma repentina mudança do olhar para a figura, que contraria os processos de organização e reconhecimento perceptivo das formas, que provoca duas atitudes, em geral, conflitantes, uma imediata e automática, a apreensão perceptiva das formas e outra controlada, a interpretação discursiva de seus elementos que possibilita a aprendizagem, pois enquanto “a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado”, enquanto os objetos designados no enunciado não aparecem espontaneamente.

Assim, como as unidades figurais de uma figura, não apresentam o mesmo número de dimensões, Duval (2017, p. 198) apresenta a Figura 1 para classificá-las como unidades do registro das figuras geométricas.

Figura 1 – Classificação de unidades figurais elementares



Fonte: Duval (2017, p. 199)

A análise das figuras geométricas, segundo essa classificação, conduziu o autor a constatar que: *uma figura geométrica é sempre uma configuração de pelo menos duas unidades figurais* (um quadrado com suas diagonais); *as unidades figurais elementares de dimensão 2, como uma área delimitada, são estudadas como configurações de unidades figurais de dimensão 1* (forma linear). O contraste se apresenta quando se confronta essas unidades com a definição dos objetos matemáticos que elas representam, e se percebe que uma mudança de dimensão deve ser efetuada, quando se passa da representação figural para um discurso a respeito dos objetos representados.

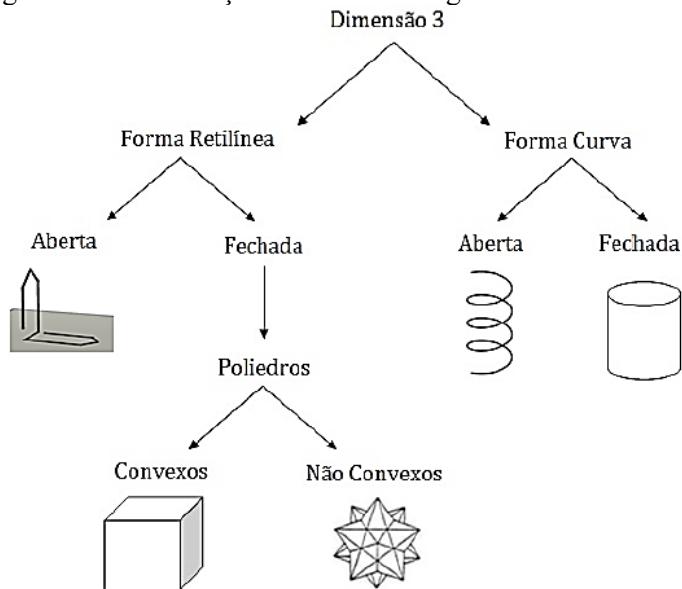
No registro das figuras, segundo Duval (2017), predomina a percepção das unidades de dimensão 2, em relação às de dimensão inferior, enquanto no discurso em língua natural predominam os objetos representados por unidades figurais de dimensão 1 ou 0. Para o autor, trata-se da articulação do registro das figuras com o discurso matemático e não da percepção. Enquanto a apreensão perceptiva foca automaticamente nas unidades de dimensão 2, o tratamento da situação que a figura representa, requer a restrição para unidades de dimensão 1 ou 0. Este problema explicita a complexidade da atividade geométrica e superá-lo é decisivo para a aprendizagem. Ainda constata que *um mesmo objeto matemático pode ser representado com unidades figurais diferentes* e cita o ponto que pode representar a dimensão zero (pertencente ou não a outra unidade figural) e como dimensão 2 como “canto” (ângulo) ou “cruzamento” (vértice ou intersecção).

O autor ainda afirma que o apresentado até aqui, não se aplica apenas à geometria plana, mas, para a geometria do espaço, quando se passa da figura ao raciocínio e se consideram subfiguras como planos ou secções de um objeto tridimensional por planos, portanto, para unidades de dimensão 2 e não unidades de dimensão 3, acrescenta que essa ação não é óbvia para os alunos.

No entanto, entendemos que há problemas em que o discurso matemático tem que focar na figura inicial de dimensão 3 e na figura de dimensão 3, resultante do corte por um plano, por exemplo, que trata de uma mudança 3D/3D. Nesse sentido, Palles (2013, p. 40-41) apresenta, baseada na figura de Duval (2017), uma classificação para figura no espaço, que não inclui apenas as figuras tridimensionais, apresentada na Figura 2, em que vemos objetos de forma retilínea ou curva, que se subdividem em abertas ou fechadas. Nas abertas vemos objetos que podem ser analisados em função de seu comprimento, pois nem toda figura no espaço é tridimensional e nas fechadas se encontram figuras tridimensionais como os poliedros convexos ou não convexos e os corpos redondos (cilindros, cones e esferas) que podem ser analisados

por seu volume ou capacidade. Nestes casos, o corte por um plano da figura tridimensional pode resultar em um triângulo (1D/3D), caso dos modelos formados apenas pela superfície do sólido ou em uma região triangular (2D/3D) quando a figura representa um sólido, o que implica em ações diferentes dependendo da situação em que a figura é apresentada, embora na representação plana as duas se confundam. Há que se diferenciar figuras tridimensionais de figuras espaciais.

Figura 2 – Classificação das unidades figurais de dimensão 3



Fonte: Palles (2013, p. 41)

Incluímos esse novo ponto de vista porque algumas atividades, aqui apresentadas, tratam de sólidos geométricos construídos por truncaturas, cuja fórmula para o cálculo da medida de seus volumes exige o relacionamento da figura construída com a figura inicial, ou seja, o desenvolvimento de um discurso que relaciona duas figuras tridimensionais.

Assim, essas atividades procuram percorrer os níveis de modelização algébrica e o trabalho com o registro algébrico e o das figuras geométricas, articulados com a utilização do Geogebra, tanto para as construções, quanto para fazer as relações necessárias para a construção de fórmulas ou modelos físicos. Assim, procuramos esse foco na Base Nacional Comum Curricular – BNCC para o Ensino Médio, que apresentamos no que segue.

3. A Base Nacional Comum Curricular e a relação entre álgebra, geometria e tecnologias

Para o **Ensino Médio**, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta um capítulo para tecnologias, em nosso caso: Matemática e suas tecnologias, em que propõe: a consolidação, a ampliação e o aprofundamento das aprendizagens essenciais desenvolvidas no

Ensino Fundamental para possibilitar aos estudantes construírem uma visão mais integrada da Matemática na perspectiva de sua aplicação à realidade. Para o desenvolvimento de competências que envolvam racionar, “é necessário que os estudantes possam, em interação com seus colegas e professores, investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática.” (Brasil, 2018, p.529). Acrescenta que “a área de matemática e suas tecnologias deve garantir aos estudantes o desenvolvimento de **competências específicas**” relacionadas às habilidades a serem alcançadas.” (p.530). São elas:

Tabela 1 – Competências e habilidades associadas prescritas pela BNCC

Competências	Habilidades associadas
Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos [...] divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral”. (p.532)	<p>variação de grandezas por análise de gráficos de funções, com ou sem tecnologias</p> <p>estatística</p> <p>interpretação e compreensão de textos científicos por compreensão de unidades de medidas de grandezas e suas conversões</p> <p>interpretação de taxas, transformações isométricas e homotéticas e suas composições</p> <p>probabilidade</p>
. “Propor ou participar de ações para investigar desafios do mundo contemporâneo e tomar decisões [...] com base na análise de problemas sociais [...] mobilizando e articulando conceitos, procedimentos e linguagens próprios da Matemática”. (p.534)	<p>participação na comunidade por medições e cálculos de perímetro, de área, de volume</p> <p>capacidade ou de massa</p> <p>pesquisa amostral com gráficos e uso de aplicativos para criação de planilhas</p>
“Utilizar estratégias [...] para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas para construir argumentação consistente”. (p.535)	<p>resolver e elaborar problemas que envolvam equações lineares com ou sem tecnologias digitais</p> <p>construir modelos por funções polinomiais de 1º ou 2º graus com ou sem apoio de tecnologias digitais</p> <p>relações entre juros simples e compostos;</p> <p>funções exponenciais</p> <p>funções logarítmicas;</p> <p>resolver e elaborar problemas utilizando funções seno e cosseno com ou sem aplicativos de álgebra e geometria</p>
	<p>diferentes métodos para obtenção da medida da área de uma superfície e deduzir expressões de cálculo para aplicá-las em situações reais com ou sem apoio de tecnologias digitais</p> <p>resolver e elaborar problemas que envolvem triângulos por relações métricas inclusive com leis do seno e do cosseno</p> <p>Resolver e elaborar problemas que envolvem o cálculo de áreas totais e de volumes de prismas, pirâmides e corpos redondos em situações reais (como o cálculo do gasto de material para</p>

	<p>revestimento ou pinturas de objetos cujos formatos sejam composições dos sólidos estudados), com ou sem apoio de tecnologias digitais</p> <p>diagrama de árvore</p> <p>espaço amostral</p> <p>probabilidade;</p> <p>notação científica</p> <p>grandezas determinadas por razão</p> <p>fluxograma para representar algoritmos que representam problemas</p> <p>medidas estatísticas</p>
Compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas. (p.538)	<p>converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações geométricas no plano cartesiano recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica</p> <p>converter representações algébricas de funções polinomiais de 1º grau em representações de funções polinomiais de 2º no plano cartesiano recorrendo ou não a softwares ou aplicativos de álgebra e geometria dinâmica</p> <p>relacionar função exponencial e logarítmica com ou sem apoio de tecnologias digital</p> <p>analisar funções definidas por uma ou mais sentenças em suas representações algébrica e gráfica; com ou sem apoio de tecnologias digitais</p> <p>linguagem de programação</p> <p>estatística</p>
Investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas por diferentes estratégias [...] e diferentes tecnologias , identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas. (p.540)	<p>identificar padrões e criar conjecturas para generalizar relações entre tabelas e o plano cartesiano para reconhecer representações de função polinomial de 1º grau</p> <p>identificar padrões e criar conjecturas para generalizar relações entre tabelas e o plano cartesiano para reconhecer representações para função polinomial de 2º grau do tipo $y = ax^2$</p> <p>máximos e mínimos de funções quadráticas com apoio de tecnologias digitais;</p> <p>investigar processos de obtenção da medida do volume de prismas, pirâmides, cilindros e cones, incluindo o princípio de Cavalieri, para a obtenção das fórmulas de cálculo da medida do volume dessas figuras</p> <p>resolver problemas sobre ladrilhamento do plano, com ou sem apoio de aplicativos de geometria dinâmica para conjecturar e generalizar padrões observados</p> <p>representar graficamente a variação entre área e perímetro de um polígono regular quando seus lados variam e as funções envolvidas</p> <p>progressões aritméticas</p> <p>progressões geométricas</p> <p>projeções usadas em cartografia com ou sem suporte de tecnologia digital</p> <p>comportamento de duas variáveis numéricas com ou sem tecnologias e usar uma reta para descrever a relação observada</p> <p>espaços amostrais</p>

Fonte: Os autores apoiando-se no Brasil (2018)

Cabe salientar que todas as habilidades, relacionadas à essas competências, são identificadas por EM13, que significa que podem ser desenvolvidas em qualquer um dos três anos letivos (p. 34), o que implica em um cuidado na escola, para que não sejam tratados os mesmos conteúdos em anos diferentes, por professores diferentes. O documento ainda apresenta o tópico “considerações sobre a organização curricular” para “números e álgebra”, “geometria e medidas” e “probabilidade e estatística” em que, para cada um distribuem as habilidades, apresentadas nas competências específicas, de acordo com o tema.

Algumas habilidades, como as que tratam de áreas de polígonos, de ladrilhamento, de função quadrática de um tipo específicos, cálculo de perímetros, áreas e volumes, de isometrias e homotetias, da forma como são apresentadas nos levam a entender que poderiam ser desenvolvidas no Ensino Fundamental. As construções sugeridas envolvem gráficos e não se fala, especificamente, em construções em geometria sintética. Sugerem a investigação para obter fórmulas, mas algumas já foram sugeridas para o Ensino Fundamental, além disso, apresentam as mais simples e comuns Explicitamente, a BNCC estimula a conversão de representações e aponta que não é simples (p. 538), mas quando as apresentam nas habilidades estão sempre relacionadas à funções polinomiais de 1º e 2º graus. No entanto, identifica-se uma função quadrática pela equação da curva que a representa e não por sua expressão algébrica, além disso sempre cita “construção geométrica no plano cartesiano” e não por representação gráfica já que tratam apenas de retas ou parábolas, associadas a funções. Não vimos especificamente orientações para as duas geometrias, e no caso da geometria analítica, os alunos podem entender que toda reta no plano cartesiano representa uma função. Quanto às tecnologias, elas são citadas, mas, sem qualquer orientação ou objetivo. Em síntese, não se vê qualquer relação explícita entre álgebra, geometria sintética e tecnologia.

Assim, no que segue apresentamos, discutimos e analisamos as atividades que ajudariam a desenvolver algumas habilidades para as competências indicadas, principalmente, para as 3 e 4, com construções na geometria sintética.

4. Atividades com sólidos geométricos no Geogebra

Não resta a menor dúvida de que “ver” uma figura geométrica é importante para a aprendizagem de geometria, no entanto, quando tratamos de figuras no espaço nem sempre é simples, porque a terceira dimensão, a profundidade, depende de representações em perspectiva que não são fáceis de construir com instrumentos de desenho. Para Silva e Almouloud (2018), esse tipo de construção provoca imensas dificuldades e são cansativas, pois qualquer erro pode

conduzir ao reinício da construção, além disso dependendo da posição inicial escolhida, ocorre a impossibilidade de “ver” muitos detalhes. É nesse ponto que entra o Geogebra porque, além de facilitar a construção, ele permite visualizar o que parecia “escondido”, pois o dinamismo da figura representada na tela do computador, por exemplo, possibilita a alteração do ponto de vista do observador e estimula a percepção, tanto do problema geométrico em questão, quanto de uma classe da figura representada.

Vários autores já apontaram as contribuições que os softwares de representação dinâmica (geometria dinâmica), entre elas a ação de arrastar que permite a exploração e a descoberta; as construções em geometria sintética, geometria analítica, funções, estatística etc.; a possibilidade de conjecturar e identificar maneiras de provar, demonstrar ou refutar hipóteses; situações de simulação etc.

No entanto, o Geogebra, em trabalhos com geometria sintética, não permite várias ações sem a janela de álgebra que, apresenta todos os elementos da construção em representações da geometria analítica, pares ordenados para pontos, equação da reta etc., que pode confundir alunos que ainda não estudaram tais conteúdos. No caso da janela 3D, por exemplo, para trocar a cor de alguma figura tridimensional, temos que entrar na janela de álgebra, identificar a representação da figura (em geral aparece na mesma cor por uma letra e a medida de seu volume) e clicar para que ela seja totalmente selecionada. Além disso, nesse tipo de figura quando fazemos o corte por um plano, o software não faz o corte efetivamente, para visualizar a figura resultante é necessário esconder a figura inicial. Em algumas situações é bom, quando por exemplo, precisamos relacionar a figura inicial com a figura resultante, mas em outras não, quando queremos apenas a figura resultante. Outro ponto, é que as figuras tridimensionais sempre aparecem transparentes, como se fossem ocas, o que pode confundir quando tratamos de sólidos. Para que percam a transparência e pareçam com sólidos é preciso alterar a cor para o máximo, com isso as informações relacionadas à profundidade se escondem, mas podem ser vistas com sua movimentação. Além disso, no Geogebra o termo tetraedro está relacionado a uma pirâmide triangular regular, por isso eles a diferenciam de pirâmide. Neste trabalho consideramos, por conta da etimologia da palavra, que tetraedro (quatro faces) representa uma pirâmide qualquer e, portanto, temos que identificar as que são regulares.

Assim, baseados nesses comentários, para realizar as tarefas propostas sugerimos que ao abrir o Geogebra, vá em “exibir” e clique em “janela de visualização 3D”, a seguir, feche a “janela de álgebra” e a “janela de visualização 2d” e, na janela de visualização 3D, desative os eixos com o botão direito do mouse.

Nas atividades aqui apresentadas buscamos trabalhar com sólidos geométricos conhecidos para determinar novos sólidos por truncaturas e, para estes, determinar uma fórmula para calcular a medida de seus volumes. Em outras buscamos justificativas matemáticas para a construção de planificações de pirâmides retas triangulares. Em todas procuramos trabalhar a relação entre geometria sintética, álgebra e tecnologia para desenvolver o processo de algebrização no que se refere à determinação de fórmulas, o uso de parâmetros e o raciocínio funcional, além de tratamentos, conversões de representações e de desconstrução dimensional das figuras. Depois da apresentação e discussão da solução das atividades fizemos suas análises baseados no referencial teórico escolhido. Para realizar a tarefa o aluno deve conhecer o cubo e ter alguma familiaridade com o GeoGebra, mas desconhecer como calcular a medida do volume de uma pirâmide.

As Atividades

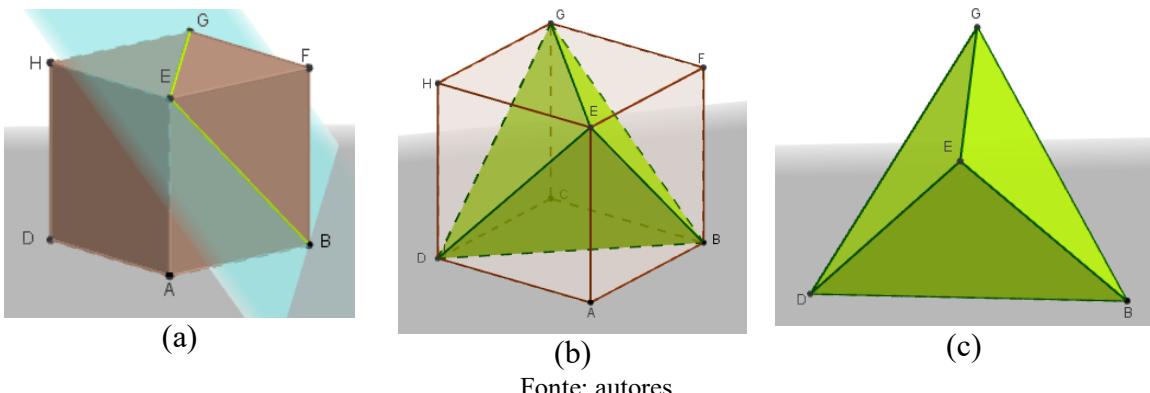
As atividades se caracterizam por situações intramatemática, no sentido de que foram desenvolvidas em um contexto matemático. O objetivo das três primeiras atividades é conduzir o aluno a fazer conversões de uma representação figural, para um discurso na língua natural e desta para uma representação algébrica para a medida do volume de um novo sólido.

Atividade 1

- a) Construa um cubo (hexaedro) no Geogebra e nele organize as diagonais das faces para representar uma pirâmide triangular, que pode ser chamada de tetraedro regular, e é obtida por cortes realizados no cubo.
- b) Determine uma fórmula para calcular a medida do volume desse tetraedro em função da medida a da aresta do cubo.
- c) É possível transformar essa fórmula para uma outra em função da medida x das arestas do tetraedro?

No **item (a)**, depois de determinar um cubo no Geogebra, a construção do tetraedro (**Figura 3a**) depende da percepção que o extremo de uma diagonal deve coincidir com o extremo de outra diagonal, para formar as faces do tetraedro que determinam o plano de corte. Como o Geogebra não permite efetivamente o corte, é necessário construir os triângulos (**Figura 3b**). Na janela de álgebra identificar o cubo e escondê-lo (**Figura 3c**) para observar que o tetraedro é regular, porque suas quatro faces são superfícies triangulares equiláteras e tem quatro vértices e seis arestas. Caso o aluno não visualize o tetraedro cabe ao professor lançar questões para estimular sua apreensão perceptiva, ou lhe mostrar os passos da construção que ajuda no desenvolvimento da apreensão sequencial.

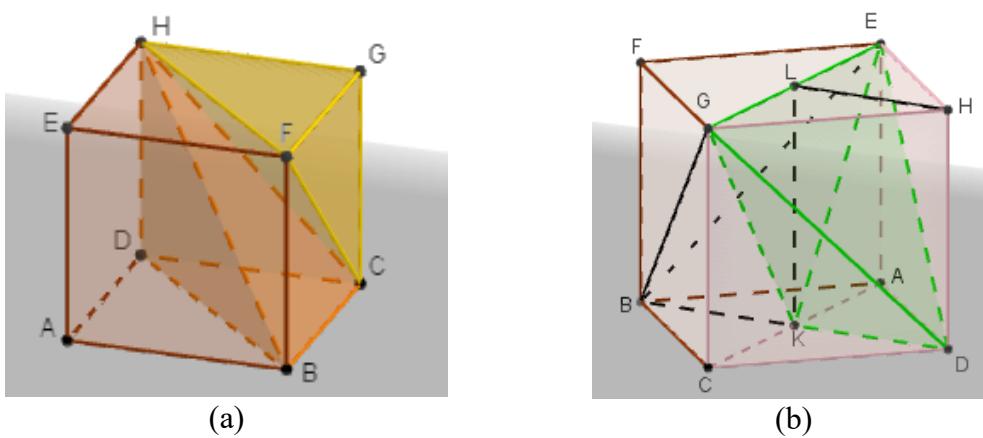
Figura 3 – Construção de um cubo qualquer e do tetraedro regular inscrito



Fonte: autores

Para responder ao **item (b)** há mais de um caminho. No primeiro, por truncatura do cubo, perceber, com a movimentação da figura, que foram retiradas quatro pirâmides do cubo. A seguir relacionar o volume dessas pirâmides com o volume do cubo, por construção (**Figura 4a**) ou calculando a razão entre a medida do volume do tetraedro e a medida do volume do cubo (o que não seria bom). Para a construção considerar que a metade do cubo representa um prisma triangular, e nele estão contidas duas pirâmides retas (HGFC e DCBH) que são congruentes, logo mesmo volume, o que conduz que a terceira (HFBC) também tem o mesmo volume e que uma pirâmide retirada tem $\frac{1}{6}$ do volume do cubo. Assim, as quatro pirâmides retiradas do cubo correspondem a $\frac{2}{3}$ de seu volume, e o volume do tetraedro equivale então a $\frac{1}{3}$, ou seja, $V_T = \frac{1}{3}a^3$, que é uma fórmula que permite calcular a medida do volume do tetraedro em função da medida a da aresta do cubo inicial.

Figura 4 – Trissecção de um prisma triangular para primeira solução



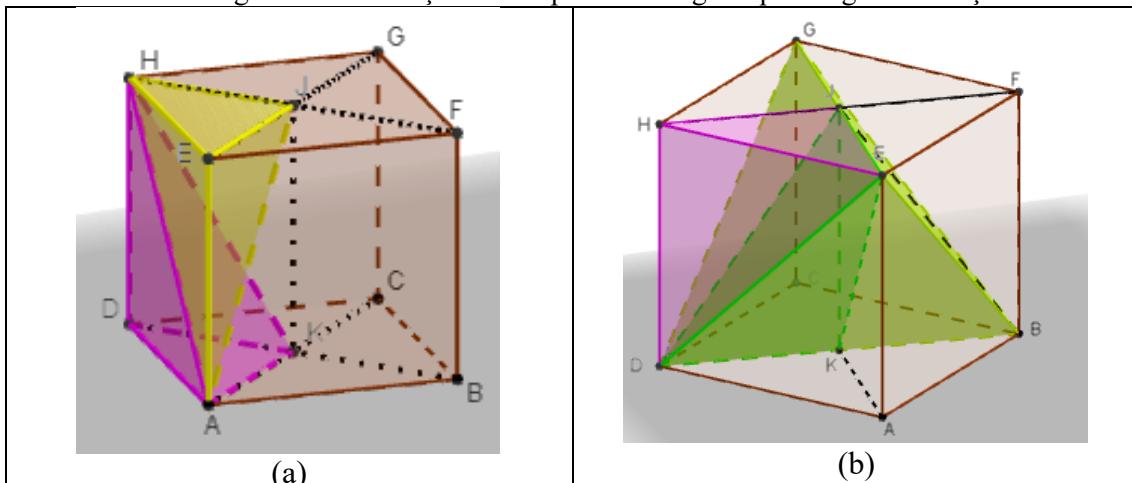
Fonte: autores

Nessa situação é possível também considerar, no mesmo prisma quatro pirâmides, a pirâmide que está contida no tetraedro (base GEK e vértice D), a pirâmide que será retirada (base GHE e vértice D), a pirâmide de base DAK e vértice E, além da pirâmide de base CDK e

vértice G (**Figura 4b**). Neste caso, é preciso mostrar a congruência dessas duas últimas e que o volume das duas equivale ao volume da pirâmide que será retirada, o que pode ser feito ao considerar dois prismas triangulares, com o segmento que une o ponto médio da aresta GE e o vértice H. A seguir tirar as mesmas conclusões da atividade anterior e chegar à fórmula.

Outro caminho que pode ocorrer em sala de aula, é perceberem a retirada de oito pirâmides, com vértices em A (AEKD e AEKB), em H (HJGD e HJED), em F (FJGB e FJEB) e em C (CGKD e CGKB), em vez de quatro. Para relacionar o volume do cubo com o volume do tetraedro considerar um prisma triangular, por exemplo o de base HJE, cujo volume corresponde a $\frac{1}{4}$ do volume do cubo (**Figura 5a**) e perceber que as três pirâmides que compõem o prisma (HJE, AKDH E HJKA) têm mesmo volume e correspondem a $\frac{1}{12}$ do volume do cubo. Assim, concluir, por meio da apreensão discursiva, que $V_T = V_C - 8V_{AKDE}$, logo $V_T = V_C - 8 \times \frac{1}{12}V_C = V_C - \frac{2}{3}V_C = \frac{1}{3}a^3$.

Figura 5 – Trissecção de um prisma triangular para segunda solução

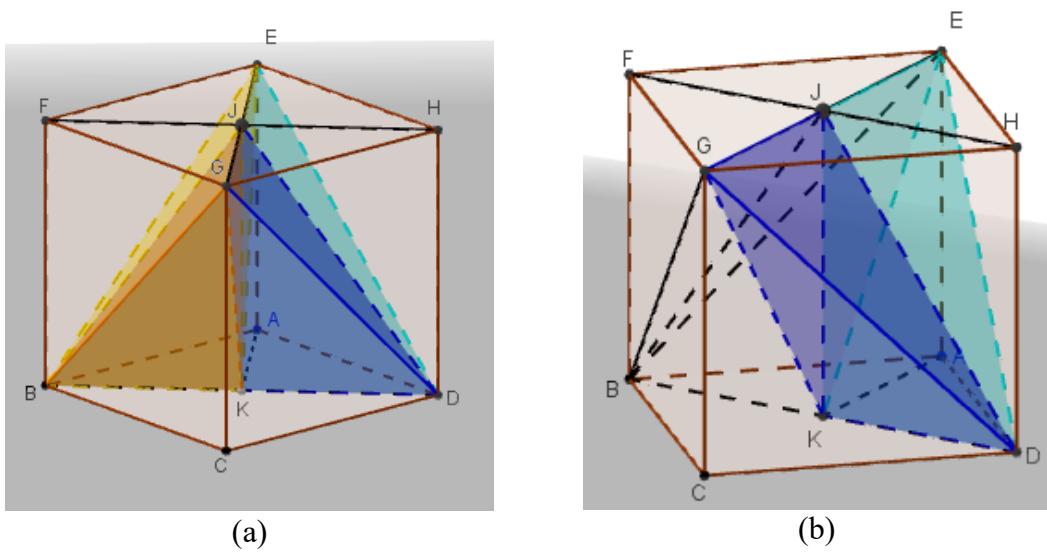


Fonte: autores

Pode ocorrer ainda, que considerem o prisma de base HJE que contém a pirâmide JDKE que está contida no tetraedro (**Figura 5b**) e HJED e DKAE) e chegar às mesmas conclusões da solução anterior.

Ainda pode ocorrer **outra solução**, em que os alunos sugerem a decomposição do tetraedro regular em quatro pirâmides BJGK, EJBK, GJDK e JEDK congruentes. (**Figura 6a**), cada par, por exemplo, EJKD e GJKD (**Figura 6b**), que tem base comum JKD e mesma altura $\overline{JE} \equiv \overline{JG}$ (J é ponto médio de \overline{EG}), logo as duas pirâmides são congruentes e têm mesmo volume, e o mesmo ocorre para as outras duas pirâmides.

Figura 6 – Pirâmides componentes do tetraedro



Fonte: autores

No entanto, apenas essa conclusão não conduz à fórmula procurada, é necessário olhar de outra forma para relacionar os volumes do tetraedro e do cubo e, a saída é observar que o cubo é composto por quatro prismas triangulares e que cada um contém uma pirâmide que compõe o tetraedro. Após perceber e expressar que, por exemplo, o prisma de base JHG (Figura 6b) é composto por duas pirâmides, HGD e DKCG, congruentes e concluir que a terceira, JGDK, que está contida no tetraedro também tem mesmo volume, pode-se concluir que, o prisma tem $\frac{1}{4}$ do volume do cubo, a pirâmide contida no tetraedro tem $\frac{1}{4}$ de seu volume e $\frac{1}{3}$ do volume do prisma, e pode-se escrever $\frac{1}{4}V_T = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}V_C = \frac{1}{12}V_C$, em que V_T representa a medida do volume do tetraedro e V_C representa a medida do volume do cubo. Logo, por tratamentos algébricos relacionar a medida da aresta do cubo para obter $V_T = 4 \times \frac{1}{12}V_C = \frac{1}{3}a^3$.

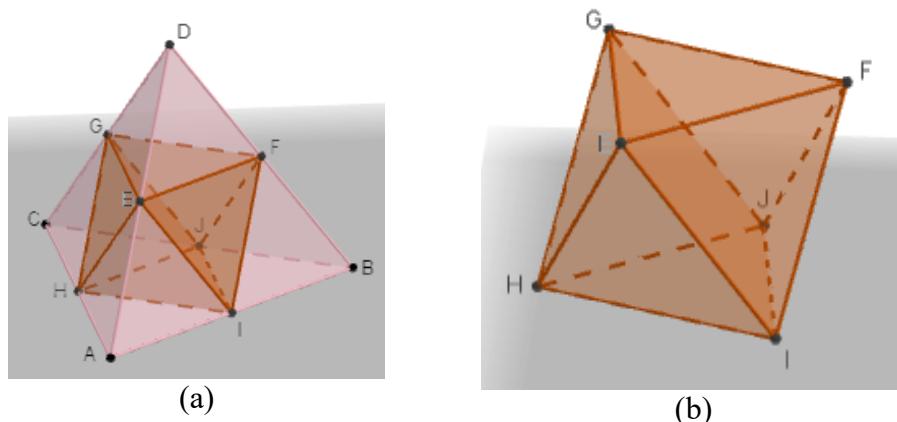
Para o **item (c)**, como o tetraedro é um poliedro regular, de aresta que mede $x = a\sqrt{2}$, para a nova fórmula é necessário uma mudança de parâmetro para $a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ e concluir que $V_T = \frac{1}{3}a^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{x\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$, que permite calcular a medida do volume de um tetraedro regular qualquer com relação à medida de sua aresta.

Atividade 2

- Determine um tetraedro regular e os pontos médios de suas arestas. Una esses pontos por segmentos. Movimente a figura, nomeie e caracterize o sólido construído.
- Qual a fórmula para determinar a medida do volume desse sólido?
- E qual seria a fórmula para calcular a medida do volume se o octaedro estivesse inscrito em um cubo com seus vértices no ponto médio de cada diagonal das faces do cubo?

No **item (a)**, após a construção, como mostra a **Figura 7a**, esconder o tetraedro, na janela de álgebra, para observarem apenas o novo sólido (**Figura 7b**) e movimentá-la para identificar o octaedro regular como um sólido geométrico que tem oito faces triangulares congruentes e equiláteras, doze arestas e seis vértices.

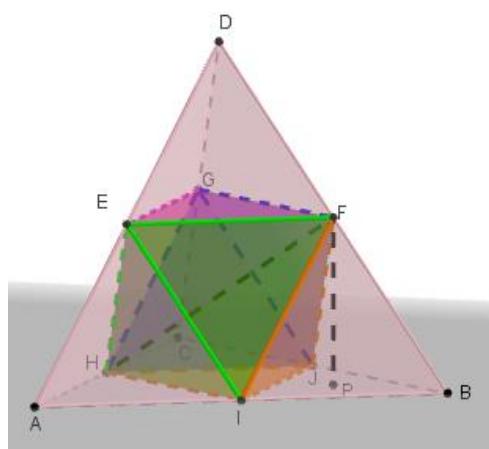
Figura 7 – Octaedro inscrito em um tetraedro



Fonte: autores

Para responder o **item (b)** é preciso verificar as relações entre os dois poliedros (**Figura 8**). Uma possibilidade é observar o paralelogramo EFJH e sua diagonal FH para determinar os triângulos EFH e FHJ, que serão bases de quatro pirâmides: EFHG (rosa), EFHI (verde), FHJG (azul), e FHJI (laranja).

Figura 8 – Relações entre o octaedro inscrito e o tetraedro



Fonte: autores

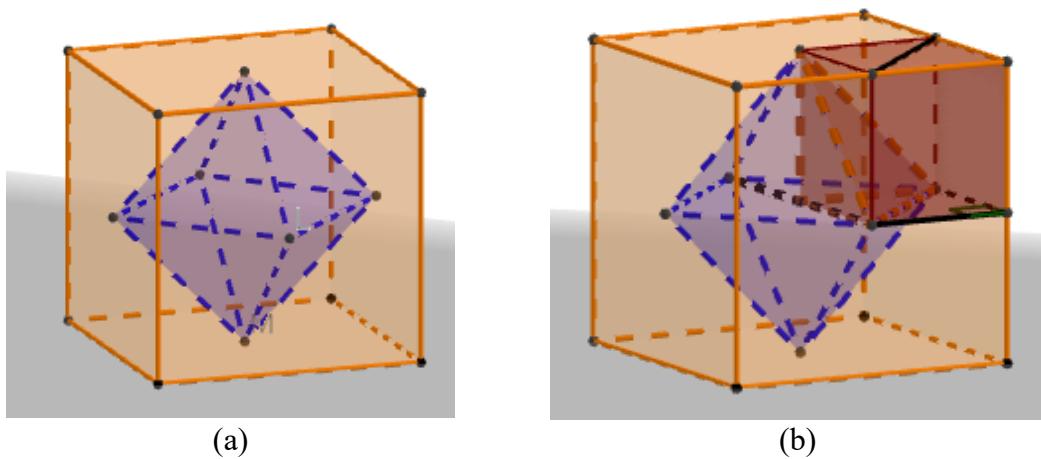
Ao observar que elas são congruentes, porque têm bases congruentes e altura igual a metade da altura do octaedro. Além disso, é preciso comparar uma delas com uma das que foram retiradas, por exemplo, FJIB e FHJI que têm as bases BIJ e JIH, congruentes e cujas alturas é a distância do ponto F ao plano da base do tetraedro (FP), logo podemos afirmar que o volume do octaedro é metade do volume do tetraedro es escrever $V_O = \frac{1}{2}V_T$.

Para obter a fórmula já sabemos que a medida do volume do tetraedro é $V_T = \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$ com x representando a medida da aresta do tetraedro e que $V_O = \frac{1}{2}V_T$ ou $V_O = \frac{1}{2}V_T = \frac{1}{2} \times \frac{x^3\sqrt{2}}{12}$.

Ao relacionar as arestas dos dois poliedros vemos que $x = 2y$ em que y representa a medida da aresta do octaedro e, portanto, $V_O = \frac{\sqrt{2}}{24}(2y)^3 = \frac{\sqrt{2}}{3}y^3$ que é a fórmula para obter a medida do volume do octaedro em função da medida de sua aresta.

Para o **item (c)**, é preciso fazer a construção como mostra a **Figura 9a** e relacionar os volumes dos dois poliedros para determinar a fórmula. Uma solução é observar o cubo inicial composto por oito cubos (de aresta $\frac{a}{2}$) e que cada um contém uma pirâmide do octaedro, que corresponde a $\frac{1}{6}$ do cubo que a contém e, portanto, $\frac{1}{48}$ do volume do cubo inicial. Logo, como o octaedro é formado por oito dessas pirâmides, ele tem $\frac{1}{6}$ do volume do cubo, $V_O = \frac{1}{6}a^3$.

Figura 9 – Octaedro inscrito em um cubo



Fonte: autores

Para produzir a outra fórmula, deve-se relacionar as arestas dos dois sólidos geométricos e observar, na figura 9b, que as arestas do octaedro são congruentes e hipotenusa de um triângulo de catetos com medida $\frac{a}{2}$ e calcular $y^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ que resulta em $y = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ ou perceber, de imediato, que essa aresta é diagonal de um quadrado de lado $\frac{a}{2}$ e concluir que $y =$

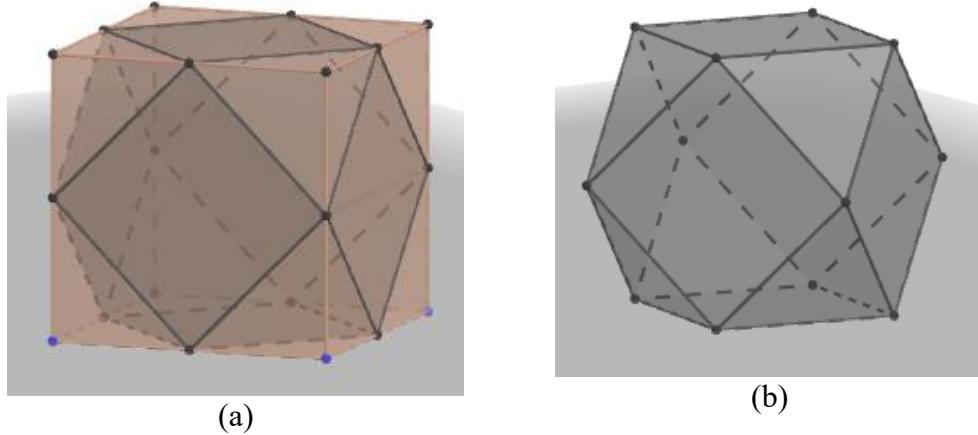
$\frac{a\sqrt{2}}{2}$. Logo, obter que $a = \frac{2y}{\sqrt{2}}$ e fazer a substituição para obter que $V_O = \frac{1}{6} \left(\frac{2y}{\sqrt{2}}\right)^3 = \frac{2y^3}{3\sqrt{2}} = \frac{y^3\sqrt{2}}{3}$ e verificar que é a mesma fórmula obtida anteriormente, porque foi desenvolvida em função da medida da aresta do octaedro. Outras técnicas podem ser encontradas em sala de aula.

Atividade 3

- Determine um cubo qualquer no Geogebra e os pontos médios de suas arestas. Para determinar os cortes de uma pirâmide no cubo, considere os pontos médios de três arestas com extremos no mesmo vértice do cubo. Retire as oito pirâmides correspondentes aos oito vértices do cubo.
- Determine uma fórmula para calcular a medida do volume do novo sólido em função da medida a da aresta do cubo.
- As arestas do novo sólido têm mesma medida? Em caso afirmativo, considere que medem z e determine uma fórmula para calcular a medida de seu volume em função da medida de sua aresta.

Para o item (a), a construção deve ser similar a apresentada na **Figura 10a**, após esconder o cubo, na janela de álgebra (**Figura 10b**), movimentar a figura, que representa um sólido geométrico arquimediano chamado cuboctaedro, que tem oito triângulos equiláteros e seis quadrados como faces, 24 arestas e 12 vértices.

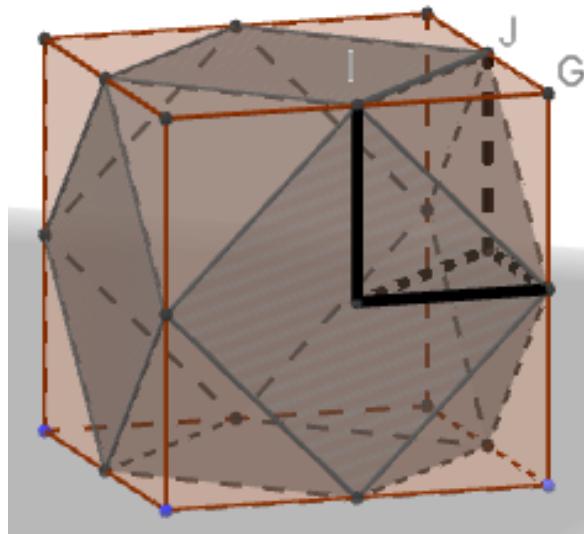
Figura 10 – Cuboctaedro inscrito em um cubo



Fonte: autores

Para o item (b), busca-se relações entre o volume do cubo e o volume do cuboctaedro, a **Figura 11** mostra uma possibilidade que já foi utilizada, o prisma triangular de base IJG, que contém uma das pirâmides que foi retirada, que corresponde a $\frac{1}{3}$ do volume desse prisma e a $\frac{1}{48}$ do volume do cubo. Assim, podemos deduzir que a medida do volume do novo sólido pode ser obtida por $V_S = a^3 - \frac{8a^3}{48} = \frac{48a^3 - 8a^3}{48} = \frac{40a^3}{48} = \frac{5}{6}a^3$.

Figura 11 – Relação entre o cubo octaedro inscrito e o cubo



Fonte: autores

Para o **item (c)**, observar que como as arestas, de medida z do cubo octaedro, são hipotenuses de triângulos retângulos cujos catetos medem $\frac{a}{2}$ então $z^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{2}$ e, portanto $2z^2 = a^2$, $z = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ e $a = z\sqrt{2}$. Para obter a nova fórmula em função da medida da aresta do cubo octaedro substituímos o valor de a na fórmula anterior, $V_S = \frac{5}{6}a^3 = \frac{5}{6}(z\sqrt{2})^3 = \frac{5}{6}z^3 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{6}z^3 = \frac{5\sqrt{2}}{3}z^3$.

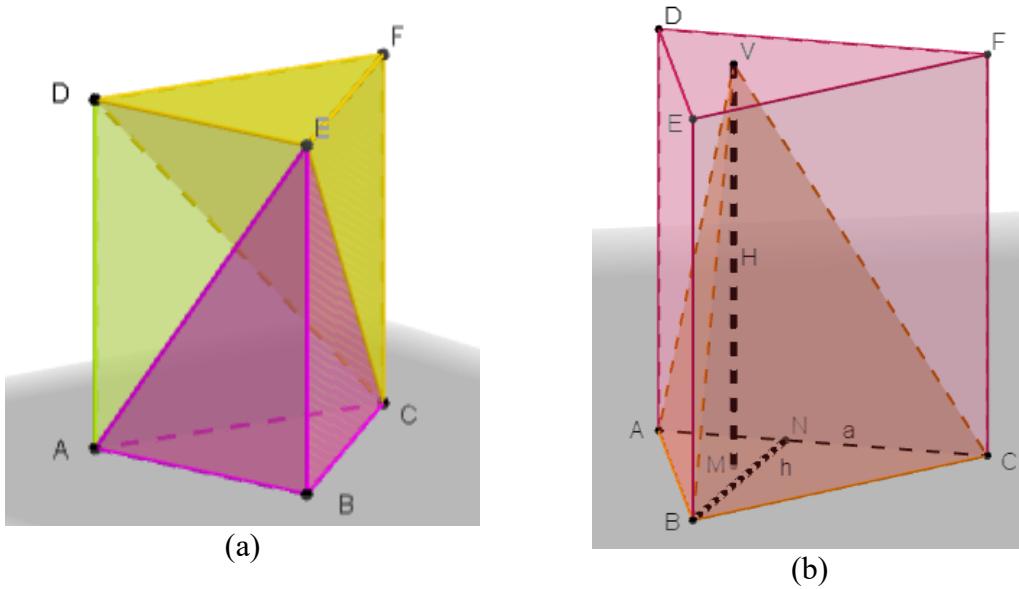
Atividade 4

- Construa um prisma reto de base triangular DEF e nele construa as pirâmides DEFC e ABCE. O que você pode concluir a respeito do volume das três pirâmides?
- Determine uma fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide reta de base triangular qualquer em função de sua altura.
- Qual seria a fórmula para pirâmides retas que não têm a base triangular, por exemplo, uma de base quadrada e outra com base hexagonal regular em função de sua altura?

O objetivo é generalizar a fórmula para o cálculo da medida do volume de pirâmides retas quaisquer.

No **item (a)**, como já visto em atividades anteriores, a **Figura 12** nos leva a concluir que o prisma triangular é composto por três pirâmides de mesmo volume.

Figura 12 – Generalização intuitiva da trissecção do prisma triangular



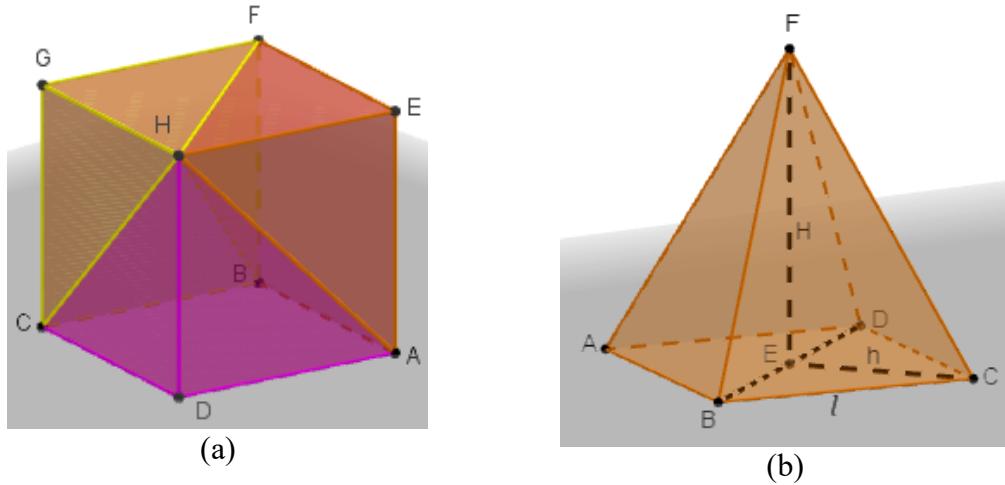
Fonte: autores

No **item (b)**, com base no item anterior, a solução é considerar um prisma reto triangular e relacioná-lo a uma pirâmide triangular qualquer. Os alunos podem construir prisma triangular com o software, determinar na base superior um ponto para representar o vértice da pirâmide e construí-la (**Figura 12b**). Então pode-se movimentar o vértice para que coincida com o ponto D e ao comparar com a **figura 12a** percebe-se que a pirâmide ABCD equivale à pirâmide HJDE, ao fazer o vértice coincidir com o ponto F a pirâmide ABCF equivale à pirâmide DKAE, logo a parte restante do prisma equivale à terceira pirâmide que tem o mesmo volume das anteriores. Outra solução seria com o cálculo da razão entre a medida do volume do prisma e a medida do volume da pirâmide e movimentar o ponto que representa o vértice da pirâmide.

Assim, sabendo que a medida do volume do prisma é o produto da medida da área da base por sua altura, conclui-se que $m(V_p) = \frac{1}{3}m(A_b) \times H$, mas como a base é um triângulo (ABC) então $m(V_p) = \frac{1}{3} \frac{b \times h}{2} \times H = \frac{b \times h \times H}{6}$, em que b representa a medida de um lado da base, h a altura em relação a esse lado e H a altura da pirâmide.

Para o **item (c)** há dois caminhos para a pirâmide quadrangular. Uma é dividir um cubo em três pirâmides de bases quadradas de mesmo volume, como mostra a **Figura 13a**, em que as pirâmides são FGCBH, EFBAH e ABCDH, todas com vértice comum em F e altura de medida igual a aresta do cubo.

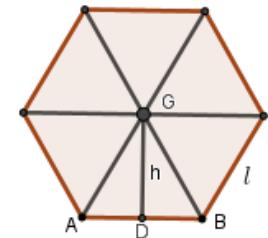
Figura 13 – Trissecção de um cubo e pirâmide quadrangular



Fonte: autores

Logo, o volume de cada pirâmide continua sendo um terço da medida da área da base multiplicada pela altura, mas como a base é um quadrado então $m(V_{Pq}) = \frac{1}{3}a^3$. Para uma pirâmide de qualquer altura considerar as pirâmides em um prisma reto quadrangular de altura H e, portanto, $m(V_{Pq}) = \frac{1}{3}a^2 \times H$ que pode valer para um prisma quadrangular substituindo a^2 pela medida da área da base da pirâmide. **Outra solução** é perceber que a pirâmide de base quadrangular (**Figura 13b**), de qualquer altura, pode ser dividida em duas pirâmides congruentes de altura FE, e então seu volume é dado por $m(V_{Pq}) = 2 \times m(V_{pt}) = 2 \times \frac{l \times h \times H}{6} = \frac{l \times h \times H}{3}$ em que l representa a medida do lado do quadrado da base, h a sua altura do triângulo da base e H a altura da pirâmide.

Para o caso em que a pirâmide tem como base um hexágono regular, observa-se que ela é formada por 6 regiões triangulares congruentes e que para determinar a medida de sua área tem que calcular altura h do triângulo ABG, por exemplo. Como esse triângulo é equilátero temos $l^2 = h^2 + \left(\frac{l}{2}\right)^2$ logo, $h = \frac{l\sqrt{3}}{2}$ e a medida da área do triângulo ABG é $m(A_{ABG}) = \frac{1}{2}l \times \frac{l\sqrt{3}}{2} = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}$ e, portanto, a medida do volume da pirâmide regular hexagonal é determinada por $m(V_{Ph}) = 6 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times H$, em que l representa a medida do lado do hexágono e H a altura da pirâmide.



O objetivo das próximas atividades é conduzir os alunos a perceberem que as planificações de superfícies de sólidos geométricos envolvem conhecimentos geométricos e outros conhecimentos matemáticos que devem ser considerados para sua construção.

Atividade 5

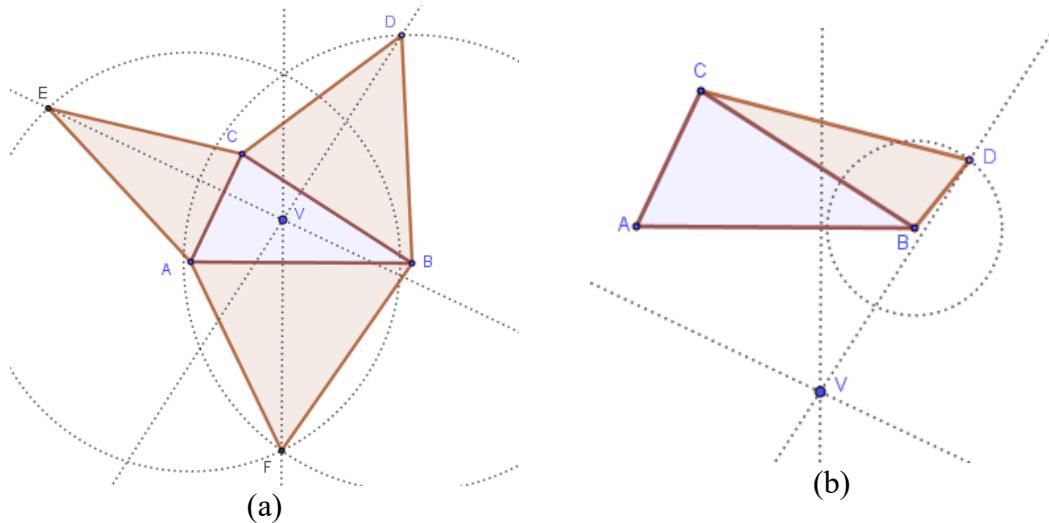
- a) Qualquer figura composta por quatro triângulos representa a planificação de uma pirâmide triangular? Se for necessário construa a planificação em papel para recortar e verificar sua validade. Essa construção pode ser com régua e compasso ou no GeoGebra 2D para imprimir.
- b) Em uma pirâmide triangular o que ocorre com suas arestas laterais?
- c) Quais posições a projeção do vértice pode ocupar em relação à base da pirâmide?
- d) Como determinar o vértice da pirâmide na planificação?
- e) O que deve ser considerado para a construção da planificação?
- f) Construa a planificação iniciando com a construção de um triângulo que representará a base e um ponto V para representar a projeção do vértice. Depois da construção movimente o ponto V e imprima se achar necessário para obter um modelo físico.
- g) A construção garante sempre a existência do modelo? Para justificar sua resposta posicione a projeção do vértice nas três posições possíveis (item c).

Para o **item (a)** é provável que os alunos organizem quatro triângulos quaisquer como a planificação, mas se construírem um modelo físico, podem verificar que nem todos representarão uma pirâmide. Na observação do modelo (**item (b)**), percebe-se que os lados das superfícies triangulares, que constituem uma aresta, têm que ter a mesma medida e que a projeção do vértice da pirâmide (**item (c)**), no plano de sua base pode pertencer às regiões interna ou externa do triângulo da base ou a um dos seus lados.

No **item (d)** as retas suportes da altura de cada região triangular das faces laterais da pirâmide, perpendiculares a cada lado da base, se intersectam em um ponto que representa a projeção do vértice no plano da base. Para a construção (**item (e)**) considerar que duas faces se unem para formar uma aresta da pirâmide e por isso esses lados devem ter mesma medida; que as retas suportes das alturas de cada face lateral são perpendiculares ao respectivo lado da base e se intersectam na projeção do vértice, além de conter o vértice da pirâmide. Para iniciar a construção, no GeoGebra 2D (**item (f)**) determinar o triângulo ABC para representar a base da pirâmide (**Figura 14a**) e um ponto V para a projeção do vértice sobre a base. Pelo ponto V traçar retas perpendiculares aos lados AB, CB e CA e, em uma delas, por exemplo a relativa ao lado CB, determinar o ponto D e o triângulo CDB. Pelo ponto C traçar uma circunferência com centro em C e raio CD, que intersecta a perpendicular ao lado AC no ponto E, e garante que os lados CD e EC têm mesma medida, determinar o triângulo ACE. Com centro em A traçar a

circunferência com raio AE que intersecta a perpendicular ao lado AB no ponto F e determinar o triângulo ABF.

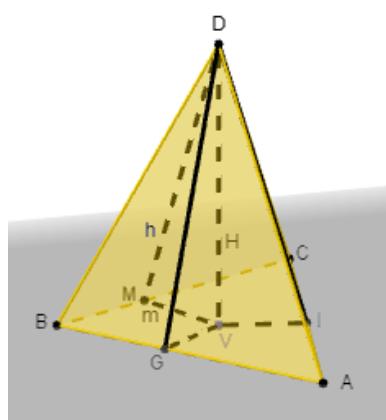
Figura 14 – Planificação de superfície de pirâmide triangular



Fonte: autores

No item (g) a movimentação do ponto V pode fazer desaparecer algum triângulo (**Figura 14b**), o que significa que não temos mais a planificação para um modelo de pirâmide. Para justificar tal ocorrência olhar para a pirâmide (**Figura 15**) e ver que para cada face lateral da pirâmide está associado um triângulo retângulo, por exemplo DVM que, por Pitágoras, nos leva a $H^2 = h^2 - m^2$ em que H representa a altura da pirâmide, h a altura da face BCD e m a distância entre M e V. Essa relação vale para os triângulos correspondentes as outras faces.

Figura 15 – Relações em pirâmide quadrangular



Fonte: autores

Assim, a altura da pirâmide H existe se as medidas h e m são diferentes e $h >$, mas esses três triângulos têm o segmento DV comum que representa a altura da pirâmide e, para garantir sua existência, verificar que $h^2 - m^2$, nesses triângulos, sejam iguais. Essas relações são válidas para os casos em que a projeção do vértice está nas regiões interior ou exterior ao

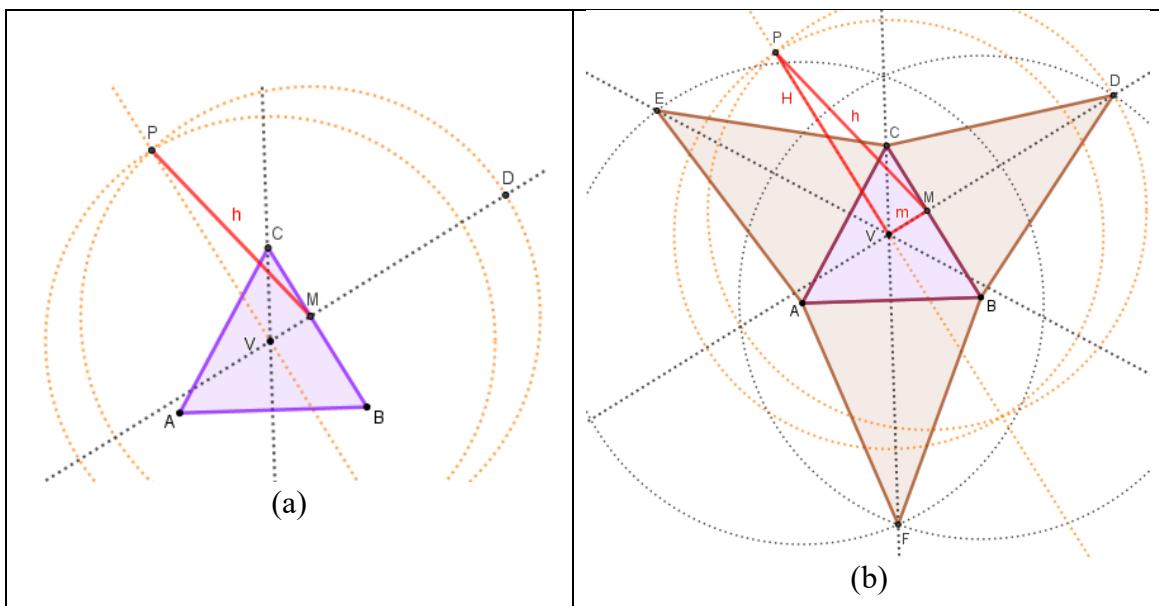
triângulo da base. No caso em que a projeção do vértice pertence a um dos lados do triângulo da base, ocorre que $m = 0$ em relação à uma face lateral, mas a planificação ainda existe.

Atividade 6

- Construa um modelo para uma pirâmide de altura 6 cm, cuja superfície da base é a região de um triângulo equilátero de lado 5 cm.
- Construa, nessa planificação, um modelo para um tronco qualquer de uma pirâmide reta triangular.
- Construa um modelo para um tronco de pirâmide que foi cortado por um plano paralelo à base a 3,5 cm desta.

No **item (a)** para a construção determinar um triângulo ABC, para representar a base da pirâmide e um ponto V que representa a projeção do vértice da pirâmide no plano da base. Para determinar a altura observar, na **figura 16a**, que a altura de cada face depende da altura da pirâmide e que o segmento que representa a altura da pirâmide é perpendicular ao segmento MV, então traçar por V uma reta perpendicular à reta VM, uma circunferência com centro em B e raio 8 cm, que determina na perpendicular o ponto P, e o triângulo retângulo PVM, em que o lado PM representa a altura da face CBD. A circunferência de centro em M e raio ME determina na reta VM o ponto D, e com esse ponto a construção continua como feito na atividade anterior (**Figura 16b**).

Figura 16 – Planificação de pirâmide triangular com altura determinada

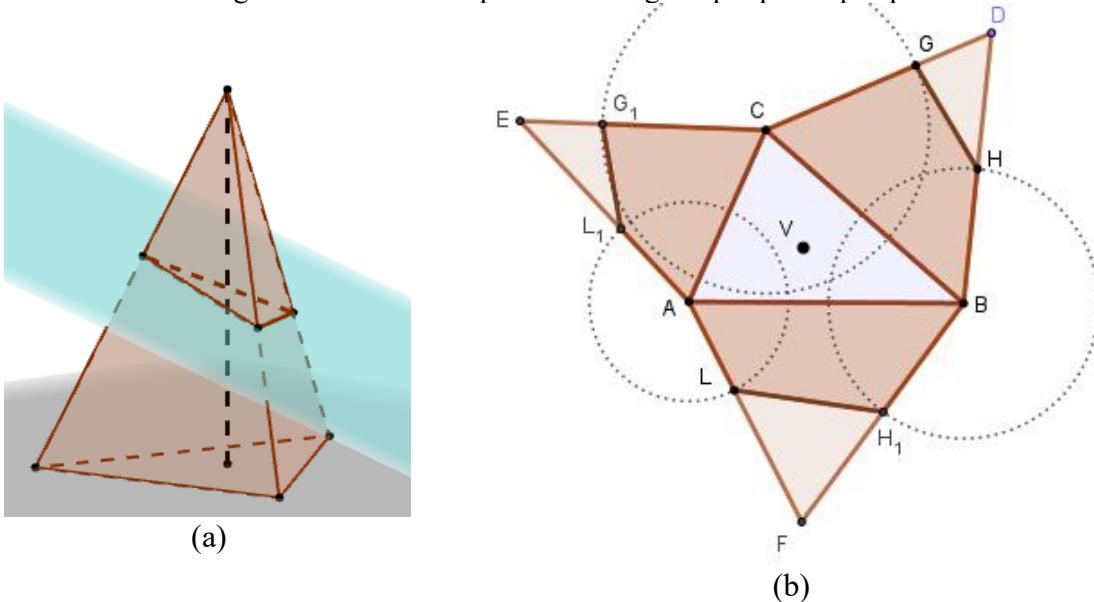


Fonte: autores

Para o **item (b)** após perceber que o tronco da pirâmide é obtido pelo corte por um plano (**Figura 17a**), abrir uma planificação já realizada e determinar no lado CD (**Figura 17b**), um ponto G qualquer, depois usar o compasso para transportar a medida CG para o segmento CE para obter o ponto G1, assim CG e CG1 têm mesma medida. No lado BD determinar um ponto

H e com o compasso transportar a medida BH para o segmento BF para obter o ponto H1. Por fim, determinar o ponto L no lado AF e transportar a medida AF para o segmento AE e determinar o ponto L1. Para terminar a construção traçar os segmentos GH, LH1 e L1G1.

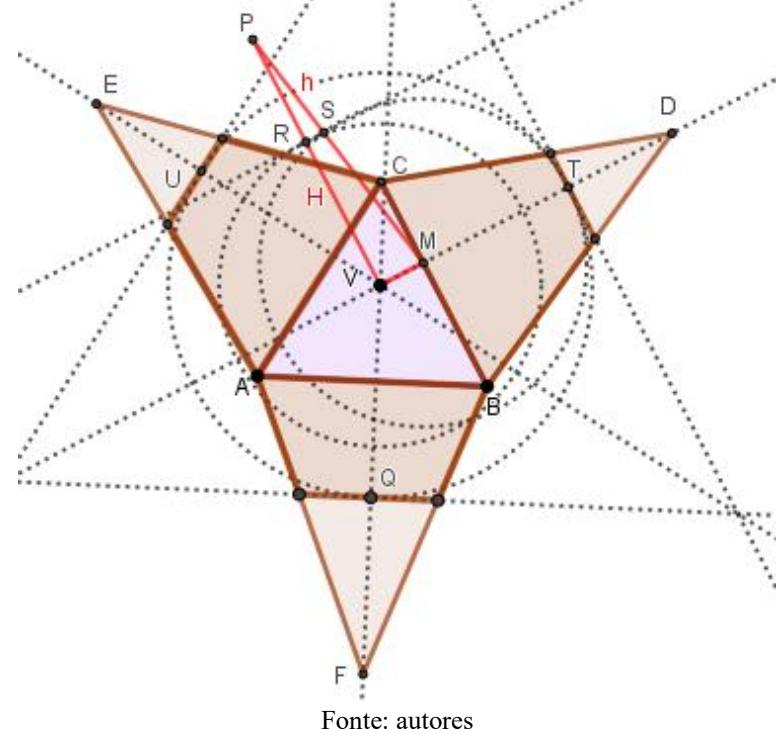
Figura 17 – Tronco de pirâmide triangular por plano qualquer



Fonte: autores

Para o item (c) perceber que agora o plano de corte é paralelo ao plano de base e está a 3,5 cm desta. Então, depois de abrir a planificação do item (a) e esconder os traçados auxiliares (retas e circunferências, mas manter o triângulo VMP e as retas perpendiculares às arestas da base) determinar o ponto R no segmento VP (**Figura 18**), de tal forma que VM tenha 3,5 cm (no GeoGebra tem que digitar 3.5). A seguir traçar pelo ponto R uma reta paralela ao segmento VM (que está contido na base da pirâmide), que determina no segmento PM o ponto S, traçar a circunferência com centro em M e raio MS para determinar o ponto T no segmento que representa a altura da face CBD. Traçar a circunferência com centro em V e raio VT que determina o ponto Q na altura da face ABF e o ponto U na altura da face ECA. Por T traçar uma reta paralela ao lado BC e determinar a intersecção com os lados dessa face; repetir esse processo para os pontos Q e U. Os quadriláteros formados representam as faces do tronco de pirâmide procurado.

Figura 18 – tronco de pirâmide triangular com altura dada



Fonte: autores

Acreditamos que essas atividades podem mudar a prática de alunos e professores e, com certeza, passarão a olhar para uma pirâmide de outra maneira.

5. A análise das atividades à luz do referencial teórico

As **atividades 1 a 3** solicitam conversões de uma representação figural, para um discurso da língua natural e desta para uma representação algébrica, que articulam as apreensões perceptiva e discursiva, e provocam a entrada da álgebra, em seu papel fundamental para a construção de modelos algébricos para as situações apresentadas, pois as expressões algébricas construídas são identificadas como fórmulas ou modelos, que dependem de construções algébricas e geométricas. De acordo com Duval (2021b), essas atividades desenvolvem a visualização na medida em que temos que ver além do que enxergamos, isto é, a princípio olhamos um cubo, mas, passamos a ver quadrados, arestas e pontos nessas arestas, por desconstrução dimensional comandada pela apreensão operatória.

Essas atividades estão apresentadas em três itens, no item (a) é solicitada uma construção por truncatura que, de forma geral, foca na construção de uma figura e conduz o aluno a buscar, no software, a maneira de construí-la com a mobilização das apreensões perceptiva e discursiva, que também atuam para construir as relações que atendem o enunciado. Essas relações provocam a apreensão operatória, do tipo mereológica, para identificar e construir pontos específicos (pontos médios e vértices) que são obtidos por uma desconstrução

dimensional do tipo 0D/1D, a seguir, por apreensão discursiva, organizar esses pontos três a três e por apreensão operatória fazer os cortes por um plano. Cada corte efetuado é provocado por uma relação entre pontos para escolher os três que determinam o plano de corte, que provocam uma desconstrução dimensional do tipo 2D/3D porque o corte provoca o olhar para uma região triangular. Nas três atividades os alunos constroem os cortes solicitados e, como o software não faz efetivamente esses cortes, abrem a janela de álgebra para esconder a figura inicial. Uma expansão do discurso ocorre quando constatam, pela construção, que essas regiões constituem as faces de uma nova figura tridimensional e a movimentação da figura os levam a caracterizar cada um deles.

No que tange ao processo de modelização algébrica, na **primeira etapa** o sistema a ser modelizado, construir a fórmula para o cálculo do volume de um sólido desconhecido, pode provocar questões dos alunos a respeito da possibilidade da construção solicitada, e o professor, como sabe que a resposta é por cortes, devolve outras questões para que iniciem a tarefa. Na primeira atividade, a variável escolhida para a construção foi a diagonal de cada aresta de um cubo, na segunda o ponto médio de cada aresta de um tetraedro regular, na terceira os pontos médios das arestas de um cubo associados aos seus vértices.

No item (b) é solicitada a relação entre a figura construída com uma fórmula que, para ser determinada, faz os alunos voltarem o olhar para a figura inicial, para relacionar os volumes das figuras iniciais e resultantes, o que ocorre por uma relação entre a apreensão perceptiva e discursiva. Quanto à modelização algébrica, na **primeira etapa**, podem surgir questões a respeito de como fazer as relações entre os volumes, pois desconhecem esse tipo de tarefa e, nesse caso, o professor devolve para os alunos questões que os levem à busca da solução. A determinação da fórmula ocorre, pela apreensão discursiva, comandada pela perceptiva, na procura das relações entre as variáveis volume das pirâmides que foram truncadas das figuras iniciais e das figuras resultantes, por meio de um prisma triangular, que conduzem os alunos a constatarem, em língua natural, de que o prisma está dividido em três pirâmides triangulares de mesmo volume. A relação entre uma pirâmide que foi retirada com a figura resultante é obtida por uma desconstrução dimensional do tipo 3D/3D, pois estamos comparando duas figuras tridimensionais. Essas relações talvez sejam difíceis para os alunos, mas nesse caso o professor intervém para que eles a percebam sem, contudo, fazer a construção por eles. Os alunos entram, então, na **segunda etapa** da modelização. Nas três atividades são possíveis vários caminhos para obter a fórmula inicial e, portanto, o professor tem que acompanhar cada uma delas para auxiliar o aluno, em caso de o caminho escolhido não conduzir à resposta esperada. Nelas os

alunos chegam a uma expressão algébrica que traduz as relações observadas nas figuras, que é identificada como uma fórmula ou modelo e, para ser obtida, mobilizou o raciocínio funcional e a substituição de variáveis de vai além do cálculo algébrico e do volume de sólidos apresentados na escola. Além disso, houve a construção de novos conhecimentos como a trissecção do prisma, de forma intuitiva, o contato com um novo sólido inscrito em um cubo e de uma fórmula que permite calcular a medida de seu volume em função da medida da aresta do cubo. Essa expressão é considerada um modelo inicial para o sistema na modelização.

No item (c) de cada uma dessas atividades é proposto a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume dos sólidos regulares resultantes da construção, em função da medida de suas arestas, é o momento de entrada na **terceira etapa** do processo de modelização que envolve o trabalho manipulativo com o modelo matemático inicialmente construído, para obter um modelo final. Esse trabalho é conduzido pela manipulação e transformação de expressões algébricas quando os alunos desenvolvem um discurso para relacionar as arestas da figura inicial com as arestas das figuras resultantes, e o cálculo algébrico, como tratamentos, tem um efetivo papel na busca da fórmula final.

A **quarta etapa** do processo de modelização fica por conta do professor, para propor novos problemas com o modelo construído para ampliar seus conhecimentos. Pode propor a truncatura de um octaedro regular pelos pontos médios de suas arestas, a truncatura de um cubo em que a aresta foi dividida em três segmentos congruentes, a inversão da técnica utilizada para o cuboctaedro fornecendo para ele uma medida de volume específica, e solicitar a medida da aresta do cubo que o gerou, entre outras.

A **atividade 4** está apresentada em três itens. No **item (a)** solicita a construção de um prisma triangular reto e nele a identificação de duas pirâmides por breves orientações que mobiliza a apreensão sequencial do aluno. Por essa construção os alunos devem concluir, como já visto em atividades anteriores, que o prisma é composto por três pirâmides de mesmo volume. A identificação dos vértices das pirâmides é provocada por uma desconstrução dimensional do tipo 0D/3D e os cortes por planos, para identificar as pirâmides, implicam na organização de três pontos para determinar os planos de corte que resultam de uma desconstrução dimensional do tipo 2D/3D. Quanto ao processo de modelização algébrica, na construção da figura, a primeira etapa já ocorreu nas atividades anteriores, pois os alunos devem solucioná-la sem dúvidas. No **item (b)** é solicitado a construção de uma fórmula para o cálculo da medida do volume de uma pirâmide triangular em função de sua altura, que é desconhecida do aluno e, por isso, na **primeira etapa** da modelização pode provocar questões dos alunos de como

solucionar a tarefa e a necessidade de o professor mediar para que percebam a construção necessária. Essa construção, passa pela mobilização da apreensão discursiva, motivada pela perceptiva, para relacionar um prisma triangular reto com uma pirâmide de base triangular qualquer. A construção da pirâmide, no software, com seu vértice representado por um ponto livre na base superior do prisma, permite sua movimentação para comparar essa pirâmide com as que foram construídas no item anterior, e desenvolver o discurso de que também existem três pirâmides de mesmo volume, independe da posição de seu vértice. Na **segunda etapa** da modelização, o discurso “a medida do volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3}$ da medida do volume do prisma” é convertido para uma expressão algébrica de um modelo inicial $m(V_p) = \frac{1}{3}m(V_p)$. Essa expressão, na **terceira etapa** do processo, conduz à análise das medidas das medidas das áreas dos dois sólidos para ser manipulada por tratamentos algébricos que conduzem à construção do modelo final $m(V_p) = \frac{1}{3} \frac{b \times h}{2} \times H = \frac{b \times h \times H}{6}$, em que b representa a medida de um lado considerado da base, h a altura do triângulo em relação a esse lado e H a altura da pirâmide.

No item (c) que, primeiro, pede a fórmula para calcular a medida do volume de uma pirâmide reta quadrangular conduz o aluno a mobilizar os conhecimentos já adquiridos para construir um cubo e dividi-lo em três pirâmides com vértice comum e de mesmo volume ou dividir a pirâmide reta de base quadrangular em duas pirâmides retas triangulares. No primeiro caso, os alunos devem desenvolver o discurso de que a medida do volume do prisma representa $\frac{1}{3}$ da medida do volume do cubo e no segundo caso que a medida do volume da pirâmide quadrangular é igual a soma das medidas dos volumes das duas pirâmides triangulares.

Já na **segunda etapa** da modelização esses discursos são convertidos para as expressões algébricas, $m(V_p) = \frac{1}{3}a^3$ ou $m(V_{pq}) = 2 \times m(V_{pt})$ como modelos iniciais. A manipulação desses modelos, na **terceira etapa**, é realizado por tratamentos algébricos que conduz, no primeiro caso, ao modelo final $m(V_{pq}) = \frac{l \times h \times H}{3}$ em que l representa a medida dos lados de mesma medida do triângulo da base, h a sua altura e H a altura da pirâmide. Ainda no item (c) é solicitada a fórmula que permite calcular o volume de uma pirâmide reta de base hexagonal. A construção realizada no software pode conduzir os alunos a perceberem que o cubo (Figura 13) é composta por seis pirâmides retas triangulares de bases congruentes e mesma altura e, ao mobilizar conhecimentos anteriores afirmar, por apreensão discursiva, que o volume da pirâmide hexagonal é igual a seis vezes o volume de uma dessas pirâmides triangulares e

escrever o modelo inicial $m(V_{Ph}) = 6 \times m(V_{pt})$, a seguir, por manipulações algébricas obter o modelo final, $m(V_{Ph}) = 6 \times \frac{l^2\sqrt{3}}{4} \times H$.

Na **quarta etapa** da modelização o professor pode pedir, por exemplo, uma fórmula para calcular a medida do volume de um tronco de uma dessas pirâmides, ou para as três, por truncatura por um plano paralelo à base. Pedir essa fórmula para o cálculo do volume de uma pirâmide oblíqua, que conduz à generalização de que para qualquer pirâmide a medida de seu volume é igual a um terço do produto da medida da área da base pela altura da pirâmide, com as demonstrações da trissecção do prisma e do princípio de Cavalieri.

Nas **atividades 5 e 6**, ao constatar que as planificações de superfícies de sólidos geométricos são apenas fornecidas para produzir um modelo físico para olhar para as faces, arestas e vértices, entendemos que podem ser ensinadas. Seu ensino levaria os alunos a perceberem propriedades geométricas e sua utilidade, por exemplo, em embalagens que precisam ser pensadas em termos de capacidade e gasto com material. Assim, propusemos a primeira atividade para a construção da planificação da superfície de uma pirâmide triangular qualquer e a segunda trata do mesmo modelo, mas com uma altura determinada para a pirâmide e para seus troncos. O objetivo é relacionar conhecimentos matemáticos para garantir que o modelo construído, de fato represente um modelo físico de uma pirâmide. Cabe salientar que falamos sempre de “planificação de superfície” porque entendemos que os sólidos geométricos não podem ser planificados, apenas fatiados e o que se planifica, na realidade é apenas a sua superfície.

A **atividade 5** está dividida em sete itens. O item (a) orienta para a construção na janela de visualização 2D, porque o Geogebra 3D permite planificar a superfície de um sólido já construído, o que não permite as discussões que pretendemos. A planificação da superfície de uma pirâmide triangular é composta de quatro superfícies triangulares, uma representa a base e as outras três as faces laterais, cada uma com um lado coincidente com um dos lados do triângulo da base. Assim, na **primeira etapa** da modelização os alunos identificam o sistema a ser modelizado: planificação da superfície de uma pirâmide triangular, mas podem questionar o professor, por não encontrarem respostas que, por sua vez os incentiva a continuarem a atividade. A princípio, foi solicitado que os alunos verifiquem se qualquer configuração com quatro triângulos, nessas condições, pode ser considerada um modelo para uma pirâmide. A construção em si, no software ou em papel, não deve apresentar problemas para os alunos, mas só a construção não ajuda a responder às questões, talvez tenham que construir modelos físicos

para serem observados. Na **segunda etapa** esse modelo físico inicial ajuda a responder as próximas questões, que os encaminham a observar o que é necessário para construir a planificação. Aqui vemos uma função genuína para os modelos físicos. As respostas para os itens seguintes de (b) a (d) por apreensão discursiva em língua natural, orientada pela perceptiva. os fazem entrar na **terceira etapa**, pois estão manipulando o modelo inicial em busca do modelo final. No item (e), associam conhecimentos de geometria com o modelo que estão manipulando, por apreensão discursiva, como o vértice ter que pertencer ao plano da base da pirâmide, que ele está na intersecção das retas suportes das alturas de cada face lateral da pirâmide e que cada aresta da pirâmide é formada pelo encontro de dois lados de faces vizinhas que devem ter mesma medida e que os vértices externos das faces laterais se unem no vértice da pirâmide. No item (f) ocorre a construção da planificação, de acordo com as conclusões estabelecidas nos itens anteriores, que ocorrem com a apreensão operatória do tipo mereológica, comandada pela perceptiva, o que ajuda a desenvolver a visualização. Essa construção tem início com uma superfície triangular e a determinação de um ponto, na sequência traçam retas perpendiculares aos lados do triângulo da base, para compor as três faces laterais da pirâmide, em vez de desconstrução dimensional, está ocorrendo o contrário, partem de representações 0D e 2D para produzirem representações 2D, ou seja, se trata de uma construção geométrica por articulação da apreensão discursiva com a sequencial, ambas em articulação com a apreensão perceptiva. Depois da construção, provavelmente, os alunos podem querer validar a construção e, portanto, ou a farão em papel ou no Geogebra para imprimi-la, como é orientado no item (g) da atividade. A vantagem da construção no Geogebra é que com apenas uma construção os alunos podem ter um modelo para os três tipos de pirâmide identificados no item (c). Depois dessa validação os alunos obtêm o modelo final. Na **quarta etapa** da modelização o professor pode solicitar a construção de planificações de superfícies de pirâmides com outros tipos de bases ou a planificação, por exemplo, de um tetraedro truncado em que sua aresta foi dividida em três partes de mesma medida.

A **atividade 6** está composta de três itens. No **item (a)**, para construir a planificação solicitada os alunos talvez tenham que observar a Figura 15, para fazer as relações necessárias por articulação entre a apreensão discursiva baseada na desconstrução dimensional 1D/3D porque observa a pirâmide para identificar os segmentos que procura. Em termos de modelização a situação está na segunda etapa, porque os alunos já possuem um modelo inicial e na medida em que constroem o triângulo retângulo com as alturas da pirâmide e de uma face entram na **terceira etapa** da mobilização e mobilizam a apreensão operatória para construir o

modelo final. No **item (b)** ao mobilizar a apreensão perceptiva e discursiva podem afirmar que é necessário determinar pontos na planificação para representar o plano de corte para o tronco, e na sequência a apreensão operatória para construir o modelo final. No item (c) a situação está na **quarta etapa** de modelização porque solicita a utilização do modelo construído, no item anterior, para aprofundar seus conhecimentos. Para além, o professor pode criar outras atividades para pedir, por exemplo, que os alunos construam a planificação da superfície de outro tipo de pirâmide com altura determinada ou a planificação de uma pirâmide com capacidade determinada.

6. Considerações Finais

Os constructos teóricos da teoria dos Registros de Representação Semiótica, tratamentos, conversões, apreensões da figura e desconstrução dimensional da forma, além das quatro etapas do processo de modelização algébrica desempenharam um papel importante nas análises das relações entre álgebra, geometria sintética e tecnologia. O olhar teórico para as atividades explicita o papel fundamental das apreensões no desenvolvimento do raciocínio algébrico e geométrico do aluno e como elas agem em suas ações exploratórias, para as conversões de representações de um registro para outros, além dos tratamentos figurais e algébricos. A função da álgebra se explicita na construção de um modelo algébrico e em sua relação com as construções geométricas, e o cálculo algébrico assume uma função. O aprimoramento da visualização ocorre ao serem apreendidas as estruturas dos sistemas que foram modelizados, por conduzirem os alunos a verem o que não estava disponível apenas pelo olhar e permitir a construção de representações semióticas, tanto figurais, quanto algébricas de objetos desconhecidos pelos alunos.

As atividades conduzem os alunos a fazer uma estreita relação entre geometria e álgebra como ampliação do ensino dessas duas áreas no ensino básico. A primeira não trata apenas de memorização e aplicação de fórmulas e a segunda, vai além do cálculo algébrico, ao mobilizar o raciocínio funcional na utilização de parâmetros para produção e exploração de fórmulas, além da mudança de variáveis. Quanto ao processo de modelização algébrica as atividades em contexto matemático permitiram a identificação de um sistema a ser modelizado, a construção de uma fórmula para calcular a medida do volume e a planificação da superfície de sólidos geométricos. A passagem pelas três primeiras etapas desse processo permitiu a construção de um modelo inicial e o modelo final para cada sistema por intermédio de relações entre suas variáveis.

Além disso, entendemos que algumas dessas atividades poderiam ser adaptadas para o ensino Fundamental, porque nenhuma delas solicitam conhecimentos além desse nível de ensino, outras poderiam ser aplicadas no Ensino médio e, ainda, que elas podem esclarecer das habilidades que apenas são descritas na BNCC, porém as relações que todas elas solicitam não se desenvolvem em apenas um momento, pelo contrário devem ser planejadas para todo o ensino básico. Quanto a tecnologia ela se mostrou fundamental como ferramenta de construção e de raciocínio, porque permite que seja feita apenas uma vez e retomada quando necessário, além de permitir que sejam movimentadas para que se apreenda as relações de diversos pontos de vista.

Referências

- ALMEIDA, T. C. S.; SILVA, M. J. F. Estudo do octaedro truncado em um ambiente de geometria dinâmica. XIII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, p.1-12, 2016.
- ALMEIDA, T.C.S.; SILVA, M. J. F. O Cabri 3D como habitat para o estudo dos Sólidos de Arquimedes. *Actas do Ibero Cabri VI*, Lima: Editorial Hozlo S.R.L., p.201-211, 2012.
- ALMOLOUD, S. A.; MORETTI, M.T. Metassíntese de pesquisas apoiadas na teoria dos Registros de Representação Semiótica. *ReBECEM*, Cascavel, PR, v.5, n.3, p.560-630, 2021.
- BOLEA, P. *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares*. Tese (Doutorado). Universidad de Zaragoza, España, 2002.
- BOLEA, P.; BOSCH, M.; GASCÓN, J. The role of algebraization in the study of a mathematical organization. In: *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education – CERME*. Osnabruck, Germany: I. Schwank (Ed.), v.2, p.135-145, 1998.
- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Base Nacional Curricular Comum para Ensino Médio**. Brasília: 2018.
- CHEVALLARD, Y. Le passage de l’arithmetique à l’algebre dans l’enseignement des mathematiques au college. Deuxieme partie, perspectives curriculares: la notion de modelisation. *petit x*, n.19, p.43-72, 1989.
- DUVAL, R. **Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales**. Traducción: Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, Cali, Colombia, 2017.
- DUVAL, R. Las condiciones cognitivas del aprendizaje de la geometría. Desarrollo de la visualización, diferenciaciones de los razonamientos, coordinación de sus funcionamientos. In: **Compreensión y aprendizaje em matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas**. Bogotá: Editorial Universidad Distrital Francisco José de Caldas, 264p., 2016.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mérciles. T. Moretti. **REVEMAT**. Florianópolis, v.7, n.2, p.266-297, 2012a.
- DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. Trad. Mérciles T. Moretti. **REVEMAT**, v.7, n.1, p.118-138, 2012b.
- DUVAL, R. Registros de Representações Semióticas e funcionamento cognitive da compreensão em Matemática. In: Silvia Dias A. Machado (org). **Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica**. Campinas, SP: Papirus, 2003, p.11-34).
- FREITAS, M. V. C.; BITTAR, M. O ensino do volume dos sólidos geométricos em livros didáticos do Ensino Médio sob a ótica da TAD. In: Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática. Bonito, MS: **LADIMA**, p.1-14, 2016.
- GASCÓN, J. Un Nouveau modele de l’algebre elementaire comme alternative à l’«arithmétique généralisée». **PETIT X**, n.37, p.43-63, 1994.

GRAVINA, M. A.; CONTIERO, L. Modelagem como GeoGebra: uma possibilidade para a educação interdisciplinar? **Revista RENOTE**, CINTED-UFRGS, v.9, n.1, p.1-10, 2011.

MISHRA, P.; KOEHLER, M. J. Technological Pedagogical Content Knowledge: a framework for teacher knowledge. **Teachers College Record**, v.108, 2006, p.1017-1054

MUNZON, N., BOSCH, M., GASCÓN, J. El problema didáctico del álgebra elemental: Un análisis macroecológico desde la teoría antropológica de lo didáctico. **REDIMAT**, v.4(2), p.106-131, 2015.

PALLES, C.M. **Um estudo do icosaedro a partir da visualização em geometria dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: 2013.

POSSANI, J. F. **Uma sequência didática para a aprendizagem do volume do icosaedro regular**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, São Paulo, SP, Brasil, 2012.

SANTOS, A. A. dos. **Construção e medida do volume dos poliedros regulares convexos com o Cabri 3D**: uma possível transposição didática. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Faculdade de Ciências e Tecnologia, 2016.

SILVA, M. J. F. A construção de fórmulas: uma articulação entre geometria e álgebra. **Quintaesencia Revista de Educación**, v. 12, p.103-114, 2021.

SILVA, M. J. F. A construção de situações problemas utilizando o Cabri 3D. In: Congreso Iberoamericano de Cabri, Lima, Perú: **Actas del IBEROCABRI VI**, 2012, p.23-37.

SILVA, M. J. F.; ALMOLOUD, S. A. Atividades de Estudo e Investigação para a construção de modelos de pirâmides triangulares. **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa**, v.33, n.1, 2020.

_____. Um Modelo Epistemológico de Referência para o estudo da planificação de superfícies de pirâmides triangulares. **Educação Matemática Pesquisa**, v.20.n.3, p.327-346, 2018.

_____. Estudo de uma organização didática para construção de fórmulas para a medida de volume de sólidos. In: **Actas del VII CIBEM**, p.7658-7665, 2013.

SILVA, M. J. F.; GAITA, C.; ALMOLOUD, S. A. Uma articulación teórica entre competència algebraica, proceso de algebrización e modelización algebraica. **REVEMAT**, v.13, n.1, p.1-30, 2018

SILVA, M. J. F.; GAITA, C.; SALAZAR, J. V. F. A articulação entre geometria e álgebra na construção de fórmulas para o cálculo de medidas de volume. **Revista Educação Matemática em Foco**, v.6, n.1, 2017.

SOUZA, N.S.S.; MORETTI, M. T.; ALMOLOUD, S.A. A aprendizagem de Geometria com foco na desconstrução dimensional das formas. **Educação Matemática Pesquisa**, v.21, n.1, p.322-346, 2019.

VERGNAUD, G. De l'arithmétique à l'algèbre. Ruptures et continuités. **Actes du 1er Colloque en Didactique des Mathématiques**, Réthymnon, avril, 1998.

ZUIN, E. S. L. Da régua e do compasso: as construções geométricas como um saber escolar no Brasil. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação, Belo Horizonte, MG, 2001.

Capítulo 7

O software Scratch como um dispositivo didático no ensino e aprendizagem da Matemática dos Anos Iniciais

Naum de Jesus Serra⁵²

José Messildo Viana Nunes⁵³

Saddo Ag Almouloud⁵⁴

1. Introdução

A utilização das tecnologias digitais na educação é uma realidade que de forma gradual vem fazendo parte das práticas de docentes e pesquisadores que veem na tecnologia um potencial pedagógico capaz de melhorar e auxiliar o ensino escolar. As ferramentas digitais evidenciaram-se nos últimos anos, principalmente pelo desenvolvimento crescente de plataformas educacionais, bem como, pelo surgimento e o uso de aplicativos e *softwares* pautados em metodologias ativas e na gamificação⁵⁵ que incentivam grupos de alunos e professores a usarem tais metodologias, principalmente em países mais desenvolvidos.

No contexto de avanço tecnológico, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) afirma que:

Há que se considerar, ainda, que a cultura digital tem promovido mudanças sociais significativas nas sociedades contemporâneas. Em decorrência do avanço e da multiplicação das tecnologias de informação e comunicação e do crescente acesso a elas pela maior disponibilidade de computadores, telefones celulares, *tablets* e afins, os estudantes estão dinamicamente inseridos nessa cultura, não somente como consumidores (Brasil, 2017, p. 59).

Além disso, o texto enfatiza que a participação ativa dos jovens tem evidenciado cada vez mais um protagonismo na cultura digital que envolve diretamente novas formas de interações tecnológicas. A Organização das Nações Unidas (ONU), ao se pronunciar sobre a temática, descreve que existem esforços de organizações e instituições governamentais para

⁵² Universidade Federal do Pará – Pará – Brasil, nahumserra@gmail.com

⁵³ Universidade Federal do Pará-Brasil, <https://orcid.org/0000-0001-9492-4914> messildo@ufpa.br

⁵⁴ Universidade Federal do Pará-Brasil, <https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>, saddoag@gmail.com

⁵⁵ A gamificação está relacionada a adoção da lógica, as regras e o design de jogos (analógicos e/ou eletrônicos) para tornar o aprendizado mais atrativo, motivador e enriquecedor.

que o ensino seja expandido por intermédio de plataformas tecnológicas. Em 2009, a UNESCO lançou o projeto internacional Padrões de Competência em Tecnologias de Informação e de Comunicação (TIC) para professores. O projeto tinha o objetivo de fornecer diretrizes sobre como melhorar as capacidades dos professores nas práticas de ensino por meio das TIC (UNESCO, 2009). Segundo esse órgão, autoridades e especialistas analisavam a viabilidade da implementação das diretrizes deste projeto adaptadas à realidade brasileira e incentivava o estudo do impacto das TIC na aprendizagem, tanto auxiliando na formulação de políticas públicas como na tomada de decisões relacionadas ao compartilhamento do uso das TIC nas salas de aula (UNESCO, 2010).

Tais assertivas evidenciam que o Brasil tem potencialidade para o desenvolvimento educacional por meio das TIC e, embora o aumento não signifique necessariamente boa qualidade no ensino, pesquisas apontam um crescimento constante da Educação à distância, como bem afirma a Organização das Nações Unidas (ONU), ao destacar que:

No ranking regional das Américas, o Brasil está em décimo lugar, atrás de países como Barbados, Bahamas, Argentina e Chile. O relatório mostra, no entanto, que o Brasil é um dos maiores mercados de telecomunicações da região. A expectativa é que a qualidade e a cobertura dos serviços melhorem “significativamente” nos próximos anos (Organização das Nações Unidas, 2017).

Portanto, traçar metas educacionais à luz das TIC, é um movimento importante e necessário para suprir algumas demandas de um ensino em constante mudança, esse fato é relevante, principalmente em cenários de isolamento social, em que o único meio de acesso é o tecnológico digital. Além disso, o dinamismo e a rapidez com que as informações avançam pelas redes sociais, fomentam ainda mais o crescimento dessas inovações, criando um ciclo que se retroalimenta, fato que não pode ser ignorado por educadores, pois em determinadas situações, quando o ensino não acompanha esses avanços, podem surgir conflitos, falta de interesse e o aumento do déficit escolar.

Vieira, Martins e Gonçalves (2012) também sinalizam a necessidade de um olhar atento ao papel das TIC na Educação, revelando-as como verdadeiros instrumentos de mediação de aprendizagem de professores e de alunos ao longo da vida, ressaltando a importância, não apenas do uso, mas também da apropriação de tais ferramentas para o ensino. Nesses termos, as TIC, em especial as tecnologias digitais, se alinhadas a estratégias pedagógicas eficazes, podem ser capazes de auxiliar o professor na promoção de um ensino de qualidade, possibilitando meios e apontando novas estratégias. Por tanto, as TIC podem ser encaradas como um veículo de propensões metodológicas para aquele docente que lança mão a esses

recursos, buscando, por exemplo, projetos educacionais com o auxílio de *software*, não de forma paliativa, mas por um viés de oportunidades a ser pensado alternativamente na construção de uma formação crítica.

Vale ressaltar que apesar dos indicativos, no Brasil há poucas ações em larga escala para o desenvolvimento do ensino à luz das tecnologias digitais, diferentemente de países desenvolvidos. No contexto brasileiro, gradativamente surgem projetos em contextos tecnológicos, no entanto, ainda estamos longe de nações como Estados Unidos, Inglaterra, Itália, Espanha, Portugal, Países Baixos, Dinamarca e outros que são referências no assunto, e já trazem em sua maioria, disciplinas ligadas à TIC em seus currículos oficiais e, por meio do uso da programação em linguagem de blocos, inserem crianças a partir do ensino fundamental menor no mundo digital, com o intuito de formar futuros programadores, além de contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Computacional (PC) nos estudantes .

Em relação a isso, diversos autores (Papert, 1980, 1986; Resnick, 2007; Wing, 2006; Subramaniam *et al.*, 2022 e outros) descrevem que a programação corrobora para a constituição do Pensamento Computacional (PC). Além disso, para Subramaniam *et al.*, (2022, p. 2031, **tradução nossa**) “o PC está entre as habilidades necessárias para resolver problemas no mundo tecnologicamente avançado e complicado de hoje”, evidenciando que ferramentas de programação e codificações, bem como, ferramentas de atividades robóticas são os métodos mais fáceis de usar para incentivar o PC na educação matemática. Vale lembrar que o pensamento computacional se baseia nos processos, poder e limites da computação, sejam eles executados por um ser humano ou por uma máquina (Wing, 2006).

No entanto, para Wing (2006, p. 33, *traduções nossa*), “O pensamento computacional é uma habilidade fundamental inerente a todos, não apenas aos cientistas da computação”. Para esta autora, o PC requer o pensamento em múltiplos níveis de abstração e utiliza a decomposição ao atacar uma grande tarefa complexa ou projetar um grande sistema complexo. Destaca ainda que tais habilidades são tão importantes quanto a leitura, a escrita e aritmética, de modo que o PC deveria ser adicionado à capacidade analítica de cada criança, pois inclui uma série de ferramentas mentais importantes para a resolução de problemas.

A vista disso, neste texto apresenta-se uma Revisão Integrativa da Literatura (RIL) a respeito da utilização do software *Scratch*⁵⁶ no contexto da educação básica, sobretudo dos anos

⁵⁶ O *Scratch* é um software desenvolvido em 2007 pelo projeto *Lifelong Kinder Garden Group do M.I.T.* (*Massachusetts Institute of Technology*), tendo como seu principal desenvolvedor, Mitchel Resnick, que

iniciais com o intuito de descobrir quais as possibilidades e contribuições esse software proporciona ao ensino e aprendizagem de matemática, bem como, à constituição do PC. A escolha dessa tecnologia digital ocorre pelo fato de o software ser um instrumento educacional que utiliza programação em blocos, possui uma interface intuitiva e permite que crianças, jovens e adultos criem histórias, jogos e animações, sendo a ferramenta de aprendizagem de programação mais difundida do mundo, utilizada em mais de 150 países, traduzida para mais de 70 idiomas e recomendada para crianças a partir de 8 anos de idade.

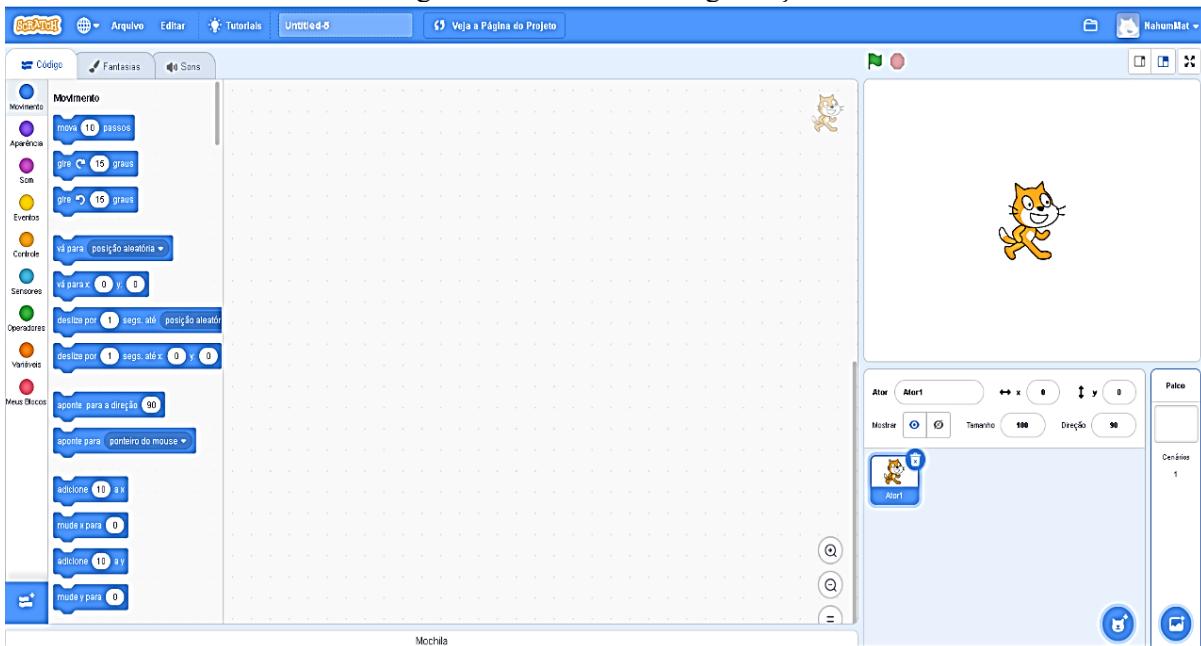
O *Scratch* é gratuito e funciona tanto *online* quanto *offline*, além de ser um software livre e de código aberto, ou seja, o usuário pode alterar a programação adaptando-o a um novo projeto (Serra, 2022). Além disso, estudos, como os de Papert (1980), Resnick (2007), Serra (2022), Castro (2009), evidenciam que o *Scratch* tem potencialidades para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos e para a constituição do PC. Foi desenvolvido em 2007 pelo projeto *Lifelong Kinder Garden Group do M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology)*, tendo como seu principal desenvolvedor, Mitchel Resnick⁵⁷, que influenciado por Seymour Papert⁵⁸ e a teoria Construcionista, queria tornar a linguagem de programação popular e acessível, expandindo o conceito de linguagem em bloco ao ambiente escolar da educação básica (<https://scratch.mit.edu/>). A Figura 01 representa a interface do software em sua última versão “3.0”, desenvolvida no ano de 2019.

influenciado por Seymour Papert⁵⁶ e a teoria Construcionista, tornou a linguagem de programação popular e acessível, expandindo o conceito de linguagem em bloco ao ambiente escolar da educação básica (Serra, 2024).

⁵⁷ Professor e pesquisador do grupo *Lifelong Kindergarten* no Laboratório de produção de mídias do Instituto de Tecnologia de Massachusetts (MIT) Disponível em < Acesso em: <https://scratch.mit.edu> > Acesse em: 20 maio 2021

⁵⁸ Fundador do aprendizado Construcionista, foi um grande visionário da tecnologia educacional, membro e fundador do corpo docente do *MIT Media Lab*. Disponível em <<https://news.mit.edu/2016/seymour-papert-pioneer-of-constructionist-learning-dies-0801>>.Acesso em: 20 maio 2021.

Figura 1: Ambiente de Programação



Fonte: Os autores.

Vale destacar que optamos pela busca de mais estudos sobre o *software* por meio da Revisão Integrativa da Literatura (RIL), por esse tipo de investigação construímos uma análise ampla da literatura, além de contribuir para discussões sobre métodos e resultados de pesquisas e reflexões sobre a realização de futuros estudos. Para Menezes et al., (2008), a RIL é um método de pesquisa que busca obter um profundo entendimento de um determinado fenômeno baseando-se em estudos anteriores, seguindo padrões de rigor metodológico, clareza na apresentação dos resultados, de forma que o leitor consiga identificar as características reais dos estudos incluídos na revisão. Para esses autores, a RIL, assim como, a revisão sistemática, se distingue de outras, na formulação da questão de investigação, no estabelecimento de estratégias de diagnóstico crítico e na exigência na transparência para estabelecimento de critérios para inclusão e exclusão dos estudos.

2. Estratégias de Busca

Para a realização de uma busca com rigor metodológico, utilizamos o protocolo de estratégia POT (População, *Outcome*, Tipo de pesquisa), para sumarizar e analisar estudos já realizados sobre o tema em questão.

P – População: Teses, Dissertações e Artigos em plataformas nacionais e estrangeiras.

O - Out come (desfecho): Fazer o levantamento e a análise da importância do *software Scratch* nos anos iniciais de escolarização que concerne o ensino e a aprendizagem da

matemática (especialmente em relação à geometria), à formação inicial e/ou continuada de professores nesse nível de ensino.

T - Tipo de pesquisa: Pesquisas que abordam a utilização do *Scratch*: 1) No ensino e na aprendizagem da matemática e na constituição do Pensamento Computacional (PC); 2) Na formação inicial e/ou continuada de professores; 3) Em pesquisas sobre mapeamento de projetos que tratam dessas temáticas na educação básica, nas plataformas: CAPES, ERIC, PROFMAT, BDTD, *DART EUROPE*, FUNDAÇÃO DIALNET, Focus Université Paris-saclay, Theses.fr, Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal (RCAAP).

Alinhada à estratégia POT, nossa revisão integrativa foi subsidiada pelo protocolo **PRISMA**, possibilitando mais confiabilidade e robustez à pesquisa, em conformidade com as diretrizes do *Preferred Reporting Items* (Page et al., 2021). O modelo traz importantes recomendações, bem como, instruções para a construção do ‘fluxograma PRISMA’ que pode ser adaptado a vários tipos de pesquisa, pois contém informações importantes a serem relatados em uma revisão da literatura.

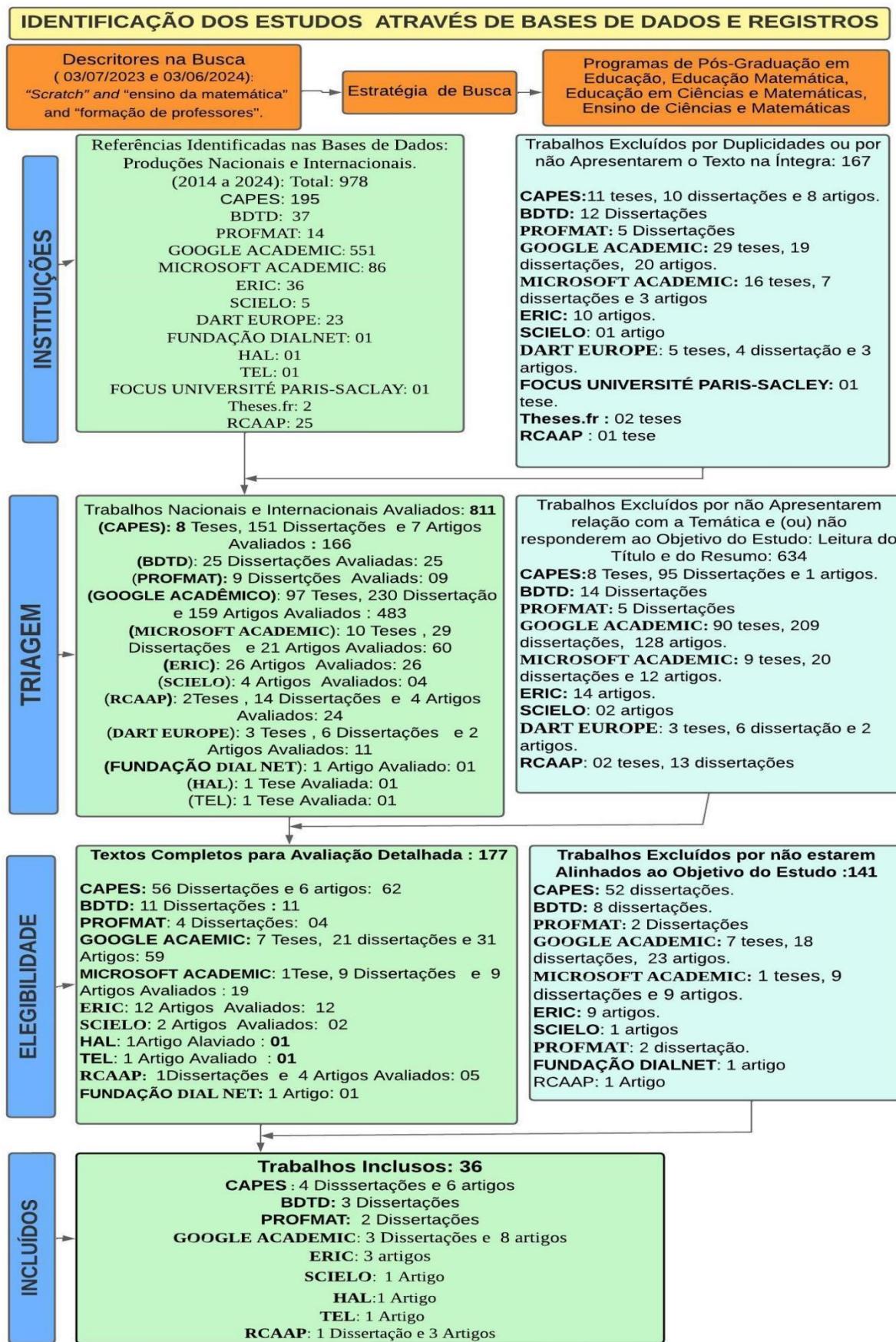
Nesta pesquisa, utilizamos a forma adaptada do modelo ‘Prisma 2009’, delimitando a quantidade de trabalhos que finalmente foi incluído em nossa amostra, destacando, por intermédio dessa metodologia: o número de trabalhos encontrados; o número de trabalhos excluídos antes do rastreio (por ser duplicado ou removido com aplicação dos filtros); o número de trabalhos rastreados (leitura do título ou título e resumo); o número de trabalhos excluídos no rastreio; o número de trabalhos para leitura do texto completo; o número de trabalhos excluídos na leitura do texto completo e, finalmente, o número de trabalhos incluídos na amostra.

Dito isso, para iniciar nossa pesquisa e termos acesso às produções nacionais, as buscas foram realizadas principalmente nos bancos de teses e dissertações da CAPES, PROFMAT, BDTD. Para as produções estrangeiras, foram acessados o banco americano de Teses ERIC, os bancos de teses espanhóis, por meio das plataformas *DART EUROPE* e FUNDAÇÃO DIALNET, nas plataformas francesas, por meio dos repositórios HAL, TEL, Focus université paris-saclay e theses.fr, além da plataforma portuguesa “Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal (RCAAP). As pesquisas foram realizadas também nas plataformas Google Acadêmico e *Microsoft Academyc*, nestas últimas, apareceram tanto produções nacionais quanto estrangeiras. Nas consultas, foram considerados trabalhos publicados no período de 2014 a 2024, nos dias 03/07/2023 e 03/06/24, utilizando os descritores “*Scratch*” and “ensino

da matemática” and “formação de Professores”, para as bases nacionais e, “Scratch” and “teaching mathematics” and “teacher training” para as bases estrangeiras.

A escolha por esse período, decorreu da possibilidade de obtermos informações amplas e mais recentes sobre a utilização dessa tecnologia digital. Nesse sentido, a pesquisa realizada na CAPES revelou 195 resultados referente a temática pesquisada. As buscas na BD TD, evidenciou 37 resultados que tinham aproximação com o tema em questão. O *Google Acadêmico* revelou 551 resultados. No banco de dados do PROFMAT, foram encontrados 25 trabalhos. Na plataforma *Microsoft Academyc*, foram encontrados 86 resultados. As buscas realizadas na plataforma *ERIC* forneceram 36 resultados. No banco de Teses da Espanha, por meio da plataforma *DART EUROPE*, obtivemos 23 resultados. No repositório FUNDAÇÃO DIALNET, foi possível encontrar apenas 01 resultado. No banco de tese francês ‘HAL’, encontrou-se 01 resultado. Na plataforma TEL, também obtivemos 01 resultado. Nos bancos de Teses da *Focus université paris-saclay*, 01 resultado e em *theses.fr* foram encontrados 02 trabalhos. No Repositório Científico de Acesso Aberto de Portugal (RCAAP), encontramos 25 documentos. Diante desse contexto, o modelo PRISMA representado na Figura 02, resume etapas de buscas descritas.

Figura 2: Protocolo Prisma



Conforme evidencia o protocolo PRISMA, obtivemos um total de 978 trabalhos. Com aplicação do primeiro filtro, foram eliminadas 167 pesquisas, por duplicação ou por não apresentarem o texto na íntegra. A partir de então, os 811 trabalhos restantes foram avaliados mediante a leitura do título e do resumo, sendo excluídos no rastreio, 634, pois corresponderam a pesquisas que não tinham relação com a temática, restando desse modo, 177 trabalhos para leitura completa do texto. Deste último quantitativo, foram excluídas 141 pesquisas, por não apresentarem um alinhamento aos objetivos de nosso inquérito investigativo, restando finalmente **36** trabalhos inclusos. A seguir abordamos a metodologia de nossa pesquisa, dando enfoque à Análise Documental de Bardin (2016).

3. Pressuposto Teórico e Metodológico

Para uma análise das pesquisas, objetos de estudo desse artigo, nos fundamentamos num “conjunto de técnicas de análises das comunicações que utiliza procedimentos sistemáticos e objetivos de descrição do conteúdo das mensagens” (Bardin, 2016, p. 44). Esse aporte teórico-metodológico envolve três fases: Pré-análise, Análise ou Exploração do Material e Tratamento dos resultados obtidos na interpretação. Para a execução dessas fases, o pesquisador deve realizar uma leitura flutuante, que consiste no primeiro contato com os documentos a serem analisados, na qual ele se deixa invadir por impressões e orientações que posteriormente se tornarão mais precisas.

4. Fases discutidas e analisadas na RIL segundo Bardin (2016)

4.1. Pré-Análise

A partir do que foi exposto no protocolo PRISMA, a pré-análise foi desenvolvida mediante uma breve leitura. Essa leitura flutuante realizada nos títulos, resumos, metodologias e nos resultados dos materiais catalogados nos possibilitou uma organização inicial, fornecendo uma síntese dos trabalhos selecionados. Nesta fase confirmamos uma predominância maior de artigos (23) em relação às dissertações (13). A pré-análise possibilitou também organizar as 36 pesquisas em 03 categorias. Segundo Bardin (2016, p 121) “Desde a pré-análise devem ser determinadas operações de recorte do texto em unidades comparáveis de *categorização* para análise temática e de modalidade de codificação para o registro dos dados”. Nesse contexto, a partir das leituras dos artigos e dissertações, emergiram as categorias:

CAT 01: Trabalhos que envolvem a formação inicial ou continuada de professores com a utilização da ferramenta digital *Scratch* no ensino fundamental I.

CAT 02: Trabalhos que envolvem o ensino e aprendizagem da matemática e do Pensamento Computacional (PC) com a utilização da programação *Scratch* no ensino fundamental I.

CAT 03: Trabalhos que envolvem o Mapeamento de Pesquisas que utilizam o software *Scratch* no ensino e na aprendizagem da educação básica, sobretudo nos anos iniciais.

O Quadro 1 evidencia os trabalhos (T1, T2, T3, ..., T36) organizados em blocos de acordo com suas categorias, mostrando os tipos de pesquisa e as sínteses de cada bloco.

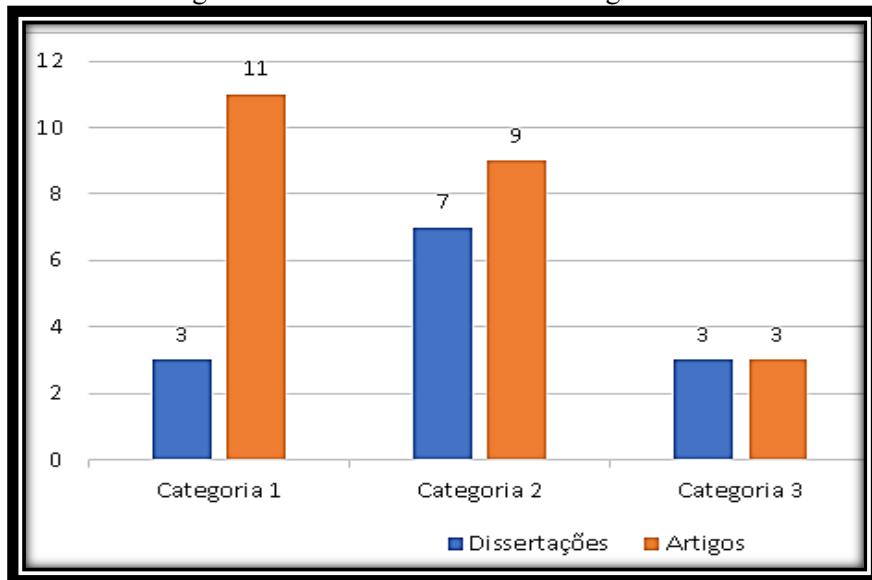
Quadro 1: Síntese dos Trabalhos Categorizados

CATEGORIAS	DISSERTAÇÕES	ARTIGOS	SÍNTESES
CAT 01 Formação Inicial/Continuada de professores.	T1 -Silva (2021) T2 -Rocha (2018) T3 -Gonçalves (2024)	T4 -Silva et al. (2022) T5 -Zarzuelo <i>et al.</i> (2020) T6 -Cyröt (2022) T7 -Klaus et al. (2021) T8 -Monjelat (2019) T9 -Candiani <i>et al.</i> (2022) T10 -Leitão e Castro (2018) T11 -Elias et al., (2018) T12 -Pauli e Rosalen (2020) T13 -Silva et al. (2019) T14 -Santos e Correia (2018)	Trazem reflexões acerca da utilização do Scratch como ferramenta para a construção do Pensamento Computacional (PC) e o aprendizado da matemática para os professores dos anos iniciais do ensino fundamental, além da construção e reflexão teórica e conceitual e metodológica da matemática. Sendo, portanto, instrumento com possibilidades de potencializar os conhecimentos e as praxeologias dos profissionais envolvidos na formação, caso seja associado a boas propostas pedagógicas.
CAT 02 Scratch no Ensino de Matemática e o PC nos anos iniciais.	T15 -Tojeiro (2019) T16 -Mazzaro (2023) T17 -Castro (2017) T18 -Zoppo (2017) T19 -Meireles (2017) T20 -Guerra (2016) T21 -Brandt (2019)	T22 -Kaminski e Boscarioli (2018) T23 -Meneses <i>et al.</i> (2021) T24 -Vieira e Sabatini (2021) T25 -Calder e Rhodes (2021) T26 -Rocha e Junior (2020) T27 -Calder (2018) T28 -Almeida <i>et al.</i> (2017) T29 -Ramalho e Ventura (2017) T30 -Momcilovic (2020)	Tratam de estudos sobre o <i>Scratch</i> no aprendizado de conceitos disciplinares, principalmente conceitos matemáticos, na criação de OA para o aprendizado de crianças, descrevendo o software como uma ferramenta com possibilidades de auxiliar os alunos em uma aprendizagem colaborativa e motivadora, sendo capaz de propiciar habilidades ligadas ao pensamento crítico, a resolução de problemas e ao PC.
CAT 03 Scratch Mapeamento	T31 -Firão (2022) T32 -Silva (2020) T33 -Santos (2014)	T34 -Vasconcelos <i>et al.</i> (2021) T35 -Andrade V.H e Andrade F.I (2023) T36 -Gaydeczka e Massa (2020)	Trazem reflexões sobre o uso do Scratch no ensino e na formação Inicial ou continuada de professores da educação básica, sobretudo, dos anos iniciais do ensino fundamental, evidenciando de modo geral que o Scratch, caso seja planejado e desenvolvido em um tempo adequado, é capaz de propiciar uma boa formação docente, a construção do PC e o aprendizado de conceitos disciplinares.

Fonte: Elaborado pelos autores

Mediante a releitura do Quadro 1, representamos na Figura 3 contendo o quantitativo de Artigos e dissertações incluídos em cada categoria.

Figura 3: Gráfico dos Trabalhos Categorizados



Fonte: Elaborado pelos autores

Nesse âmbito, observamos que dos 36 trabalhos inclusos na pesquisa, a maioria corresponde a artigos, com um total de 23 trabalhos, o que equivale a um percentual de 63,88% aproximadamente, seguido por 13 dissertações representando um percentual aproximado de 36,12%.

A categoria 01, constitui-se de 14 trabalhos, o que representa um percentual aproximado de 38,88% do total de trabalhos inclusos, sendo 3 dissertações (8,33%) e 11 artigos (30,55%). De maneira geral, a CAT 01, descreve que o *Scratch* é uma ferramenta com capacidades para o ensino, podendo corroborar no aprendizado de objetos matemáticos, além de ajudar na construção do pensamento computacional (PC) dos docentes (ou futuros docentes) que ensinam nos anos iniciais, promovendo motivação e novas possibilidades pedagógicas.

Na categoria 2, os 16 trabalhos representam um percentual aproximado de 44,44% do total de trabalhos inclusos, com 7 dissertações (19,44%) e 9 artigos (25%). A CAT 02 descreve em linhas gerais, sobre o papel do *Scratch* no aprendizado de conceitos matemáticos e da potencialidade que este tem na construção do pensamento crítico ajudando os alunos na construção de habilidades voltadas ao PC.

Já a categoria 03, os 6 trabalhos correspondem a aproximadamente 16,68% do total, sendo 3 dissertações (8,34%) e 3 artigos (8,34%). A CAT 03, que trata de mapeamento de projetos que fazem o uso do *Scratch*, descreve por via de regras, as possíveis vantagens que o

software propicia no estudo de conceitos disciplinares e do PC, tanto de docentes (ou futuros docentes) quanto de alunos, desde que tais projetos sejam aliados a boas propostas de ensino.

Como visto, a pré-análise correspondeu à etapa de escolha dos documentos e organização do material que constitui o corpus de análise da pesquisa, sendo, portanto, um estágio importante para o aprofundamento do estudo que ocorreu a partir da fase subsequente.

4.2. A Exploração do Material

Nesta fase, codificamos os dados da pesquisa, a fim de identificarmos as **Unidades de Registro (UR)**. Segundo Bardin (2016, p.136) “A unidade de registro – É a unidade de significação codificada e corresponde ao segmento de conteúdo considerado unidade de base, visando a categorização e a contagem frequencial.” Em nosso trabalho adotamos como unidade de registro, o ‘tema’, que por sua vez, corresponde a uma afirmação a respeito de um assunto, uma frase, uma frase composta ou um resumo que pode carregar um conjunto de informações singulares (Bardin, 2016). (...) “o tema é uma significação que liberta naturalmente de um texto analisado segundo certos critérios relativos à teoria que serve de guia à leitura. O texto pode ser recortado em ideias constituintes, em enunciados e em proposições portadores de significados isoláveis.” (Bardin, 2016, p.136).

Agrupamos os temas iniciais (UR) em três Quadros (Quadro 03, Quadro 04 e Quadro 05), e os descrevemos como contribuições e desafios. Esses agrupamentos foram realizados a partir do teor dos trabalhos, com objetivo de identificar aspectos/dimensões que nos remetessem às possibilidades didáticas e pedagógicas da relação prática ou possibilidades docentes e o uso do Scratch, tanto em formação inicial/continuada quanto o uso do *software* em contexto de ensino em sala de aula. A sistematização no entorno das UR viabilizou o surgimento de três **eixos temáticos (ET)**, conforme indica o Quadro 02.

Quadro 2: Eixos Temáticos extraídos a partir das UR

Eixos Temáticos	
ET01	Potencialidades e desafios em relação a metodologia e ao tempo para execução de atividades ou projetos com o Scratch
ET02	Potencialidades e Dificuldades computacionais na utilização do <i>Scratch</i>
ET03	Desafios na utilização e divulgação do Scratch como instrumento de ensino e de aprendizagem da matemática ou de constituição do PC

Fonte: Elaborado pelos autores

Tais eixos, facilitaram a discussão dos trabalhos catalogados em blocos.

A seguir o Quadro 03 evidencia as **Unidades de Registro (UR)** representadas a partir dos trabalhos da **CAT 01: Trabalhos que envolvem a formação inicial ou continuada de professores com a utilização da ferramenta digital Scratch no ensino fundamental I.**

Quadro 3: Unidades de Registros da Categoria 1

Trabalho	Unidades de Registro (UR)	
	Contribuições	Desafios
T1	O <i>Scratch</i> permite a criação de projetos que auxiliam no aprendizado e no desenvolvimento de habilidades matemáticas e computacionais, enriquecendo o pensamento criativo de professores em formação.	Desenvolver e divulgar projetos pedagógico envolvendo conceitos e procedimentos estatísticos com o <i>Scratch</i> . Precariedade de material didático disponibilizado para este fim.
T2	Professores e demais profissionais da educação podem utilizar o software para programar objetos de aprendizagem que ofereçam possibilidades de abordagens construtivistas e que estejam sintonizados com características ergonômicas.	Formação dos professores para a utilização da TD <i>Scratch</i>
T3	E-books interativos podem contribuir para a autoformação, o repositório de OA do <i>Scratch</i> é uma possibilidade de uso de uma TD no ensino de Matemática nos Anos Iniciais e no desenvolvimento das habilidades e Unidades Temáticas da BNCC.	Estratégias metodológicas para o uso do <i>Scratch</i> em planejamentos e práticas didáticas. Infraestrutura nos espaços escolares e manutenção de equipamentos.
T4	Possibilidades do uso do <i>Scratch</i> para abordar conteúdos matemáticos. O uso do software pode proporcionar a formalização de aulas interativas e lúdicas, que facilitem o ensino e a aprendizagem por meio da criação de jogos	Formação de professores para facilitar o acompanhamento das atividades com a utilização do <i>Scratch</i> .
T5	Pensamento lógico matemático, bem como, motivação, criatividade, dada a ampla gama de possibilidades oferecidas pelo <i>software</i> , permitindo uma avaliação objetiva das competências adquiridas pelos alunos	Necessidade de reflexão sobre o tipo de atividades que se planejam com o <i>Scratch</i> , sendo importante ponderar, em cada caso, aquela que melhor se adequa ao objetivo específico a ser alcançado.
T6	A codificação baseada em blocos é relativamente fácil. o <i>Scratch</i> permite que professores em formação e alunos desenvolvam habilidades afetivas, melhorarem habilidades de programação e a aprendizagem de conceitos matemáticos mediante a resolução de problemas.	Planejamento e prazo suficientes e necessários à execução de projetos nesse campo que possibilite melhor observar os benefícios no ensino e aprendizagem.
T7	O <i>Scratch</i> associado a uma rede colaborativa de tecnologia tem potencialidades de promover formação e autoformação docente, tanto para alunos ditos normais, como para alunos surdos.	Gerar e difundir mais redes tecnológicas de colaboração objetivando o incentivo à formação de professores.
T8	O <i>Scratch</i> possibilita desenvolver práticas computacionais no âmbito de uma formação docente significativa, complexa e situada. Possibilita usar estratégias didáticas inovadoras adequadas para trabalhar com professores do ensino fundamental.	Gerar e identificação das práticas adquiridas pelos participantes para alcançar maior autonomia, aspectos que devem ser incorporados em formações futuras.
T9	O <i>Scratch</i> pode contribuir com bons projetos didáticos na formação de professores com aproveitamento satisfatório dos conteúdos relacionados.	Fazer adequações, visando a facilitar a elaboração dos projetos.
T10	Scratch pode ser utilizado como instrumento de formação com possibilidade de ampliação para além seu uso em sala de aula, podendo ser utilizado como ferramenta para a produção de recursos digitais,	Superar a escassez de atividades pedagógicas de formação voltadas para o uso de tecnologias na educação no

	trazendo mais autonomia e empoderamento docente, e a construção e reflexão conceitual, teórica e metodológica.	meio acadêmico, pois estes ainda são restritos a poucos ambientes.
T11	O Scratch permite a elaboração de AO e possibilita a capacitação docente em qualquer componente curricular ou nível de ensino.	Promover e divulgar a utilização das TD nos cursos de licenciaturas de forma significativa.
T12	O Software pode ser motivador e interativo.	Rever o uso de equipamentos tecnológicos para alunos dos primeiros anos da educação básica para que o efeito não seja contrário ao desejado, especialmente quanto ao desenvolvimento do pensamento criativo.
T13	O Scratch pode proporcionar formações docentes com a criação de jogos para abordar conteúdos matemáticos. As construções são modificadas ou adaptadas através da evolução das interações	Formação docente no âmbito da tecnologia. Metodologia adequada para o aprendizado e melhoramento das atividades que exigem comandos mais complexos.
T14	O Scratch pode contribuir para a formação inicial e no desenvolvimento profissional de professores.	Superar dificuldades em relação ao uso do software que pode ser difícil, complexo ou até confuso para crianças, caso não possuam conhecimentos de lógica suficientes ou não estarem familiarizadas com o computador.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Em consonância com o Quadro 2 e com base nas significações das confluências e divergências das Unidades de Registro, no primeiro eixo temático ET01: **Potencialidades e desafios em relação a metodologia e ao tempo para execução de atividades ou projetos com o Scratch**, delineado nas UR dos trabalhos **T2, T3, T4, T6 e T12**, foi discutido a importância da formação de professores para o uso dessa tecnologia digital no campo educacional. Esses trabalhos delineiam de modo geral que o software pode apresentar potencialidades pedagógicas, permitindo uma boa interatividade e uma interface gráfica atraente para as crianças, além de uma relativa facilidade de manuseio. No (**T2**) constatou-se que os projetos desenvolvidos pelos professores em formação com a utilização do *Scratch*, de certo modo, atenderam em grande parte aos critérios impostos, como dinamismo e interatividade, mostrando a viabilidade de se programar de forma dinâmica com este *software*.

No **T3** descreve-se que os participantes dessa pesquisa relataram que as seguintes características, interação, atratividade, entre outras, os motivaram a utilizarem a coletânea de Objeto de Aprendizagem (OA) a autoformação. Além disso, destaca-se que os conteúdos (Geometria, Grandezas e Medidas, Probabilidade e outros) relacionavam os OA com as práticas educacionais, como os planos de aulas ou as explicações sobre cada objeto. **T6 evidenciou que** o software ajuda no desenvolvimento de habilidades de pensamento de ordem superior, oferecendo às crianças a oportunidade de aprender conceitos de matemática e de ciências.

Afirma ainda que os professores da pré-escola e os professores de formação inicial desempenham um papel fundamental ao ajudar os alunos a desenvolverem essas habilidades com o uso do *software*.

Os trabalhos desta unidade temática convergem com ideias de que há necessidade de se promover a integração entre as disciplinas para que o ensino da Matemática possa ser mais contextualizado e interdisciplinar, mas para isso, observam a relevância de se avaliar o efeito do *Scratch* na aprendizagem de conceitos matemáticos, como por exemplo, números inteiros, plano cartesiano, funções, gráficos, situações-problema e lógica matemática em (**T4**). Essa unidade temática evidencia que não basta apenas saber usar o computador, ou mesmo uma determinada linguagem de programação, para que os objetivos sejam atingidos é necessário um planejamento e um tempo adequado. **T2**, por exemplo, descreve que a simulação não foi observada em todos os projetos, o trabalho descreve que para simulações com essa ferramenta tecnológica são necessárias programações mais longas, o que por sua vez requer mais tempo e estratégias para abstrair conhecimentos mais complexos a respeito da programação de jogos no *Scratch*.

Em **T6** é relatado que os participantes em formação tiveram dificuldade em usar blocos de controle e sincronizar seus projetos nas primeiras semanas. No entanto, nas semanas seguintes, eles conseguiram usar blocos de controle e não tiveram problemas com a sincronização, evidenciando que o tempo e o planejamento são importantes e possibilitam a formação docente mediante o aprendizado de conceitos disciplinares, sobretudo, em matemática (mas não esclarece quais objetos) e ciências. Entretanto, em **T12**, foi avaliado que a formação proposta não teve êxito, pois não houve uma formação específica para a utilização da lógica de programação *Scratch* e não teve uma relação da proposta de aprendizagem a nenhum conhecimento a ser desenvolvido em sala de aula. O planejamento foi realizado exclusivamente pela Professora proponente e não o relacionou ou agregou às necessidades formativas, tanto das docentes em formação quanto dos alunos e alunas em sala de aula. **T12** destaca a importância de uma formação integrada a um bom planejamento, para que não ocorra um efeito contrário ao esperado.

O segundo eixo temático, **ET02- Potencialidades e Dificuldades computacionais na utilização do Scratch**, retirados a partir das UR de **T5, T8, T9, T10, T13 e T14** consideram que o uso do *Scratch* como abordagem metodológica, é capaz de dinamizar o ensino e potencializar o processo de aprendizagem da matemática. De modo geral, neste agrupamento, os autores concordam que o *Scratch* pode ser inserido no contexto de sala de aula, uma vez que

a ferramenta é de fácil acesso e manuseio e por se tratar de uma linguagem em blocos criada especialmente para crianças a partir de 8 anos de idade.

Em **T5**, por exemplo, foi constatado que as atividades com o *Scratch* podem dinamizar o ensino de Matemática, possibilitando a aprendizagem da geometria. Enfatizou-se que o desempenho em matemática e a satisfação dos docentes em formação que fizeram parte do grupo experimental e utilizaram a metodologia com *Scratch*, foi muito melhor que o grupo de controle, concluindo que a metodologia com *Scratch* favorece o desenvolvimento de competências geométricas nos futuros professores do ensino fundamental. Em **T10** emergiram discussões mostrando que as formações docentes proporcionaram mudanças de posturas pedagógicas por parte dos participantes, pois nos trabalhos propostos com os conteúdos de álgebra, medidas antropométricas, gráficos e situação de multiplicação, foram observados envolvimento, entusiasmo, troca de experiências entre os participantes do grupo e boas expectativas relacionadas ao uso pedagógico do *Scratch* como recurso no ensino da matemática.

Porém, alguns desafios e restrições em relação à utilização do *Scratch* para a formação de professores foram identificados. Em **T13**, por exemplo, descreve-se a necessidade de investimento em formação inicial e continuada de professores para o uso de tecnologias no ensino, dando ênfase a abordagens em programações em bloco, pois mesmo que o software tenha uma linguagem acessível, carece de formação quando se trata de projetos mais extensos, havendo também a necessidade de planejamento e tempo para a execução das oficinas em contexto educativo em que as práticas de ensino e aprendizagem são desenvolvidas.

Em **T14**, os autores avaliam que o *Software* apresenta vantagens para a formação de professores, mas chamam a atenção que este pode apresentar também dificuldades, a depender da complexidade do projeto em desenvolvimento, tornando-se um obstáculo didático na aprendizagem de crianças. Além disso, evidenciam a necessidade de maior tempo para a aprendizagem de *scripts* mais complexos no desenvolvimento de alguns trabalhos. Na mesma direção, os autores do trabalho **T10** mostram que os resultados obtidos nas experiências foram positivos, mas destacaram que alguns professores em formação tiveram dificuldades quanto ao uso da tecnologia e outros afirmam que o *Scratch* poderia ser difícil para o aprendizado de crianças. Afirmam que tais dificuldades podem ser atribuídas em parte, pela falta de habilidades com as TD e carência de ambientes de aprendizagem associada a uma pedagogia voltada a essas tecnologias nos espaços formais de ensino.

O terceiro eixo temático, **ET-03- Desafios na utilização e divulgação do Scratch como instrumento de ensino e de aprendizagem da matemática ou de constituição do PC**, foi formado a partir das unidades de registros (UR) de **T1, T7 e T11**. Nos trabalhos desse grupo, afirma-se que o *Scratch* pode ser um instrumento capaz de potencializar os conhecimentos e as práticas de professores envolvidos em uma formação. Os autores afirmam ainda que o uso da ferramenta digital como abordagem metodológica, pode motivar o ensino e a aprendizagem da matemática. Em **T11**, assevera-se que o *software Scratch* pode ser utilizado para capacitar professores em formação em qualquer componente curricular ou nível de ensino. Afirma-se ainda que, apesar do *Scratch* ter sido uma ferramenta nova para a maioria dos participantes do curso, eles aprenderam a utilizá-la no desenvolvimento de OA de acordo com suas necessidades.

T11 destaca que, apesar do *Scratch* ser uma ferramenta bastante divulgada nos meios de comunicação digital, grande parte dos participantes tiveram o primeiro contato com a ferramenta no próprio curso de formação docente, portanto, os cursos de licenciaturas precisam promover o uso das Tecnologias Digitais (TD) de forma significativa, de maneira que esta utilização faça sentido aos futuros profissionais da educação, pois ainda há falta de conhecimento e manuseio de tecnologias em sala de aula. Em **T7** foi enfatizado a importância de se investir na formação docente para o uso de tecnologias educacionais no ensino da matemática (mas não esclarece quais objetos), já que tal ação pode corroborar para a aprendizagem das habilidades que o aluno precisa para a educação do século XXI. Menciona também que o *Scratch* é uma opção que tem potencial para a prática de sala de aula dando destaque para o aprendizado de conceitos disciplinares.

Em **T1** foi evidenciado que apesar da maioria dos discentes participantes da formação (98%) não conhecer o *Scratch*, motivaram-se em realizar as atividades e 60% dos participantes tiveram desempenho considerado ‘Muito Bom’ e ‘Bom’, tendo em vista as categorias utilizadas na formação. Suas análises evidenciaram que o produto educacional com auxílio do *scratch* intitulado ‘Guia rápido de introdução ao Scratch para discentes de Pedagogia’, poderá ser de grande contribuição para alunos dos anos iniciais, mas chama a atenção para a necessidade de mais formação docente em contexto de tecnologias digitais (TD) voltadas a conceitos de estatística.

Os autores de **T7** chamam a atenção para a exploração do aspecto visual sob a instrumentalização de softwares como o *Scratch*, para ensino de surdos, utilizando estratégias que possibilitem um ensino mais inclusivo. Para esses autores, existe a necessidade de promover e incentivar redes tecnológicas para formação e autoformação docente, tanto para

professores que trabalham com alunos ditos normais, quanto para alunos com dificuldades auditivas. Embora os autores de T11 e T7 não discutam abertamente as causas das dificuldades de maior divulgação e aplicação do software em contexto escolar, deixam pistas de que parte da problemática pode estar relacionada à falta de investimentos e incentivos institucionais aliada a dificuldades do docente em promover sua autoformação. Para os autores de T1, essa dificuldade pode estar associada à falta de formação e de divulgação para o desenvolvimento pedagógico de conceitos e procedimentos disciplinares, principalmente os estatísticos. Além disso, a precariedade ou a falta de laboratórios e de materiais didáticos disponibilizados para este fim, é um fator agravante.

Dando continuação à segunda fase da *exploração do material*, trouxemos a **CAT 02** com o Quadro 4, evidenciando as unidades de registros (UR).

Quadro 4: Contribuições e Desafios da Categoria 2

Trabalhos	Unidades de Registro (UR)	
	Contribuições	Desafios
T15	O <i>Scratch</i> demonstra potencialidades para o ensino de noções de topologia e geometria, possibilitando que crianças façam investigação Matemática testando suas hipóteses.	O tempo inadequado para a execução das atividades. Dificuldades de leitura e interpretação de enunciados por parte dos alunos.
T16	O <i>Scratch</i> pode auxiliar no aprendizado de probabilidade, desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, criatividade, e no desenvolvimento do pensamento computacional (PC).	Superar as lacunas deixadas pelos cursos de licenciaturas destinados aos professores polivalentes, mediante um planejamento adequado nas atividades de matemática.
T17	O <i>Software</i> permite a criatividade, lógica e solução de problemas (numéricos e geométricos), possibilitando ao aluno investigar, levantar hipóteses, testar e corrigir erro.	Promover um estudo a longo prazo para o acompanhamento da turma.
T18	O <i>Scratch</i> pode colaborar com a construção de OA no contexto de grandezas e medidas. Pode possibilitar o aspecto motivacional e trabalho colaborativo para a realização das atividades.	Planejamento adequado na construção e execução de um AO para que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados.
T19	O <i>Scratch</i> possibilita o desenvolvimento de um OA de forma colaborativa em ciclos de análise, design, avaliação, reformulação e revisão, tornando possível, aos poucos, sua melhoria em termo de praticidade.	Melhoria e modificação de OA, em termos práticos e visuais, e de aspectos da interatividade e autonomia, com o objetivo de incentivar o interesse dos alunos. Estratégia metodológica no conteúdo escolhido.
T20	O <i>Scratch</i> é uma ferramenta com potencialidade pedagógicas e pode colaborar para o interesse e a qualidade das aprendizagens efetuadas na área da Matemática.	Necessidade de maior trabalho exploratório, mais tempo e dedicação em alguns assuntos que requerem programação mais longas.
T21	O <i>Scratch</i> pode favorecer o desenvolvimento de conceitos relacionados à localização e à movimentação espacial. Além de conceitos como: ângulos, sistemas de coordenadas cartesianas, números inteiros, e operações de adição, subtração, multiplicação e divisão.	Compreender conceitos importantes para o avanço nas programações. Poucos trabalhos no campo da geometria voltados aos anos iniciais.

T22	O software <i>Scratch</i> se revela como uma ferramenta digital propícia à construção de atividades na Modelagem Matemática, a partir dos anos iniciais do ensino fundamental.	Desenvolver programação de movimentações mais complexas. Surgimento de problemas e mudança de fases.
T23	O software pode contribuir para o desenvolvimento de jogos e leva a ideias e compreensões intuitivas sobre a soma e subtração de números inteiros positivos e negativos.	Necessidade de avaliar a metodologia aplicada e as mudanças no desenvolvimento comportamental e sociológico dos estudantes, caso seja alterado o estilo de mediação, de um jogo cooperativo para competitivo.
T24	O <i>Scratch</i> pode propiciar o raciocínio lógico e a construção do PC de maneira criativa e motivadora.	Bom planejamento de tarefas para a uma aprendizagem significativa e a constituição do pensamento computacional (PC).
T25	O <i>Scratch</i> pode integrar a computação e o pensamento matemático de forma eficaz e colaborativa, quando o processo de codificação é desenvolvido. Pode ser um espaço envolvente e relativamente fácil de usar na resolução de problemas.	Mediações pedagógicos e alguns processos de codificação do software.
T26	De modo geral, a linguagem de programação <i>Scratch</i> pode ser significativa para o aprendizado escolar.	Formação de professores em contextos de TD. Limitação do tempo para a execução de oficinas com programações mais longas e conteúdos mais complexos.
T27	O <i>Scratch</i> possibilita o aprendizado de alunos em sala de aula, desenvolvendo habilidades de codificação, com potencialidades para facilitar o aprendizado de conceitos disciplinares, como os da geometria.	Avaliar a natureza da tarefa, do papel do professor, da cultura da sala de aula e da maneira como o professor configura e interage com os alunos por meio da tarefa.
T28	O <i>Scratch</i> é um facilitador da aprendizagem de conceitos disciplinares, é motivador e promove o engajamento dos alunos, desenvolvendo habilidades e espírito coletivo.	Atentar para que a metodologia ajude o aluno na construção do conhecimento, o professor deve atuar como mediador, sem interferir diretamente nas respostas e no processo de construção.
T29	O <i>Scratch</i> permite uma boa compreensão dos conteúdos geométricos de forma motivadora, potencializando o pensamento computacional. A reflexão, a capacidade crítica e o raciocínio lógico foram aspectos aprimorados no decorrer do estudo.	Implementação das TIC em sala de aula e reflexão sobre a possibilidade de inserção de todos os alunos em atividades de conhecimento.
T30	O <i>Scratch</i> demonstrou ser um ambiente facilitador da aprendizagem da geometria básica, de modo dinâmico, interessante e mais eficiente para os alunos.	Pensar em metodologias para o desenvolvimento de jogos com o <i>Scratch</i> , aumentando a motivação para a aprendizagem de conceitos matemáticos.

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Mediante o Quadro 4, observamos confluências e divergências das Unidades de Registros (**UR**) e inferimos que o eixo temático **ET01- Potencialidades, desafios didático-pedagógico e tempo para execução de atividades ou projetos com o Scratch**, é formado pelos trabalhos **T15, T17, T20, T26, T23** que, de modo geral, descrevem a motivação das crianças ao trabalharem conceitos disciplinares com o uso do *Scratch* em sala de aula, uma vez que as atividades foram conduzidas com entusiasmo e colaboração entre os participantes. Em (T15), por exemplo, foi destacado que as atividades propostas com o uso do *Scratch*, corroboram com os documentos oficiais, pois ao ser utilizados conceitos da Topologia para

tratar das noções espaciais elementares, os estudantes puderam traçar itinerários, movimentando os personagens para a direita/esquerda, para frente/para trás. Possibilitou a construção de relações entre a Geometria Euclidiana e as noções de topologia ao analisar o melhor trajeto sobre as arestas no estudo que envolvia figuras geométricas, vértices, arestas e conceitos numéricos como números pares/ímpares.

Os autores de **T17** descrevem que o *Scratch* traz vantagens significativas em sala de aula, pois auxilia os alunos na construção do PC ao observar que estes puderam refletir sobre os resultados de suas ações e ideias e, assim, conseguiram desenvolver várias habilidades, como o trabalho em equipe, a autonomia, a concentração, o pensamento sistemático e crítico. Os pesquisadores de **T17** valorizam os aspectos computacionais para o desenvolvimento da aprendizagem em sala de aula, embora não tenha explorado de forma direta conceitos matemáticos, trouxe nuances de elementos dessa área por meio do eixo cartesiano.

Em **T20** envolve-se o contexto da resolução de problemas e descreve-se que os alunos tiveram êxito, mostraram aprendizado e manuseio bastante satisfatórios, evidenciando interesse, espírito colaborativo entre os pares e empenho ao longo do estudo com a ferramenta digital. Descreve-se que o *Scratch* é uma ferramenta que pode ser usada no desenvolvimento de capacidades avaliativas, pois os alunos podem ver os procedimentos que utilizaram para resolver problemas e refletir sobre eles. Portanto, o software pode promover a apreensão de conceitos matemáticos de modo construtivo, permitindo que os alunos reformulem as suas próprias resoluções ao detectarem os erros. Na mesma direção, os autores dos trabalhos de **T26** enfatizam o desempenho dos discentes na criação ativa de jogos e histórias animadas, possibilitando aos alunos a experimentação ativa tanto de programação quanto de conteúdos curriculares, ao passo que os alunos desenvolvem habilidades de raciocínio lógico e criatividade. Na mesma linha, os autores dos trabalhos de **T23** aferiram que a mediação em que os alunos jogaram livremente provocou interação e aprendizagem da matemática.

Vale lembrar que esse eixo temático descreve algumas dificuldades com relação à utilização dessa ferramenta digital. No trabalho T23, alerta-se que a mediação intencional, transformando o jogo em uma competição, pode interferir na aprendizagem, pois foi observado entre os alunos, “que a vontade de ganhar do outro era maior, como se o jogo não importasse e sim a vitória, como se tivessem jogado sem outro objetivo que não a vitória” (Meneses et al., 2021 p.179), chamando a atenção para a uma mediação didático-pedagógica adequada por parte do docente. Em T15 foi aferido que a maior dificuldade encontrada na realização da experimentação foi a limitação do tempo utilizado na aplicação das atividades. Em **T26**, os

autores citam o pouco tempo disponível para a realização da oficina, o que dificultou a realização de uma intervenção mais robusta desfavorecendo o desenvolvimento de conteúdos mais complexos, como a construção de jogos digitais.

Da mesma forma, os autores de **T20** chamam a atenção para o tempo na execução de tarefas com o software, pois um projeto muito longo pode se tornar algo negativo. Em contrapartida, para T17 um tempo longo possibilita fazer uma análise mais precisa do desempenho dos alunos no início das oficinas e o quanto foram progredindo durante as aulas. O projeto realizado em T17 teve a duração de um ano e isso foi um fator relevante para a observação realizada durante as aulas com o Scratch.

Em ET02 - Potencialidades e Dificuldades computacionais na utilização do *Scratch*, os trabalhos **T21**, **T22** e **T29** evidenciaram que essa ferramenta se configurou relevante para a aprendizagem de conceitos matemáticos à medida que os alunos utilizaram abordagens criativas para resolver problemas usando a codificação, ademais, a programação pode ser um forte aliado para o desenvolvimento da matemática. **T21**, por exemplo, ao tratar da programação nos anos iniciais, avalia, por meio das atividades propostas e realizadas pelos alunos, que os conceitos de lateralidade, ângulo, sistemas de coordenadas cartesianas e outros, foram assimiladas pelos alunos por meio do software *Scratch*.

Em **T22** foi abordado a modelagem matemática, sendo observado a interdisciplinaridade, a ludicidade, a criatividade e o trabalho em equipe, de modo a possibilitar o estudo de sistema de coordenadas cartesianas, a explanação de ângulos e da lógica matemática para alunos do 5º ano. Destacou-se ainda que, para a formação escolar autônoma dos alunos de forma colaborativa, podem ser desenvolvidos projetos com grau de complexidade cada vez maior. Em **T29**, os autores descreveram que a manipulação do Scratch permitiu boa compreensão dos conteúdos e potencializou o Pensamento Computacional (PC) dos alunos, além de corroborar efetivamente para o ensino de conceitos geométricos e para a inovação das práticas pedagógicas das professoras, participantes da pesquisa. No entanto, de modo geral, os autores dos trabalhos deste eixo temático manifestaram preocupações durante o desenvolvimento das atividades.

Os autores de **T21** observaram que em vários momentos a programação no software Scratch, gerou conflitos, como por exemplo, a dificuldade de movimentação de atores. Esses momentos possibilitaram aos alunos a espiral da aprendizagem para completarem o ciclo de: descrição, execução, reflexão e depuração. Outras tantas foram as vezes que necessitaram recorrer à professora pesquisadora para auxiliá-los em relação à conceitos matemáticos

existentes. Em **T22**, surgiram problemas como: movimentação dos ‘atores’ para a direita, para a esquerda e como fazê-lo voltar ao início; além de problemas relacionados à mudança de fazer do jogo. Para os autores de T21 e T22, os problemas relacionados à complexidade da programação são situações que cabem ao professor/instrutor intervir quando necessário, auxiliando os discentes na análise dos blocos de comandos disponíveis e pela experimentação da hipotética programação que satisfaria a condição, para que os estudantes consigam programar com blocos de comando cada vez mais complexos. T29 também trouxe nuances de desafios enfrentados pelo fato de a professora titular da turma não ter experiências com tecnologias, (...) “para ela foi um desafio, pois trata-se de uma ferramenta desconhecida para a própria” (Ramalho e Ventura, 2017 p. 16).

Com relação ao eixo temático **ET-03- Possibilidades e Desafios na utilização e divulgação do Scratch como instrumento de ensino e de aprendizagem da matemática e na constituição do PC**, os trabalhos **T16, T18, T19, T24, T25, T27, T28 e T30**, mesmo tendo perspectivas diferentes, retratam um certo alinhamento no que se refere à utilização do *Scratch* na aprendizagem, descrevendo-o como dinâmico com potencialidades para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, além de ajudar na compreensão de conceitos que constituem o Pensamento Computacional PC. (**T16**) enfatiza que a maioria das crianças que participou das atividades apresentou boa relação com a Matemática, envolvendo o eixo probabilidade em eventos aleatórios, confirmando características de resultados mais prováveis. As crianças foram capazes de construir um jogo simples proposto com o software apesar de não terem conhecimentos sobre programação, evidenciando que em determinadas circunstâncias, a utilização do software *Scratch* se apresenta como alternativa para a mediação dos conhecimentos matemáticos por intermédio da programação.

Em **T18** foram observados momentos de interação, motivação, interesse, inteligência coletiva, além do aprendizado de ‘medidas de comprimento’ com a utilização do *Scratch*. Para os autores de **T18**, agregar a tecnologia digital à aprendizagem pode auxiliar na compreensão de conteúdos matemáticos abstratos, uma vez que essa ferramenta permite a visualização, a experimentação e a simulação. Os autores de **T19** mostraram o caráter dinâmico e prático do *Scratch* e acompanharam o desenvolvimento de um Objeto de Aprendizagem (OA) para abordar ‘unidade de comprimento’ a ser aplicado em uma turma de 5º ano do ensino fundamental I. O trabalho enfatizou, sobretudo, o planejamento mostrando que a equipe multidisciplinar além de atentar para conteúdo matemático e as estratégias metodológicas, deve

observar os diversos aspectos na elaboração e construção de um objeto de aprendizagem, tais como: Interatividade; Autonomia; Cooperação; Cognição; Afetividade; Acessibilidade e outros.

Para T24 o *software* possibilita a aprendizagem de conceitos básicos de computação, especificamente da programação e desperta o interesse e motivação dos alunos para esta área do conhecimento, permitindo que os alunos explorassem livremente esse micromundo à medida que descobriam muitos comandos sozinhos. Na perspectiva de um Espaço Maker, os alunos envolvidos nos projetos desenvolveram habilidades computacionais e raciocínio lógico, além de serem observadas características do PC. Para os autores de T25, o pensamento matemático dos alunos e o aprendizado em codificação estavam ligados à resolução de problemas matemáticos envolvendo ângulos, coordenadas cartesianas, números inteiros, enquanto a linguagem explícita de ambos contribuía para a comunicação de processos, conceitos e soluções.

Os autores de T25 descrevem que a codificação pode ajudar no desenvolvimento do pensamento matemático, na resolução de problemas, portanto, corrobora para a potencialidade do *Scratch* para o desenvolvimento do PC e do pensamento matemático de forma integrada. Em T27, avalia-se que essa ferramenta possibilita, o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, promovendo a compreensão das crianças sobre ângulos e medidas de forma criativa na busca de soluções, além de ajudar na compreensão de alguns dos conceitos que constituem o PC. Para os autores, o fator dinâmico do *Scratch* permitia que a cada momento a resposta dos alunos e o envolvimento destes com as tarefas propostas, modificasse suas abordagens, permitindo que eles se envolvessem novamente no processo.

Os autores de T28 afirmam que o *Scratch* é capaz de promover aprendizagens, pois apresenta em sua plataforma um ambiente motivador, em que os alunos podem utilizar uma diversidade de projetos, além disso, descrevem que o *Scratch* emergiu como uma ferramenta com potencialidade para o contexto da aprendizagem da matemática. Esses autores afirmam que o *Scratch* subsidiou a aprendizagem dos conceitos matemáticos pelos alunos referentes a conteúdos como eixo cartesiano, ao utilizar, por exemplo, a movimentação dos atores. Na mesma direção, os autores dos trabalhos de T30 afirmam que o desenvolvimento de atividades com a utilização do *Scratch* permite a resolução de problemas e auxilia no desenvolvimento do pensamento lógico com criatividade e colaboração, fatores essenciais para a expressão do letramento digital. Sinalizam também que o *Scratch* pode ser um aliado no ensino de conceitos matemáticos e evidenciaram que existe uma diferença estatística considerável entre os estudantes submetidos ao método tradicional e os que estudaram por meio de um projeto implementado no *Scratch*. Suas análises justificaram uma correlação entre o sucesso escolar e

o desempenho no teste final daqueles que usaram o *Scratch* para o ensino da geometria (mas não descreveu quais foram as atividades propostas).

Vale ressaltar que esse eixo temático chama a atenção e enfatiza a proposta pedagógica no ensino mediado por esse software. Para **T16**, por exemplo, o planejamento é a forma mais adequada para se criar estratégias e oportunidades para que todos os estudantes tenham acesso ao conhecimento. Considera a defasagem nas disciplinas do curso de Pedagogia um desafio a ser superado, pois a matemática que se apresenta, muitas vezes, é um dificultador no planejamento das aulas para os professores polivalentes. Por outro lado, **T18**, assevera que o OA quando manipulado dentro de um contexto, com objetivos e planejamento bem delineado, pode facilitar a compreensão de um saber novo, cabendo, portanto, ao professor, a escolha correta das variáveis didáticas.

Nos trabalhos **T18** e **T19** afirma-se ainda que o sucesso com OA pode variar de acordo com o conteúdo e a maneira como ele é conduzido, destacando a importância de se trabalhar o melhoramento desses objetos de aprendizagens, tanto em aspectos técnicos quanto em aspectos pedagógicos, com atividades que priorizam a reflexão, a discussão e a pesquisa do conteúdo abordado para que o OA contribua na aprendizagem da Matemática. Os autores de **T24** consideram que o software, sendo mediado por um bom planejamento, promove nos estudantes uma aprendizagem efetiva em relação ao pensamento computacional. (**T25**) alerta também para o uso do *Scratch* com projetos de mediações pedagógicas adequadas ao ensino para se tornar uma ferramenta viável à aprendizagem do aluno.

Em **T27** é relatado o desafio de criar atividades matemáticas ou jogos para alunos dos anos iniciais, no entanto, é mostrado que com uma boa estratégia é possível ajudar os discentes na construção de conceitos matemáticos com jogos no *Scratch*. **T28**, de forma breve e indireta, comenta sobre a importância de um planejamento adequado para que a aprendizagem em sala de aula não seja comprometida. **T30** destaca a correlação entre a programação com o *Scratch* e o ensino da matemática, dando a ideia de que o planejamento com o software promove o sucesso dos alunos em relação aos conteúdos matemáticos em jogo. Na sequência evidenciaremos a categoria 03, contendo as unidades de registo e os eixos temáticos extraídas dos trabalhos em questão.

Exploração do material - CAT 03

Quadro 5: Contribuições e Desafios da Categoria 3

Trabalhos	Unidades de Registro (UR)	
	Contribuições	Desafios
T31	O <i>Scratch</i> tem potencialidades de propiciar o desenvolvimento do raciocínio lógico de forma gradual e sistemática facilitando a resolução de problemas mais complexos e mais abrangentes, de forma simples.	Acesso a formação para utilizar o software <i>Scratch</i> nas aulas de matemática. Metodologia e planejamento que envolva o software de forma adequada ao aprendizado de conceitos matemáticos.
T32	O <i>Scratch</i> pode contribuir para a constituição de produtos educacionais para professores que desejam usar o software <i>Scratch</i> como instrumento de auxílio no desenvolvimento da programação em aulas de matemática.	Explorar e evidenciar as abordagens metodológicas durante a utilização do <i>Scratch</i> . Superar a escarcas de produções que fazem referências a uma metodologia de ensino para uso do <i>software</i> .
T33	O <i>Scratch</i> propicia a construção do raciocínio lógico e ajuda na resolução de problemas, sendo capaz de produzir efeitos satisfatórios no ensino e aprendizagem.	Integrar as TDIC no currículo de forma significativa. Privilegiar o uso das TDIC no ensino de modo a formar sujeitos autônomos, protagonistas e autônomos.
T34	Os trabalhos mapeados mostraram que a maior parte das formações utilizam ferramentas tecnológicas e que o uso do <i>Scratch</i> prevaleceu em boa parte das pesquisas analisadas. Nestes, o software é descrito como de fácil acesso e relativa facilidade de manuseio.	Pesquisas que apresentem indicadores que promovem o aprendizado dos alunos após o processo de formação docente. Superar a carência de trabalhos que abordem a formação profissional de professores dos anos iniciais no âmbito do PC no ensino de matemática.
T35	A pesquisa revelou que a linguagem de programação <i>Scratch</i> foi a ferramenta mais utilizada para o ensino de lógica de programação. O software é uma linguagem visual e interativa que permite que as crianças criem projetos e jogos de forma intuitiva e divertida.	Construção de conceitos disciplinares com a utilização do <i>Scratch</i> . Desenvolvimento de técnicas e metodologias no uso de programação para o ensino e aprendizagem.
T36	O <i>Scratch</i> pode propiciar o PC na escola e o raciocínio lógico, mesmo em alunos que inicialmente não tenham tido contato com o <i>software</i>	A inserção do PC no ensino básico, de forma pontual ou contínua, de modo a transversalizar os diversos componentes curriculares, sobretudo da matemática

Fonte: Elaborado pelos autores (2024)

Na CAT 03 referente aos trabalhos que tratam de mapeamentos, destacamos dois eixos temáticos **ET01- Potencialidades, desafios didático-pedagógico e tempo para execução de**

atividades ou projetos com o Scratch e ET-03- Desafios na utilização e divulgação do Scratch como instrumento de ensino e de aprendizagem da matemática e na constituição do PC.

No eixo temático **ET01**, os trabalhos **T31**, **T32**, **T33** e **T35**, destacaram de maneira geral as possibilidades pedagógicas do *Scratch*, por proporcionar uma interação e um aprendizado dinâmico, por possuir uma plataforma de fácil acesso e uma interface quase intuitiva. **T31**, por exemplo, evidenciou que por meio do *Scratch*, pode ser introduzido a linguagem de programação de forma acessível e interdisciplinar, dando a chance de o usuário criar seus próprios projetos, jogos, histórias e apresentações. Possui várias possibilidades de exploração para o ensino de matemática, revelando que mesmo que à maioria dos professores não tenham contato com o software, é possível aprenderem sozinhos por fontes como a Internet, documentos e tutoriais para utilizarem o software.

As análises de **T32**, mostraram que as tecnologias digitais são consideradas recursos auxiliares às práticas pedagógicas e que existem algumas contribuições e aplicações matemáticas sobre a programação e o software *Scratch*, envolvendo situações-problema. **T33** descreve a existência de riqueza epistemológica no entorno do objeto que não se limita apenas ao ambiente de produção de projetos, mas para além disso, amplia seu cenário a nível colaborativo, possibilitando não apenas o compartilhamento da produção do aluno, mas a sua ‘remixação’, exploração e discussão em torno do resultado. Em **T35** foi destacado que dentre as ferramentas digitais, o software *Scratch* foi a mais utilizada nos projetos analisados, com recorrências no ensino e aprendizagem e na constituição do PC. Foi percebido que o software pode ajudar as crianças a desenvolverem a habilidade de abstração e resolução de problemas de forma lúdica e criativa, pensando nas partes isoladas de um problema para facilitar o desenvolvimento da solução.

Neste eixo temático, foram relatadas também certas dificuldades. Em **T31**, por exemplo, a maioria dos trabalhos analisados, foca apenas a utilização do *Scratch* com os alunos e que a minoria relaciona a prática docente com o software, indicando que há a necessidade de abordagens com mais ênfase na formação inicial ou continuada de professores. Ressaltou ainda a importância de proporcionar ao aluno uma vivência de cenários de aprendizagem, nos quais os professores possam descobrir, juntamente com grupos de estudantes, processos e caminhos à resolução de problemas e à construção de conceitos. **T32** revelou limitações metodológicas, ao encontrar um único trabalho que trouxe de forma clara a metodologia utilizada. A maioria das produções encontradas fazem referências somente às TD e não às metodologias com as

quais elas foram utilizadas, encontrando uma única identificada (modelagem matemática), em num único projeto que envolveu situações-problemas e o software Scratch.

T32 destaca que apesar das TD já serem realidade em muitas escolas e o scratch estar em evidência, o *Software* é pouco utilizado nas escolas como ferramenta de ensino, não sendo aproveitado como recurso didático-pedagógico adequado, faltando, portanto, uma apropriação e aceitação melhor pelas comunidades escolares. O mapeamento realizado por **T33**, constata a necessidade de discussão e aprofundamento sobre o uso do *Scratch* como possibilidade metodológica voltada ao ensino da matemática e afirma que apesar de haver um diálogo convergente entre a maioria dos trabalhos analisados, o *Scratch* por si só não é garantia de aprendizado para o aluno, uma vez que o professor é imprescindível para o processo de ensino e aprendizagem e ressalta a relevância de se atentar para a metodologia a ser utilizada. T35 alerta para o escasso investimento de recursos e formação adequada para os educadores, a fim de garantir a qualidade e eficácia do ensino de programação.

Em relação ao **ET-03 Desafios na utilização e divulgação do Scratch como instrumento de ensino e de aprendizagem da matemática e na constituição do PC**, composto por **T34** e **T36**, de modo geral, destacam que o software é uma ferramenta que introduz a linguagem de programação de forma acessível e interdisciplinar dando a possibilidade ao usuário de criar seus próprios programas, jogos, histórias. Além disso, favorece o raciocínio lógico de forma gradual e sistemática, facilitando a resolução de problemas mais complexos e mais ampla.

Em **T36**, o *Scratch* é descrito como uma ferramenta abrangente, ocorrendo em toda a educação básica, tanto do ensino público quanto particular e em atividades extraescolares. Na formação docente, evidenciou que os professores participantes constataram que o *Scratch* não era tão difícil e viram no software a possibilidade de ser utilizado em sala de aula. Em contexto de aprendizagem, foi constatado que os alunos envolvidos adquirirem entusiasmo em aprender programação de jogos e outras atividades de forma criativa e colaborativa. Foi destacado a potencialidade do uso do *Scratch* para o PC e para o contexto do ensino interdisciplinar, podendo ser explorado na matemática e outras áreas do conhecimento. Além disso, o ensino e o aprendizado do PC aliado ao *Scratch* contribuiu para mudanças culturais significativas nos locais onde os projetos foram implementados. No **T34**, o mapeamento mostrou que uso do *Scratch* e da programação em blocos tem contribuído para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental e possibilita a criação de atividades lúdicas e interativas que

estimulam a construção do pensamento computacional e do raciocínio lógico-matemático dos alunos.

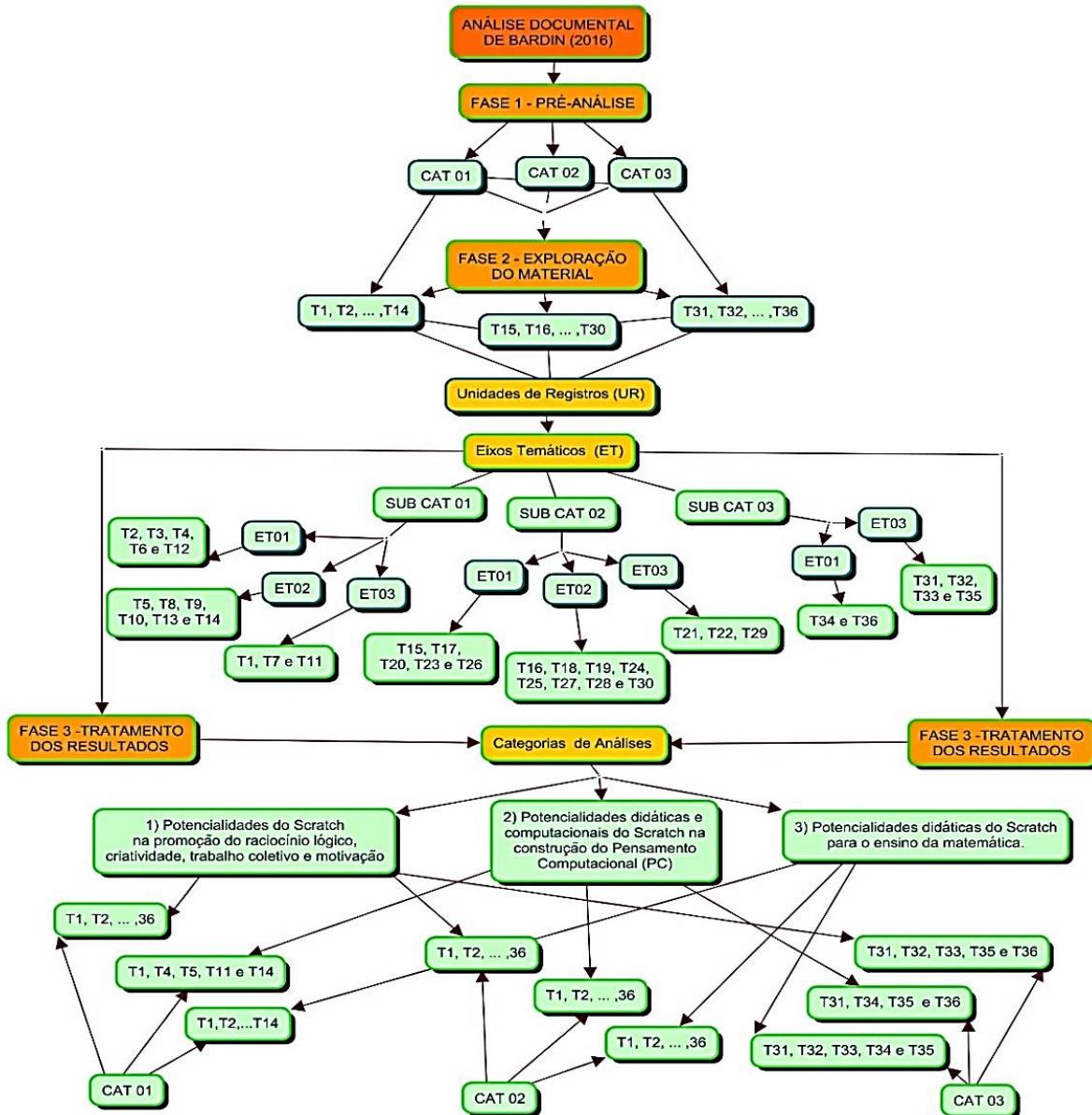
No entanto, os trabalhos do eixo temático em questão, trazem algumas discussões que merecem ser observadas. **T34**, por exemplo, fala sobre a necessidade de mais pesquisas que apresentem indicadores que promovam efetivamente o aprendizado dos alunos após o processo de formação docente, além de apontar carências de trabalhos que abordem a formação docente no âmbito do PC e no ensino de matemática. Destaca ainda que a maioria dos artigos aplicaram como estratégia de abordagem a programação em blocos para o desenvolvimento do PC, e que, tal abordagem ocorre na modalidade presencial, mas não relacionaram de forma clara quais os conteúdos curriculares de matemática são explorados. **T36** constatou fatores limitantes quanto ao uso do Scratch, destacando que tais limitações podem estar relacionadas a falta de investimento na formação inicial e continuada de professores e na contratação de profissionais especializados, além de laboratórios com poucos computadores ou máquinas obsoletas.

A próxima secção, traz as principais conclusões e inferências evidenciadas na terceira fase da Análise documental de Bardin (2016), ‘o tratamento dos resultados’. Vale ressaltar que para esta fase, elencamos três ‘categorias de análises’ que subsidiaram as discussões entorno de CAT 01, CAT 02 e CAT 03, a saber: 1) *Potencialidades do Scratch na promoção do raciocínio lógico, criatividade, trabalho coletivo e motivação;* 2) *Potencialidades didáticas e computacionais do Scratch na construção do Pensamento Computacional (PC);* 3) *Potencialidades didáticas do Scratch para o ensino da matemática.*

5. Conclusões: um balanço da pesquisa

Esta pesquisa foi realizada com o auxílio do fluxograma Prisma e do protocolo POT que nos possibilitaram efetivar a estratégia de busca. Para auxiliar nas análises lançamos mão à análise documental de Bardin (2016) que nos permitiu um estudo mais aprofundado na busca da resposta para a seguinte questão **QRIL: De que forma o Scratch é abordado em pesquisas como um dispositivo de ensino e a aprendizagem da matemática e de formação de professores na educação básica, especialmente no contexto da geometria voltada para os anos iniciais?** O infográfico a seguir (Figura 04), mostra a trajetória e os elementos descritos na revisão integrativa.

Figura 4: Dinâmica da Revisão Integrativa da Literatura (RIL)



Fonte: Elaborada pelos autores

Conforme indica a Figura 4, a primeira fase, ‘pré-análise’, possibilitou dividir os trabalhos catalogados inicialmente em três categorias CAT 01, CAT 02, CAT 03, e permitiu, de maneira mais eficiente passar para a fase dois, ‘exploração do material’. Esta por sua vez, mediante uma leitura mais aprofundada dos textos, contribuiu para o aparecimento das unidades de registros (UR). Por outro lado, as UR facilitaram as discussões dos trabalhos por eixos temáticos (ET), dando surgimento as subcategorias, que direcionaram a pesquisa à terceira fase, o ‘tratamento dos resultados’. Para o desenvolvimento dessa última fase, consideramos três critérios de análises, a saber: (CA-01) *Potencialidades do Scratch na promoção do raciocínio lógico, tratamento de erro, criatividade, trabalho coletivo e motivação;* (CA-02)

Potencialidades didáticas e computacionais do Scratch na construção do Pensamento Computacional (PC); (CA-03) Potencialidades didáticas do Scratch para o ensino da matemática. Tais categorias de análises subsidiaram as discussões, resultados e inferências de nossa RIL.

À vista disso, na **CAT 01**: *Trabalhos que envolvem a formação inicial ou continuada de professores com a utilização da ferramenta digital Scratch no ensino fundamental I*, os autores analisaram a formação inicial e continuada de professores, buscando verificar se o software *Scratch* possibilita o ensino de matemática e contribui de fato, para a prática docente em sala de aula. Além disso, buscou analisar a integração da tecnologia digital com os conteúdos matemáticos, verificando se o software é capaz de propiciar um ensino contextualizado e interdisciplinar. Ademais, procurou evidenciar os efeitos do *Scratch* sobre o Pensamento Computacional, na medida que buscava analisar a aprendizagem de conceitos como: números inteiros, plano cartesiano, funções, gráficos, situações-problema, lógica matemática e os conceitos geométricos na formação docente, sendo possível identificar discussões que sinalizaram mudanças de posturas pedagógicas.

As atividades que envolveram álgebra, medidas antropométricas, gráficos e situação de multiplicação, evocaram os saberes matemáticos e a criatividade dos docentes, bem como, troca de experiências na preparação das atividades. Além das expectativas relacionadas ao uso pedagógico do *Scratch* como recurso na aprendizagem da matemática, notamos que o software como ferramenta pode se revelar uma opção interessante no contexto da formação de professores, sendo indicado também para o ensino de alunos de turmas ditas ‘normais’, bem como, de alunos surdos, ao ser utilizado a perspectiva das Tecnologias de Inclusão Social (TIS).

Como já foi destacado, as três categorias iniciais (e as subcategorias ou eixos temáticos) estão entrelaçados e serão analisadas mediante às categorias de análises (CA). Nessa direção, em relação a CAT 01, observamos que todos os trabalhos evidenciaram a CA-01 ‘*Potencialidades do Scratch na promoção do raciocínio lógico, criatividade, trabalho coletivo e motivação*’, com exceção de T1 e T12. Em T1, apesar de ter indícios dessa categoria de análise, não destacou de maneira efetiva o trabalho coletivo, pois as oficinas ocorreram de forma não presenciais devido restrições impostas pela Covid-19. Por outro lado, T12 não evidenciou a criatividade e o raciocínio lógico, fatos que podem estar relacionados a falta de organização pedagógica e estratégia de ensino. Os trabalhos T1, T4, T5, T11 e T14, evidenciaram (CA-02) *Potencialidades didáticas e computacionais do Scratch na construção*

do Pensamento Computacional (PC), evidenciando que o software tem potencialidades para o desenvolvimento desta habilidade.

Em relação a (*CA-03) Potencialidades didáticas do Scratch para o ensino da matemática*, todos os trabalhos catalogados relacionam *software* ao ensino desta disciplina, destacam o *Scratch* como uma ferramenta propícia ao ensino de conceitos matemáticos, apesar de algumas restrições, como é o caso de T1, que chama a atenção para a complexidade de projetos longos e o tempo adequado para a execução, bem como T12 que questiona a necessidade do software no ensino e aprendizagem da matemática, alertando para falta de estratégias e planejamento conveniente ao que se pretende realizar.

Observamos por meio desta categoria que o *Scratch* é um instrumento propenso ao desenvolvimento de habilidades como autonomia e protagonismo, e que muitas dificuldades podem ser superadas com organização e direcionamento específico com o uso do *software* nas atividades escolares. Além disso, podemos perceber o *Scratch* como uma ferramenta capaz de contribuir para o desenvolvimento do Pensamento Computacional (PC), que por sua vez, é relevante para o pensamento matemático e a aprendizagem de conceitos, de forma colaborativa. Verificamos que a formação de professores voltadas ao uso do *Scratch* no contexto educacional podem propiciar boas práticas de ensino e aprendizagem, o que possibilita também à implementação e adaptação de atividades e de projetos em diferentes níveis, sendo capaz de promover o desenvolvimento do PC por meio da participação coletiva e da ação colaborativa.

Desse modo, notamos em CAT 01 que o *Scratch* em determinadas ocasiões, possibilita que professores e estudantes programem, de modo a permitir que o docente construa atividades adaptadas a conteúdos que deseja explorar em sala de aula, fazendo com que sejam estabelecidas ligações entre o ato de ensinar e o de aprender. Embora o *software Scratch* apresente algumas condições restritivas, como o tempo para a execução de projeto. Percebemos que o *software* tem potencialidade na formação de professores, embora aponte para a necessidade de apropriação desse instrumento tecnológico e de um planejamento prévio.

No que diz respeito a **CAT 02**: Trabalhos que envolvem o ensino e aprendizagem da matemática e do Pensamento Computacional (PC) com a utilização da programação *Scratch* no ensino fundamental I, as análises nos possibilitaram verificar que o *Scratch* promove o pensamento matemático (com atividades voltadas ao campo numérico, geométrico ou algébrico) e o pensamento computacional PC (**T16, T17, T24, T27, T28, T29**) destacando em linhas gerais que este software é um instrumento com potencialidades para o desenvolvimento de

habilidades cognitivas, tais como: análise, elaboração de hipóteses, experimentação, avaliação de resultados, tomada de decisões, além de conduzir os alunos a um aprendizado com criatividade e trabalho em equipe, haja vista que, os autores dessa categoria mostraram o *Scratch* como um importante instrumento para o processo de ensino e aprendizagem e, de construção do conhecimento, mesmo em ocasiões nas quais os alunos não tenham tido inicialmente, o contato com a lógica de programação.

Nossa inquirição verificou de modo geral que todos os trabalhos da CAT 02 exploraram a categoria de análise (CA-01) *Potencialidades do Scratch na promoção do raciocínio lógico, tratamento de erro, criatividade, trabalho coletivo e motivação*, pois sinalizaram a importância das TDIC no ensino de Matemática, descrevendo que o *Scratch* pode contribuir efetivamente para a aprendizagem dos estudantes na resolução de problemas com maior envolvimento e empenho nas atividades, devido a motivação que o software pode proporcionar. Vimos que esse interesse por parte dos discentes decorre do fato do instrumento digital promover a chance de criação dos seus próprios mundos, conforme destacado em T20. Fatos como esse, trazem indicações de que um ensino a luz desse ente tecnológico, apresenta-se, não como um substituto, mas como um aliado ao ensino de objetos matemáticos. Em relação a (CA-02) *Potencialidades didáticas e computacionais do Scratch na construção do Pensamento Computacional (PC)*, destacaram-se principalmente, **T16, T17, T24, T27, T28, T29** que veem no software uma ferramenta com grande propensão para a constituição do PC. T29, por exemplo, afirma que “A manipulação da ferramenta educativa, Scratch, permitiu uma melhor compreensão dos conteúdos, potencializando o Pensamento Computacional” (p. 13).

Em relação a (CA-03) *Potencialidades didáticas do Scratch para o ensino da matemática*, com exceção de T24, todos os demais trabalhos da CAT 02 exploraram o uso da ferramenta como possível propulsor para o ensino da disciplina, com destaque para T15, T29 e T30, que abordaram o ensino e aprendizagem da geometria. Constatamos que em alguns projetos a diferença entre os estudantes submetidos ao método tradicional e os que estudaram por meio de um projeto implementado com o *Scratch*, permitiu que estes últimos aprendessem conceitos matemáticos com mais eficiência, criatividade e motivação, propiciando a capacidade de resolver problemas e permitindo que os discentes obtivessem bons resultados em testes finais, como é o caso relatado em T30. Em T29 houve a possibilidade do desenvolvimento da lógica matemática por meio de tópicos geométricos. T15 abordou a Geometria com ênfase no ensino de noções introdutórias de Topologia e permitiu que os discentes fizessem relações de formas geométricas euclidianas ao explorarem as formas, vértices, arestas e faces.

Vimos que nos trabalhos deste bloco (CAT 02), o tempo atua como um fator restritivo e pode interferir no bom andamento do uso do *Scratch* no ensino e aprendizagem. Evidenciamos também uma relativa carência em pesquisas que abordam o ensino da geometria nos anos iniciais com a utilização desse *software*, havendo poucas pesquisas no âmbito do campo conceitual focado nos objetos geométricos. Apesar de tais restrições, podemos inferir que por via de regra os autores desta categoria alcançaram os objetivos fixados, pois observamos que o *Scratch* promoveu o pensamento lógico e crítico nos alunos, tendo um impacto positivo no processo de ensino e aprendizado da matemática, pois desenvolveram estratégias de resolução de problemas e organizaram projetos durante as atividades.

Foi válido observar que embora alguns usuários não tenham se sentido à vontade inicialmente com a ferramenta digital, provavelmente pela falta de segurança em arriscar e recorrer à prática de exercitação, normalmente se adaptaram e na sequência manipularam e construíram atividades dinâmicas com o software, pois além de motivador, o *software* colabora para o aprendizado da geometria e de outros objetos matemáticos.

No contexto da **CAT 03:** Trabalhos que envolvem o Mapeamento de Pesquisas que utilizam o *software Scratch* no ensino e na aprendizagem da educação básica, sobretudo nos anos iniciais, observamos, de modo geral, que dentre os trabalhos mapeados, o *Scratch* é a ferramenta mais utilizada pelos professores em projetos, por ter uma interface interativa e atraente para os alunos e por possibilitar a construção do PC e a aprendizagem de conceitos disciplinares, sobretudo, matemáticos.

Foi verificado que neste bloco, a maioria dos trabalhos (**T31, T32, T33, T35, T36**) compatibilizam com (CA-01) *Potencialidades do Scratch na promoção do raciocínio lógico, tratamento de erro, criatividade, trabalho coletivo e motivação*, descreveram que tais competências são relevantes para o ensino e aprendizagem. As pesquisas revelaram que o *Scratch* é um instrumento de alcance, podendo ser utilizado em todos os níveis da educação, desde o ensino fundamental menor até o ensino superior, sendo, portanto, indicado na formação docente dos anos iniciais. Nesta categoria, parte dos trabalhos (**T34, T35, T36**) evidenciam a (CA-02) *Potencialidades didáticas e computacionais do Scratch na construção do Pensamento Computacional (PC)* e defendem essa habilidade como importante para a formação docente e para a aprendizagem de sala de aula.

T35, por exemplo, defende que o ensino de programação para crianças deve ser ampliado e fortalecido, reforçando a integração do PC na educação básica de forma pontual,

como uma disciplina, ou de maneira transversal. Este fato revela em parte, o caráter democrático e abrangente do software. Foi revelado também que geralmente as atividades não se limitam apenas ao ambiente de produção de projetos, mas para além disso, ampliam seu cenário a nível colaborativo, de modo a possibilitar não apenas o compartilhamento da produção do aluno, mas a sua ‘remixação’, exploração e discussão em torno do resultado.

Notamos que o ensino de matemática na educação básica mediado pelo *software* pode promover o desenvolvimento cognitivo do aluno. Na maioria dos trabalhos mapeados nesta categoria (**T31, T32, T33, T34, T35**) **houve a presença da (CA-03) Potencialidades didáticas do Scratch para o ensino da matemática, mostrando uma forte ligação do software com a constituição do pensamento matemático no decorrer do desenvolvimento de atividades**, como descrito, por exemplo, em T31, que “existem potencialidades didáticas e computacionais do Scratch em sala de aula de Matemática” (p.169). Assim como nas categorias anteriores, o *Scratch*, de maneira ampla, possibilita vantagens de usabilidade, mas também, limitações e dificuldades, pois embora possa subsidiar os trabalhos docentes (ou de futuros docentes) na condução do ensino, precisa ser planejado e inserido no contexto da matemática, ou seja, precisa estar em consonância com propostas didáticas capazes de ajudar os alunos na superação de obstáculos.

Outro fato não menos importante a ser considerado, é que, apesar das potencialidades desse objeto digital, existe a necessidade de explorá-lo em contesto da educação inclusiva, como, por exemplo, em estudos que levem em conta alunos com deficiência auditiva, aliás, essa é mais uma temática a ser explorada no intuito de se descobrir novas vantagens desse software. Um detalhe que também merece destaque é o fato de que apesar do número de trabalhos com a utilização do *scratch* no contexto de ensino da matemática esteja crescendo, ainda há certa escassez de abordagens com mais ênfase na formação inicial ou continuada de professores. Além de que, e em muitas pesquisas, havia pouca ou nenhuma indicação das metodologias adotados em projetos que envolviam a utilização do *Scratch* e o ensino da Matemática. **T21**, por exemplo, refletiu sobre o ensino de geometria nos anos iniciais, alegando que há poucas pesquisas e metodologias que foquem nessa área.

Além disso, percebemos ainda, situações técnicas em relação à construção das tarefas com o software que podem afetar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos. Em **T3, T13 e T15, por exemplo**, foi discutido o ensino e aprendizagem da geometria com o uso do *Scratch*, mas ao analisarmos as atividades não encontramos opções que ajudassem o aluno na superação de obstáculos. As atividades deram ênfase em perguntas e respostas, buscando verificar apenas se

o aluno respondeu ‘certo’ ou ‘errado’, sem dar a chance de o discente refletir sobre seu próprio erro e buscar a solução adequada. Em T5 e T29, foi abordado também o ensino da geometria com o *Scratch*, no entanto, não foram apresentados nos trabalhos (ou disponibilizados por meio de links) as atividades geométricas discutidas nos textos, não nos permitindo a analisar as tarefas, o que limita a divulgação e compreensão do ensino da geometria por meio desse objeto digital.

Entendemos que a despeito das condições restritivas, tais limitações e dificuldades não são apresentadas como um impedimento para o uso do *Scratch*, mas sim como desafios a serem superados, já que essa ferramenta pode possibilitar o ensino e aprendizagem de conceitos disciplinares e a constituição o PC dos participantes das pesquisas. Vimos que a criatividade, a colaboração e o pensamento crítico, são fatores observados, nas categorias estudadas. Vários projetos, na prática, podem ser criados e/ou modificados, explorando a programação, a matemática e suas relações interdisciplinares com outros conteúdos, indicando que o uso da ferramenta *Scratch* com uma abordagem metodológica adequada, pode dinamizar o ensino e potencializar a aprendizagem, melhorando o pensamento matemático e a capacidade de resolver problemas. Nesse contexto, tais inferências nos permitem responder à questão de pesquisa **QRIL**, tornando esta revisão integrativa importante e contribuindo para a tese doutoral do primeiro autor, pois respalda a construção de nosso Modelo Epistemológico de Referência (MER) que será constituído ao longo da tese, uma vez que algumas das organizações praxeológicas previstas, poderão ser constituídas a partir da remixagem de trabalhos anteriores.

Referências

- ALMEIDA, R; GOMES, A; BIGOTTE, M.E; PESSOA, T. iProg: Iniciação à Programação. In: Atas do XIX Simpósio Internacional de Informática Educativa e VIII Encontro do CIED: III Encontro Internacional. ISBN 978-989-95733-9-0, 2017, Lisboa. iProg: Iniciação à Programação Estudo piloto em duas escolas do ensino básico p.109-113.
- ANDRADE, H.V; ANDRADE, I.F. Proposta de Oficina de Ensino Utilizando a Ferramenta Scratch. Repositório Unisul. p. 1-40, 2023. Acesso em: fev. 2024. <https://repositorio.animaeducacao.com.br/handle/ANIMA/33150>
- BARDIN, L. Análise de conteúdo. 1. ed. São Paulo: Edições 70, 2016.
- BOSCH, M.; GASCÓN, J. Twenty-five years of the didactic transposition. ICMI Bulletin. 58, p.51-65. 2006.
- BRANDT, N. Programação nos Anos Iniciais: Uma contribuição para a aprendizagem da Matemática. Dissertação (mestrado) em ensino de matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. 2019. 128f. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2019.
- CALDER, N. (2018). Using Scratch to facilitate mathematical thinking’. Waikato Journal of Education, 23(2), 43-58. doi: 10.15663/wje. v23i2.654.
- CALDER, N.; RHODES, K. Coding and learning mathematics: How did collaboration help the thinking? Excellence in Mathematics Education: Foundations and Pathways. Proceedings of the 43rd annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia. pp. 139-146, Singapore: MERGA, 2021.

CANDIANI, T.L; LEME, J.C.S; PAIXÃO, G.A; BENINI, F.A.V. Scratch como introdução à programação na formação docente: relato re experiência em EAD. Revista de Extensão do Instituto Federal Catarinense – IFC. V. 9, nº 17, p. 105-122, 2022.

CASTRO, A. O uso da programação scratch para o desenvolvimento de habilidades em crianças do ensino fundamental. Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciência e Tecnologia - Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia. Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Ponta Grossa, 2017. 124 f.

CASTRO, A. O. Uso da Programação Scratch para o Desenvolvimento de Habilidades em Crianças do Ensino Fundamental. 2017. 124f. Dissertação (mestrado) em Ensino de Ciência e Tecnologia. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Tecnologia. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, 2017.

ELIAS, A.P.A.J; MOTTA, M.S; KALINKE, M.A. Construção de Objetos de Aprendizagem para a educação básica por meio de um curso sobre o Scratch para estudantes de licenciaturas. RENOTE – Revista Novas Tecnologias na Educação. V. 16 Nº 2, p. 423-433, dezembro, 2018.

FIRÃO, A.S. Um estudo interpretativo sobre o uso do software Scratch na prática docente do professor de matemática. Dissertação (mestrado) em educação matemática. Universidade Estadual Paulista (Unesp), Instituto de Geociências e Ciências Exatas. São Paulo, Rio Claro, 2022.

GAYDECSSKA, B; MASSA, N.P. Pensamento Computacional e Scratch em Pesquisas aplicadas no Brasil. Revista Ensino & Pesquisa. V. 18, nº 1, p. 31- 62, 2020.

GONÇALVES, A.K. E-Books interativos sobre Objetos de Aprendizagem do Scratch para docentes que ensinam matemática nos anos iniciais. 2024.127f. Dissertação (mestrado) em educação em ciências e educação matemática. Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM. Universidade Estadual do Oeste do Paraná/UNIOESTE. Cascavel, 2024.

GUERRA, L.F.L.O. Exploração de situações de aprendizagem da matemática através do Scratch: Um estudo de caso no 4º ano de escolaridade. 2016. 130f. Dissertação (mestrado) em educação. Instituto da educação e Tecnologias Digitais. Universidade de Lisboa, Lisboa, 2016.

KALINKE, M. A.; DEROSSI, B.; JANEGITZ, L. E.; RIBEIRO, M. S. N. Tecnologias em Educação Matemática: um enfoque em lousas digitais e objetos de aprendizagem. In: KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L. F. (Org.). Educação Matemática: pesquisas e possibilidades. Curitiba-PR: Editora UTFPR: 2015, p. 159 186. Disponível em <http://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/1589/1/educacaomatematica.pdf>. Acesso em: 26 set. 2023.

KAMINSKI. M.R; BOSCAROLI, C. Criação de jogos digitais na perspectiva de introdução à modelagem matemática nos anos iniciais. Revista Thema. V.15, nº 4, p. 1538-1548, 2018.

KARAKAYA, CIRIT, D. (2022). Coding in Preschool Science and Mathematics Teaching: Analysis of Scratch Projects of Undergraduate Students. International Journal of Contemporary Educational Research, 9(3), 460-475. <https://doi.org/10.33200/ijcer.1031848>.

KLAUS, V.L.C.A; LÜBECK, M; BOSCAROLI, C. De um caminhar na perspectiva inclusiva a um coletivo de atores em uma formação continuada em tecnologias no ensino de Matemática: reflexões da trajetória. RENCIMA - Revista de Ensino de Ciências e Matemática. V 21, nº 1, 2021.

LEITÃO, D.A; CASTRO, J. B. A construção de recursos digitais de matemática: uma experiência de autoria com o Scratch. VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação-CBIE. 2018. Anais dos Workshops do VII Congresso Brasileiro de Informática na Educação-WCBIE, 2018.

MAZZARO, P. Novas Tecnologias de Informação e Comunicação (NTICS) para aprendizagem de matemática: Scratch como recurso metodológico de ensino e aprendizagem de probabilidade. Dissertação (mestrado) em Ensino de Ciências.2023. 119 f. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Universidade Cruzeiro do Sul, 2023.

MEIRELES, T.F. Desenvolvimento de um Objeto de Aprendizagem de matemática usando o Scratch: da elaboração à construção.217.187f. Dissertação (mestrado) em educação Matemática. Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

MENDES, K.D.S; SILVEIRA, R.C.C.P; GALVÃO, C.M. Revisão integrativa: método de pesquisa para a incorporação de evidências na saúde e na enfermagem. Scielo. Universidade de São Paulo. Escola de Enfermagem de Ribeirão Preto, São Paulo. V. 17 nº 4, p. 758-764, 2008.

MENEZES, F; RENTE, A; CASSIANO, A; ORNELLAS, C. Uma análise das relações entre os jogos e a competição no ensino de matemática: uma questão de Mediação. e-Mosaicos Revista Multidisciplinar de Ensino,

Pesquisa, Extensão e Cultura do Instituto de Aplicação Fernando Rodrigues da Silveira (CAp-UERJ). V 10, nº 23, p.164-182, 2021.

MISHRA, P. KOEHLER, M. J., &. Technological Pedagogical Content Knowledge: a framework for teacher knowledge. Teachers College Record Volume 108, Number 6, pp. 1017–1054, June 2006, Copyright by Teachers College, Columbia University. 2006.

MOMCILOVIC, O.S. Improving Geometry Teaching with Scratch. International Electronic Journal of Mathematics Education- IEJME. SERBIA, 30 January, 2020, V.15, nº 2, p. 1- 8.

MONJELAT, N. Programación de tecnologías para la inclusión social con Scratch: Prácticas sobre el pensamiento computacional en la formación docente. Revista Electrónica Educare. V 23, nº 3, p. 1-25, 2019.

PAPERT, S. M. LOGO: Computadores e Educação. São Paulo, Ed. Brasiliense, 1985. Tradução e prefácio de José A. Valente, da Unicamp, SP.

PAPERT, Seymour: Construcionismo vs. Instrucionismo. Discurso para um público de educadores no Japão (1980). Disponível em: http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html. Acessado em 30 mai. 2024.

PAULI, I; ROSALEN, M. Formação de Professores, Lógica de Programação e Matemática: Uma Somatória Possível? REVISTA MULTIDISCIPLINAR DO NORDESTE DE MINAS. V 23, p. 173-191, 2020.

RAMALHO, R; VENTURA, A. O potencial do scratch no Ensino – Aprendizagem da geometria. Revista de Estudios e Investigación en Psicología y Educación. V. Extr., nº13, p. 1-4, 2017.

RESNICK, Mitchel et al. Scratch: programming for all. MIT Media Laboratory. v. 52, n.11, 60-67, 2009. Disponível em: . Acesso em: 03 mai.2024.

RESNICK, Mitchel. Sowing the Seeds for a More Creative Society. Learning and Leading with Technology. Canada, p.18-22, dec./jan., 2007/2008. Acesso em: <<http://web.media.mit.edu/~mres/papers/Learning-Leading-final.pdf>>. Acesso em: 03 maio. 2024.

ROCHA, F.S.M. Análise de projetos do Scratch desenvolvidos em um curso de formação de professores. 2018.135f. Dissertação (mestrado) em educação matemática. Programa de Pós Graduação em Educação em Ciências e em Matemática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2018.

ROCHA, J.S; JUNIOR, G.C. A implementação da linguagem de programação na educação escolar utilizando o Scratch. Revista Educação Online. V. 14, nº 1, p. 45-66, 2020.

SANTOS A.C. Aprendizagem mediada por linguagens de autoria: o Scratch na visão de três pesquisadores. 2014.108f. Dissertação de mestrado em educação. Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

SANTOS, R.; CORREIA, M. Utilização do recurso digital Scratch na articulação entre as ciências e a matemática na formação de professores. In: V Congresso Internacional TIC e Educação. nº 64, 2018. Utilização do recurso digital Scratch na articulação entre as ciências e a matemática na formação de professores. Lisboa: UIDEF, Instituto de Educação, Universidade de Lisboa, p. 1-8.

SANTOS, R.T. Processo De desenvolvimento de software educativo: um estudo da Prototipação de um software para o ensino de função. Dissertação (Mestrado). 2016. 110 f. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Universidade Federal de Pernambuco Centro de Educação. 2016.

SCRATCH. *Imagine, program, share.* Disponível em: <<http://scratch.mit.edu>>. Acesso em: 01 mai.2024. SCRATCH 3.0. Disponível em: <https://wiki.scratch.mit.edu/wiki/Scratch_3.0>. Acesso em: 01 mai. 2024

SERRA, N.J. Modelização de Organizações Praxeológicas de Sistema de Numeração Decimal: Ensino de Soma e Subtração Aritmética Utilizando a Linguagem de Programação Scratch. Universidade Federal do Pará - (UFPA). Dissertação de Mestrado Acadêmico pelo Instituto de Ensino em Educação Matemático e Científica – IENCI (UFPA). 2022.

SILVA, A.I. Em busca de possibilidades metodológicas para uso do software Scratch na educação básica. 2020.120 f. Dissertação de Mestrado. Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica. Área de Concentração: Ensino, Aprendizagem e Mediações. Universidade Tecnológica Federal do Paraná., Curitiba, 2020.

SILVA, J.M.P; NOGUEIRA, C.A; NEVES, R.S.P; SILVA, P.C.B. The use of Scratch as a pedagogical tool in the perception of who will teach mathematics. Brazilian journal of Science teaching and Technology. V. 15, p. 1-20, 2022.

SILVA, S.M. O Ensino e a Aprendizagem de Estatística nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Dissertação (mestrado) em Ensino. 2021. 92f. Programa de Pós-Graduação Criatividade e Inovação em Metodologias de Ensino Superior. Núcleo de inovação e tecnologias aplicadas ao ensino e extensão. Universidade Federal do Pará, 2021.

SILVA, S.M.M; SZMOSKI, R.M; BASSANI, F. A linguagem da programação como ferramenta facilitadora no ensino de matemática: aprendendo as formas geométricas com o Scratch. 24º Seminário Internacional de Educação, Tecnologia e Sociedade: ensino híbrido, 2019.

SUBRAMANIAM, S.; MAHMUD, M. S.; MAAT, S. S. (2022). Computational thinking in mathematics education: A systematic review. Cypriot Journal of Educational Sciences 17(6). 2029-2044
<https://doi.org/10.18844/cjes.v17i6.7494>

SZYMANSKI, M. L. S; MARTINS, J. B. J. Pesquisas sobre a formação matemática de professores para os anos iniciais do ensino fundamental. Educação (Porto Alegre), v. 40, n. 1, p. 136-146, jan./abr. 2017. Disponível em: <https://revistaseletronicas.pucrs.br/ojs/index.php/faced/article/view/22496> Acesso em: 08 fev. 2024.

TOJEIRO, P.F.S. Noções de topologia nos anos iniciais do ensino fundamental: uma possibilidade investigativa por meio do software Scratch. Dissertação (mestrado). Programa de Pós-Graduação em Ensino Matemática. Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, 2019.

VASCONCELOS, S.P.B.S; MENEZES, E.N.; BRANDÃO, J.C; SANTOS, M.J.C. A formação de Professores e o desenvolvimento do Pensamento Computacional: um panorama de pesquisas no ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental. Tear: Revista de Educação, Ciência e Tecnologia, v.10, nº 2, p. 1-19, 2021.

VIEIRA, S.S; SABATINI, M. Pensamento Computacional com inserção de Scratch numa perspectiva maker. Revista Intersaber. V16, nº37, p. 43- 63, 2021.

Wing, Jeannette. (2006). Computational Thinking. Communications of the ACM. 49. 33-35.
10.1145/1118178.1118215.

ZARZUELO, A.M.; MANTILLA, J.M.R; LOZANO, E.R; DÍAZ, M.J.F. Efecto de Scratch en el Aprendizaje de Conceptos Geométricos de Futuros Docentes de Primaria. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa- Relime. V, 23, nº 3, p. 357 -386. 2020.

ZOPPO, B. M. A contribuição do Scratch como Possibilidade de Material Didático Digital de Matemática no Ensino Fundamental I. 2017.135f. Dissertação (mestrado) em Ensino de Ciência e Matemática. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciência e Matemática. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2017.

Capítulo 8

A plataforma GenIA como possibilidade para o uso de Inteligência Artificial na educação

Marco Aurélio Kalinke⁵⁹

Eloisa Rosotti Navarro⁶⁰

Renata Oliveira Balbino⁶¹

1. Introdução

O cenário educacional está em constante transformação, impulsionada pelo uso de tecnologias, que modificam as formas de ensinar e de aprender. Essas mudanças são especialmente relevantes para a Educação, pois enfrentam os desafios dos métodos pedagógicos tradicionais e apontam novos caminhos para o ensino.

As tecnologias digitais (TD), tais como objetos de aprendizagem (OA), plataformas educacionais e inteligência artificial (IA) fazem parte desse cenário educacional e ampliam as possibilidades de personalização do ensino, podendo-se ajustar às necessidades individuais de cada estudante, oferecendo experiências de aprendizagem diversificadas e adaptativas.

Essas tecnologias são alguns dos temas de estudos do Grupo de Pesquisa sobre Tecnologias na Educação Matemática (GPTEM)⁶², do qual fazem parte os autores desse capítulo, em parceria de professores e pesquisadores que estudam o uso de TD na Educação Matemática. O GPTEM é formado por uma equipe multidisciplinar com pesquisadores das áreas de Matemática, Educação Matemática, Filosofia, Pedagogia, Marketing, Engenharia e Ciência da Computação, que colaboraram na construção de conhecimentos, cujo objetivo comum é contribuir com os estudos que envolvam a presença de TD, da IA, de OA e da programação intuitiva na Educação Matemática. Atualmente, algumas das pesquisas do GPTEM fazem parte de um macroprojeto, que contempla a criação e a validação de uma plataforma, denominada

⁵⁹ Doutor em Educação Matemática. Docente do Programa de pós-graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da UTFPR.

⁶⁰ Doutora em Educação. Docente do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da UFPR.

⁶¹ Doutora em Educação Matemática. Docente do Programa de pós-graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da UTFPR.

⁶² O GPTEM é vinculado ao Programa de pós-graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da UTFPR e ao Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da UFPR. Disponível em: <https://gptem5.wixsite.com/gptem>

GenIA⁶³, no qual também são analisados seu abastecimento, a busca de compreensões sobre ambientes de programação intuitiva, a proposta da interface, aspectos éticos e filosóficos do uso da IA em processos educacionais e a implementação de soluções de programação que atendam as necessidades específicas de recursos educacionais.

No macroprojeto, as pesquisas são voltadas para investigações quanto ao uso das TD na Educação Matemática, buscando tanto fundamentação teórica quanto a criação de ferramentas práticas. Até o momento da escrita deste capítulo (final de 2024), haviam sido defendidas três teses de doutorado (Mattos, 2022; Balbino, 2023; Zatti, 2023) e duas dissertações de mestrado relacionadas ao macroprojeto (Stavny, 2022; Silva, 2023). As pesquisas foram desenvolvidas no âmbito do Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR) e do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

Mattos (2022) explorou compreensões teóricas sobre a relação entre IA e programação intuitiva na Educação Matemática e defendeu a ideia de que “esta relação pode ser propiciada pela utilização de feedback com o uso de metáforas de interface” (Mattos, 2022, p. 145). No intuito de investigar como os recursos da IA podem ser explorados na criação de uma plataforma para construção de OA, Zatti (2023) propôs a GenIA, que vem sendo desenvolvida desde 2018, faz uso de programação intuitiva, é assistida por IA e foi disponibilizada ao público em julho de 2023.

A partir dos estudos sobre Design de Interação e Ergonomia, Balbino (2023) apresentou um conjunto de oito critérios ergonômicos a serem implementados em interfaces de plataformas educacionais assistidas por IA. Além disso, sugeriu a aplicação desses critérios na interface da GenIA, com a apresentação de um protótipo.

Em relação às pesquisas de mestrado, a primeira delas foi conduzida por Stavny (2022), que buscou identificar concepções de um grupo de professores de Matemática relacionadas à construção de OA sobre um conteúdo específico. O produto educacional desenvolvido nessa pesquisa foi um guia metodológico para o uso de OA sobre função polinomial do 1º grau. Silva (2023), por sua vez, realizou uma pesquisa que teve por objetivo a busca por compreensões teórico-filosóficas a respeito das contribuições da IA para a Educação Matemática, a partir do

⁶³ GenIA é um acrônimo formado por Gen (iniciais de gênese) e IA (sigla para Inteligência Artificial). Disponível em: <http://plataformagenia.com/>

estudo da evolução da presença do termo IA na obra de Lévy. Como produto educacional, a autora desenvolveu um glossário no formato de e-book baseado nos conceitos de Pierre Lévy, que busca apresentar definições e conceitos relativos a termos comumente utilizados quando se buscar compreender possibilidades de uso de TD, em especial da IA, em processos educacionais.

Essas pesquisas conectam-se pela exploração de metodologias e práticas que incorporam a IA e as TD no âmbito educacional, investigando possíveis contribuições para os processos de ensino e aprendizagem que o uso dessas tecnologias pode oferecer para a Educação. Atualmente, estão em andamento outras quatro pesquisas de mestrado e cinco de doutorado, direcionadas para o desenvolvimento do macroprojeto e a busca de compreensões sobre o uso TD, especialmente da GenIA, na Educação.

2. Tecnologias Digitais no âmbito educacional

As TD correspondem a todas as tecnologias que se utilizam de dados para criar uma rede de informações compactadas em um aparelho eletrônico, capazes de fornecer uma linguagem acessível e de caráter pragmático para as necessidades do ser humano.

Tais tecnologias são impregnadas de ações humanas, e, hoje, pode-se dizer que a recíproca também é verdadeira, principalmente quando se trata da produção de conhecimento, comunicação e informação. Vale ressaltar aqui que as TD não são a solução de todos os problemas educacionais, mas podem ser um viés importante para atualizar e contribuir com os processos de ensino e de aprendizagem (Navarro, 2015).

A tecnologia está presente nas ações humanas desde a oralidade, a escrita, até os dias atuais, fazendo parte de um processo de evolução e desenvolvimento, ao qual se integram as tecnologias digitais (Lévy, 1996). Primeiramente, tal evolução ocorreu da oralidade primária para a secundária, ou seja, da produção de conhecimento via memória e controle de linguagem, restringindo-o, particularmente, em pequenos grupos, até a escrita, primeiro passo para que o ser humano habitasse um espaço virtual. “Graças à linguagem temos acesso direto ao passado sob a forma de uma imensa coleção de lembranças datadas e de narrativas interiores” (Lévy, 1996, p. 72).

A escrita possibilitou que o ser humano utilizasse a representação gráfica como forma de comunicação e informação, expandindo o pensamento e o conhecimento, que antes se restringia a pequenos grupos.

Com a escrita, e mais ainda com o alfabeto e a imprensa, os modos de conhecimento teóricos e hermenêuticos passaram, portanto, a prevalecer sobre os saberes narrativos e rituais das sociedades orais. A exigência de uma verdade universal, objetiva e crítica só pôde se impor numa ecologia cognitiva largamente estruturada pela escrita, ou, mais exatamente, pela escrita sobre suporte estático (Lévy, 1996, p. 38).

Essa evolução levou o ser humano a ter novas necessidades, à medida em que o fluxo de informações a serem processadas e armazenadas aumentou, acarretando o surgimento das TD. Desde então, tais tecnologias se encontram em constante desenvolvimento, podendo ser consideradas uma ecologia cognitiva que engloba a oralidade (sons, vídeos) e a escrita (imagens, textos), como recursos auxiliares na “execução de ações, na construção do conhecimento e na forma de lidar com a informação” (Navarro, 2015, p. 31).

Segundo Lévy (1999, p. 44), a TD é “uma montagem particular de unidades de processamento, de transmissão, de memória e de interfaces para a entrada e saída de informações”. Ou seja, TD, ser humano e conhecimento formam uma unidade que se desenvolve à medida que novas necessidades surgem.

Pensar a TD apenas como forma de interagir com textos, imagens e sons é limitá-la a processos simples e de reprodução. É necessário considerá-la como um recurso que permite a produção de conhecimento, podendo, portanto, ser utilizada em diferentes contextos sociais, incluindo a Educação.

Lévy (1993) apresenta a TD como uma extensão da memória humana, capaz de construir conhecimento por meio do coletivo formado entre humano e máquina. Tal coletivo se desenvolve a cada descoberta e, consequentemente, a cada evolução. Em se tratando dessa evolução na Educação, Valente (1999) já afirmava que:

[...] a implantação da informática, como auxiliar do processo de construção do conhecimento, implica em mudanças na escola que vão além da formação do professor. É necessário que todos os segmentos da escola – alunos, professores, administradores e comunidade de pais – estejam preparados e suportem as mudanças educacionais necessárias para a formação de um novo profissional. Nesse sentido, a informática é um dos elementos que deverão fazer parte da mudança, porém essa mudança é muito mais profunda do que simplesmente montar laboratórios de computadores na escola e formar professores para a utilização dos mesmos (Valente, 1999, p. 4).

Uma das maneiras de se utilizar as TD na Educação é mobilizar a incorporação de inovações tecnológicas tais como plataformas, realidade virtual, realidade aumentada e OA às práticas pedagógicas, a fim de possibilitar o desenvolvimento da inteligência coletiva, em que o ser humano pode “pensar com” tecnologias (Valente, 2016). Tais recursos possibilitam o uso de TD de forma consciente, organizada e direcionada para o desenvolvimento de determinados

conceitos. Desse modo, a integração das TD ao âmbito educacional deve ser pensada de maneira estratégica, de modo a preparar os estudantes para os desafios de um mundo digital e interconectado.

3. Uso de objetos de aprendizagem e de plataformas digitais

O uso de plataformas e OA na Educação vem ganhando espaço nos processos de ensino e de aprendizagem por possibilitarem a interatividade com as TD de forma organizada e objetiva para produção de conhecimentos específicos. “Esses recursos possibilitam atividades de programação e construção de OA, viabilizando uma forma diferente para a construção do conhecimento por meio da interatividade e interação dos envolvidos nesse processo” (Balbino, 2023, p. 60). As compreensões acerca dos termos “interação” e “interatividade” fundamentam-se em Belloni (2001) que se refere à “interação” como as relações síncronas e assíncronas entre indivíduos e à “interatividade” como uma “característica técnica que significa a possibilidade de o usuário interagir com a máquina” (Belloni, 2001, p. 58). Práticas pedagógicas mediadas pelo uso de OA possibilitam uma abordagem diferente para a construção do conhecimento, por meio da interatividade e da interação dos envolvidos nos processos de ensino e aprendizagem.

Uma das primeiras definições de OA foi desenvolvida por Wiley (2000, p. 7, tradução nossa), que afirmou que os OA podem ser considerados como “qualquer recurso digital que pode ser reusado para suportar a aprendizagem”. Entretanto, atualmente

Vários autores concordam que objetos de aprendizagem devem: (1) ser digitais, isto é, possam ser acessados através do computador, preferencialmente pela Internet; (2) ser pequenos, ou seja, possam ser aprendidos e utilizados no tempo de uma ou duas aulas e (3) focalizar em um objetivo de aprendizagem único, isto é, cada objeto deve ajudar os aprendizes a alcançar o objetivo especificado (Filho, 2007, p. 2).

Em uma evolução comprehensiva foi criada uma vasta quantidade de definições e entendimentos para os OA. Neste capítulo eles serão compreendidos como sendo “qualquer recurso virtual multimídia, que pode ser usado e reutilizado com o intuito de dar suporte à aprendizagem de um conteúdo específico, por meio de atividade interativa, apresentada na forma de animação ou simulação” (Kalinké; Balbino, 2016, p. 25).

Os OA com fins de colaborar com os processos de ensino e aprendizagem podem ser criados com a utilização de softwares, aplicativos, plataformas, entre outros recursos. No presente capítulo a sua criação em plataformas será priorizada, uma vez que se busca apresentar essa prática com o uso da GenIA.

Uma plataforma digital voltada para Educação é um ecossistema de software que integra conceitos científicos com as TD, visando o desenvolvimento desses conceitos de forma flexível e personalizada (Lima, Bastos, Varvakis, 2020). Para que sejam exploradas em atividades educacionais, sugere-se que a criação dos OA aconteça em plataformas digitais gratuitas, como a GenIA, possibilitando sua utilização, compartilhamento e acesso inclusive pelos estudantes em escolas com poucos recursos e que atendam públicos que precisem delas para serem inseridos no mundo digital.

4. GenIA – programação intuitiva e IA

Esta seção se propõe a apresentação da GenIA como uma possibilidade para a integração da IA nos processos educacionais, por meio de plataforma digital com uso de programação intuitiva, apresentando suas funcionalidades e viabilidades de uso em ambientes escolares.

O uso de programação na Educação teve início com Papert (1986) no final da década de 1960, por meio da linguagem de programação LOGO, desenvolvida pela sua equipe no Massachusetts Institute of Technology (MIT). A partir disso, a linguagem de programação foi adentrando os meios educacionais, mas isso ainda ocorre de forma lenta, mesmo que gradativa. Um exemplo está na própria linguagem LOGO, sobre a qual, mesmo após quase quarenta anos da sua criação, ainda são encontradas publicações recentes sobre sua inserção no meio educacional, de forma a contribuir com os processos de ensino e aprendizagem (Schlemmer, 2019; Vick, Campos, Raabe, 2020; Massa, Oliveira, Santos, 2022).

Uma das maneiras de incorporar as linguagens de programação na Educação é fazer uso de uma programação intuitiva, que envolve interfaces visuais e fluxos de trabalho intuitivos, uma programação de fácil elaboração, sem a necessidade de compreensão de um sistema de linguagem complexo (Santos *et al.*, 2008).

A programação intuitiva é uma linguagem de programação destinada à construção de projetos educacionais em ambientes computacionais que não necessitem o domínio de uma linguagem de programação específica e que apresentem características de similaridade, visualização e acessibilidade (Balbino *et al.*, 2021, p. 19).

A IA, por sua vez, ainda carece de uma definição definitiva que seja universalmente aceita. Ela pode ser compreendida como apontado por um dos seus pioneiros (McCarthy *et al.*, 1955) como sendo a capacidade das máquinas para identificar padrões e serem treinadas a partir do abastecimento de dados pré-determinados, buscando a tomada de decisões de forma autônoma, assemelhando-se o máximo possível como pensamento humano. Além disso, Papert

(1986, p. 189), afirma que “a definição de inteligência artificial pode ser restrita ou ampla. Em sentido restrito, a IA preocupa-se em estender a capacidade das máquinas para desempenhar funções que seriam consideradas inteligentes se desempenhadas por pessoas”. Na abordagem aqui proposta não há a pretensão de defini-la, mas sim compreendê-la como uma área de estudo multidisciplinar.

[...] a IA abrange uma enorme variedade de subcampos, do geral (aprendizagem e percepção) até tarefas específicas, como jogos de xadrez, demonstrações de teoremas matemáticos, criação de poesia, direção de um carro em estrada movimentada e diagnóstico de doenças. A IA é relevante para qualquer tarefa intelectual; é verdadeiramente um campo universal (Russell; Norvig, 2021, p. 19, tradução nossa).

Neste panorama, os esforços estão voltados para explorar o uso da GenIA, uma vez que se tem por hipótese que, no âmbito educacional, a IA pode aprimorar tanto os sistemas de gestão quanto os processos de ensino e aprendizagem. Com o suporte de IA, as plataformas educacionais complementam o ensino às necessidades específicas de cada estudante, oferecendo feedback instantâneo, detectando falhas e propondo configurações, o que auxilia no desenvolvimento contínuo dos estudantes. O uso de TD tem provocado transformações na Educação e a adoção de plataformas educacionais assistidas por IA pode apresentar um novo horizonte para a criação e implementação de OA.

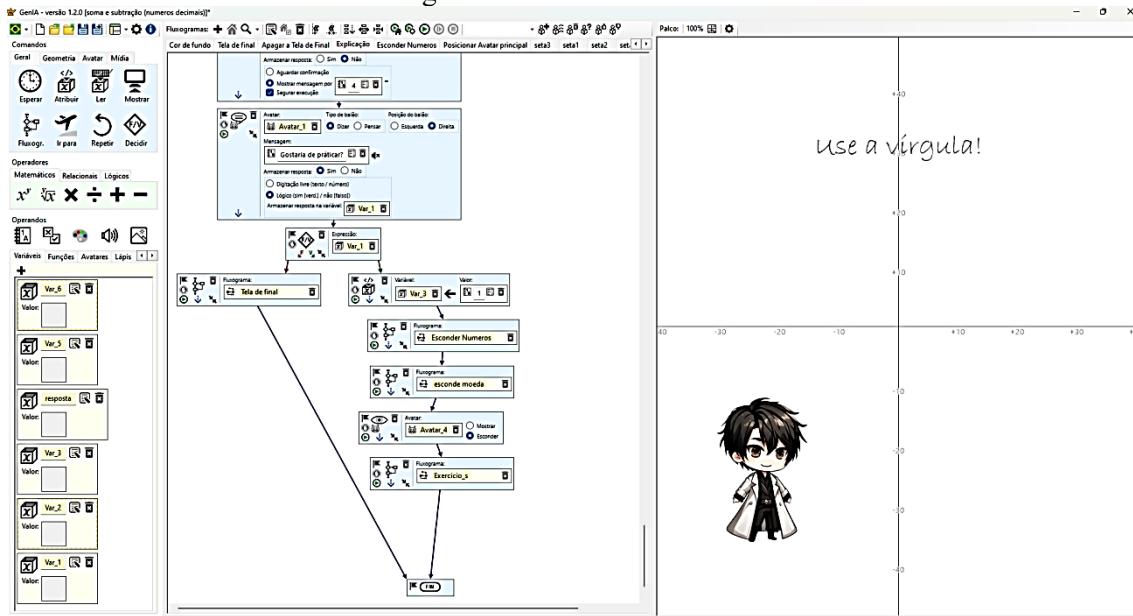
A IA apresenta um vasto leque de possibilidades de aplicação em diversos setores, oferecendo potencial para auxiliar na execução de tarefas e na solução de problemas. Uma das abordagens mais utilizadas é o Aprendizado de Máquina (Machine Learning), que envolve o treinamento para identificar parâmetros específicos, requerendo uma vasta quantidade de exemplos, criação e manutenção constante da base de dados.

A GenIA é uma plataforma com programação intuitiva voltada para a construção de OA de Matemática, e é assistida por IA (Zatti, 2023b). A referida plataforma é o produto educacional de um doutorado profissional, e atualmente sua versão 1.2.0 está disponível para o sistema operacional Windows com execução em ambiente desktop. O acesso é público e gratuito por meio de website⁶⁴ próprio, com código fonte registrado no Instituto Nacional da Propriedade Industrial (INPI), sob o número BR512023001822-8, com certificado emitido em 04 de julho de 2023. No site são disponibilizados, além do arquivo para instalação, tutoriais, vídeos e arquivos com exemplos de OA construídos na GenIA, bem como publicações acadêmicas a ela relacionadas.

⁶⁴ www.plataformagenia.com

As funcionalidades disponíveis na interface da GenIA foram direcionadas pelos aspectos técnicos e prezam pela possibilidade de garantir a interatividade entre usuários e a plataforma. A Figura 1 ilustra a sua interface atual, contendo uma parte da programação de um OA.

Figura 1 – Interface da GenIA



Fonte: Os autores (2024)

A tela inicial é organizada em três áreas dispostas verticalmente. Nas regiões laterais, a área esquerda é dividida em duas partes, abrigando a Barra de Ferramentas, Comandos, Operadores, Operandos, Variáveis, Funções, Avatares e Lápis; já a área posicionada à direita contém o Palco. A área central é reservada para a criação dos OA, na qual ocorrem as respectivas programações. A programação na plataforma se dá mediante o uso de fluxogramas. “Neste tipo de diagrama, os comandos são interligados por setas que indicam a direção do fluxo, isto é, a sequência segundo a qual os comandos serão executados” (Zatti, 2023a, p. 82).

A Barra de Ferramentas, localizada no canto superior direito da tela inicial, disponibiliza comandos de ordem geral, como por exemplo, a escolha do idioma, as ações de abrir, fechar ou salvar um projeto e apresenta informações gerais de autoria da plataforma. As abas Comandos, Operadores e Operandos oferecem as funções de cada uma delas, segundo a natureza de sua finalidade.

Ainda na região lateral esquerda, localizam-se as abas Variáveis, Funções, Avatares e Lápis. É possível criar e gerenciar variáveis dentro do OA que podem ser manipuladas ao longo do projeto. Na aba Funções é possível definir blocos de comandos ou operações de forma organizada e estruturada. Os avatares são personagens que podem interagir com o usuário por

meio de diferentes diálogos, expressões e ações, propiciando a interatividade do usuário com o OA. O lápis geralmente é usado para desenhar ou inserir elementos gráficos no projeto, contribuindo com a criação de ilustrações e elementos visuais, bem como com a personalização da aparência do conteúdo abordado.

O Palco, localizado no lado direito da tela inicial, permite a visualização da execução completa ou parcial do OA. Nele são mostrados os elementos gráficos, como textos e imagens. O Palco também pode ser usado como área de testes, sendo possível simular as ações do usuário e dessa forma fazer ajustes necessários na programação antes da disponibilização do OA para uso. Existe ainda a opção de visualizar o Palco em tela cheia, quando a intenção for utilizar o OA criado, sem explorar os aspectos relativos à sua programação. Assim, professores podem criar seus próprios objetos e disponibilizá-los para serem explorados pelos estudantes ou podem usar a GenIA para que os estudantes criem seus projetos individuais.

A área central da tela inicial da GenIA é destinada para a programação dos OA. Essa região permite a estruturação das ações e interações de forma visual com a utilização dos comandos disponíveis. Sua barra de ferramentas disponibiliza comandos destinados à organização dos fluxogramas e a execução do programa.

A programação por meio de fluxogramas foi implementada visando propiciar uma forma intuitiva de programar. A abordagem gráfica representada por meio de fluxogramas pode ser aplicada não apenas em contextos educacionais, mas também na Computação e na Matemática, permitindo que usuários de diferentes níveis e habilidades visualizem e compreendam a estrutura de um projeto sem a necessidade de um conhecimento aprofundado em programação. Além disso, a programação intuitiva pode reduzir a barreira de entrada para o uso de IA na Educação.

Papert (1986) salienta que o desenvolvimento de habilidades de programação pode estimular o pensamento crítico e a solução de problemas, que são consideradas habilidades essenciais segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). Além disso, a BNCC indica o uso de tecnologias, como calculadora e planilhas eletrônicas, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Dessa forma, os estudantes podem “ser estimulados a desenvolver o pensamento computacional, por meio da interpretação e da elaboração de algoritmos, incluindo aqueles que podem ser representados por fluxogramas” (BNCC, 2018, p. 528). Ao adotar uma abordagem baseada em fluxogramas, a GenIA proporciona uma interface visual que contribui, entre outros

aspectos, com o entendimento da lógica de programação e o desenvolvimento do pensamento computacional.

Pode-se inferir que o uso de uma linguagem de programação estruturada em fluxogramas contribui com o processo de resolução de problemas ao descrever de forma precisa uma sequência finita de etapas. Essa abordagem pode contribuir com a redução do tempo despendido para o aprendizado do uso da GenIA.

Um dos grandes desafios na Educação é a adaptação dos diferentes recursos disponíveis, inclusive das TD, às necessidades individuais dos estudantes. Segundo Almeida (2019), a personalização da aprendizagem é um dos pilares da Educação contemporânea, em que as necessidades e formas de aprendizagem individualizadas são levadas em conta no desenvolvimento do currículo escolar. A GenIA, por meio de suas funcionalidades, permite a personalização de OA, que podem ser ajustados às diferentes realidades de ensino. Ademais, ela se apresenta como uma possibilidade para o uso da IA nos processos educacionais, por se tratar de uma ferramenta de programação intuitiva, baseada em fluxogramas, que tem o potencial de democratizar a criação de OA e promover a personalização do ensino.

É importante ressaltar que a indicação do uso e exploração da IA em processos educacionais se faz presente, inclusive, em documentos emanados do Ministério da Educação, que fazem referência direta ao fato de que conhecer os fundamentos da IA e analisar como os algoritmos de IA podem influenciar usuários, estando entre as competências e habilidades a serem desenvolvidas no Ensino Médio (MEC, 2022).

De acordo com Luckin *et al.* (2016), a IA na Educação tem o potencial de oferecer feedbacks personalizados em tempo real. Na GenIA, a IA possibilita a classificação e identificação de um conteúdo específico. Ao criar, ou usar um OA na GenIA, cada usuário pode indicar a que conteúdo ele está relacionado. Essa indicação auxilia no treinamento dos algoritmos de IA para que eles melhorem sua acurácia. De forma similar, o usuário pode solicitar à IA da GenIA que identifique se determinado projeto se enquadra, ou não, em um conteúdo específico. “A carga dos dados é feita a partir da leitura do arquivo próprio da GenIA, no qual estão inseridos os fluxogramas no formato Json, sendo eles a variável de entrada, e o indicativo de se tratar ou não do conteúdo para o qual o algoritmo está sendo treinado” (Zatti, 2023a, p. 106). Para a realização desta tarefa, a plataforma oferece uma opção que possibilita que os usuários criem rótulos para identificar diferentes conteúdos para selecioná-los para treinamento, na aba ilustrada na Figura 2.

Figura 2 – Aba para criação de contexto para treinamento da IA



Fonte: Os autores (2024)

A personalização do ensino é uma das contribuições que a IA pode trazer para a Educação. Segundo Backer (2019), a IA é capaz de analisar grandes volumes de dados educacionais para identificar padrões de comportamento e desempenho dos estudantes, podendo ajustar os componentes curriculares de acordo com as necessidades individuais. A GenIA está sendo estudada por um grupo de pesquisadores, membros do GPTEM, com o objetivo de incorporar essas capacidades de IA, o que poderá trazer novas possibilidades aos processos educacionais.

Isso encontra eco em Kenski (2011), para quem a evolução tecnológica gera mudanças nos processos educacionais. Prensky (2009) também ressalta que os professores do século XXI precisam estar preparados para atuar em ambientes digitais e interativos. A GenIA pode proporcionar esse tipo de formação, ao possibilitar que professores desenvolvam as habilidades de programação de forma intuitiva e prática, e as explorem com seus estudantes.

Dessa forma, as pesquisas desenvolvidas pelo GPTEM acerca dessa plataforma visam contribuir com o desenvolvimento de novas possibilidades de ensino e de criação de ambientes de aprendizagem, adaptativos e centrados nas necessidades educacionais específicas de cada professor ou estudante.

5. Considerações

O desenvolvimento da plataforma GenIA representa um avanço significativo na integração de IA e programação intuitiva na Educação, especialmente no ensino de Matemática. Ao longo deste capítulo foi explorado como as TD e os OA podem ser aplicados para apoiar os processos de ensino e aprendizagem. A plataforma GenIA, resultado das pesquisas do GPTEM, visa oferecer aos educadores e estudantes uma ferramenta inovadora que possibilita a criação e o uso de OA de maneira intuitiva, acessível e alinhada às demandas pedagógicas contemporâneas.

As TD, abordadas ao longo deste capítulo, possibilitam uma ecologia cognitiva que incorpora a oralidade e a escrita, proporcionando uma maior interatividade entre humanos e tecnologia para a construção de conhecimento. A GenIA surge como um exemplo prático e viável dessa integração, em que o uso de IA e programação intuitiva possibilita a adaptação do

conteúdo ao ritmo e às necessidades de cada estudante. Essa abordagem personalizada não só estimula a autonomia dos estudantes no aprendizado, mas também capacita os professores a adaptarem suas práticas pedagógicas com o auxílio de recursos tecnológicos.

As pesquisas apresentadas sobre o GenIA e o uso de IA na Educação Matemática mostram que essas tecnologias podem promover a criação de ambientes de aprendizagem mais interativos. Por meio da programação intuitiva e de interfaces visuais, a GenIA busca reduzir a complexidade normalmente associada à programação, permitindo que educadores de diferentes áreas possam utilizá-la com relativa facilidade. Isso contribui para uma democratização do acesso à programação, oferecendo aos professores a possibilidade de desenvolver habilidades computacionais sem um conhecimento prévio aprofundado na área.

Além disso, o GenIA oferece funcionalidades ergonômicas e interativas que promovem o engajamento dos usuários, por meio de uma interface visual amigável, fluxogramas, avatares e uma área central destinada à criação de OA. A plataforma foi projetada para tornar a experiência de programação intuitiva e colaborativa, permitindo o desenvolvimento de conteúdos dinâmicos e personalizados. Dessa forma, promove-se uma interatividade direta e constante entre a ferramenta e o usuário, o que potencializa o processo de aprendizagem e desenvolvimento das habilidades cognitivas e computacionais.

Nesse viés, percebe-se o uso da IA no âmbito educacional como uma possibilidade para a personalização do ensino. Com a viabilidade de feedback em tempo real e a identificação de padrões de aprendizagem, a IA permite que a GenIA apresente uma experiência de aprendizagem adaptativa, ajustando-se ao progresso de cada estudante. Esse recurso pode auxiliar os professores na identificação das necessidades de cada estudante, orientando disciplinas pedagógicas mais precisas e alinhadas ao desempenho de cada estudante, e abrindo um novo horizonte de possibilidades na personalização dos processos educacionais.

Por fim, as contribuições da GenIA vão além do uso da IA e da programação intuitiva na Educação. Ela pode oferecer um novo caminho para a construção de metodologias inovadoras, fundamentadas em uma prática pedagógica que valoriza a interação, a interatividade, a acessibilidade e o desenvolvimento contínuo de competências digitais. À medida que a Educação caminha para um futuro cada vez mais digital, ferramentas como a GenIA demonstram o potencial transformador da tecnologia na formação de cidadãos mais preparados para um mundo interconectado e tecnológico, destacando-se como uma contribuição valiosa para a Educação.

Agradecimentos

Agradecemos o apoio do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), concedido por meio da Chamada CNPq/MCTI Nº 10/2023 – Edital Universal.

Agradecemos o apoio da Fundação Araucária, concedido por meio da Chamada Pública Nº 23/2023 – Programa de bolsa produtividade em pesquisa.

Referências

- ALMEIDA, Siderly do Carmo Dahle de. **Convergências entre currículo e tecnologias**. Curitiba: InterSaberes, 2019.
- BALBINO, Renata Oliveira; KALINKE, Marco Aurélio; ZATTI, Evandro Alberto; MATTOS, Silvana Gogolla de; LOSS, Taniele; MOTTA, Marcelo Souza. et al. Programação Intuitiva: em Busca de Compreensões. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 14, n. 36, p. 1-22, 17 dez. 2021. Disponível em: <<https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12121/10053>> Acesso em: 13 nov. 2024.
- BALBINO, Renata Oliveira. **Uma proposta para concepção de interfaces para plataformas educacionais de Matemática assistidas por Inteligência Artificial**. 2023. 206 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, 2023. Disponível em: <<https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/bitstream/handle/1884/86923/R%20-%20T%20-%20RENATA%20OLIVEIRA%20BALBINO.pdf?sequence=1&isAllowed=y>> Acesso em: 13 nov. 2024.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2018.
- BELLONI, Maria Luiza. Mediatisação: Os desafios das novas tecnologias de informação e comunicação. In: BELLONI, Maria Luiza. (Org.). **Educação a Distância**. 2 ed. Campinas: Autores Associados, 2001. p. 53-77.
- FILHO, José Aires de Castro. Objetos de Aprendizagem e sua utilização no ensino de Matemática. **IX Encontro Nacional de Educação Matemática**. 2007.
- KALINKE, Marco Aurélio; BALBINO, Renata Oliveira. Lousas Digitais e Objetos de Aprendizagem. In: KALINKE, M. A.; MOCROSKY, L. F. (org.). **A Lousa Digital & Outras Tecnologias na Educação Matemática**. Curitiba, CRV, 2016, p. 13-32.
- KENSKI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias**: o novo ritmo da informação. 8 ed. São Paulo: Papirus, 2011.
- LÉVY, Pierre. **As tecnologias da Inteligência**: o futuro do pensamento na era da informática. Rio de Janeiro: Ed. 34. 1993.
- LÉVY, Pierre. **O que é virtual?** São Paulo: Ed. 34, 1996.
- LÉVY, Pierre. **Cibercultura**. São Paulo: Editora 34. 1999.
- LIMA, Cláudio de; BASTOS, Rogério Cid; VARVAKIS, Gregório. Digital learning platforms: an integrative review to support internationalization of higher education. **Educação em Revista**, 2020. Disponível em: <<https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=399362880057>> Acesso em: 13 nov. 2024.
- LUCKIN, Rose; HOLMES, Wayne; GRIFFITHS, Mark; FORCIER, Laurie. **Intelligence Unleashed: An Argument for AI in Education**. London: Pearson, 2016. Disponível em: <<https://static.googleusercontent.com/media/edu.google.com/pt-BR//pdfs/Intelligence-Unleashed-Publication.pdf>> Acesso em: 13 nov. 2024.
- MASSA, Nayara Poliana; OLIVEIRA, Guilherme Saramago de; SANTOS, Josely Alves dos. O construcionismo de Seymour Papert e os computadores na Educação. **Cadernos da Fucamp**, v. 21, n. 52, p. 110-122, 2022.
- MATTOS, Silvana Gogolla de. **Em busca de Compreensões sobre Inteligência Artificial e Programação Intuitiva na Educação Matemática**. 2022. 169 f. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, 2022. Disponível em: <

<https://acervodigital.ufpr.br/xmlui/bitstream/handle/1884/80496/R%20-%20T%20-%20SILVANA%20GOGOLLA%20DE%20MATTOS.pdf?sequence=1&isAllowed=y> Acesso em: 11 nov. 2024.

MCCARTHY, John. **A Proposal for The Dartmouth Summer Research Project on Artificial Intelligence.** 1955. Disponível em: <<http://jmc.stanford.edu/articles/dartmouth/dartmouth.pdf>> Acesso em: 11 nov. 2024.

MEC, Ministério da Educação. **Computação:** complemento à BNCC. Brasília, 2022. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/docman/fevereiro-2022-pdf/236791-anexo-ao-parecer-cneceb-n-2-2022-bncc-computacao/file>. Acesso em: 06 jun. 2023.

NAVARRO, Eloisa Rosotti. **Lousa digital:** investigando o uso na rede estadual de ensino com o apoio de um curso de formação. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática, Curitiba, 2015. Disponível em: <https://exatas.ufpr.br/ppgecm/wp-content/uploads/sites/27/2016/09/064_EloisaRosottiNavarro.pdf> Acesso em: 13 nov. 2024.

PAPERT, Seymour. **Logo:** Computadores e educação. Tradução: de José Armando Valente, Beatriz Bitelman e Afira Vianna Ripper. 2. ed. São Paulo: Brasiliense, 1986.

PRENSKY, Marc H. Sapiens Digital: From Digital Immigrants and Digital Natives to Digital Wisdom. In: **Unnovate: Journal of Online Education:** v. 5, Issue 3, Article 1. 2009. Disponível em: <<https://nsuworks.nova.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1020&context=innovate>> Acesso em: 13 nov. 2024.

RUSSELL, Stuart; NORVIG, Peter. **Artificial Intelligence: A Modern Approach.** 4 ed. Harlow: Pearson Education, 2021. Disponível em: <<https://dl.ebooksworld.ir/books/Artificial.Intelligence.A.Modern.Approach.4th.Edition.Peter.Norvig.%20Stuart.Russell.Pearson.9780134610993.EBooksWorld.ir.pdf>> Acesso em: 13 nov. 2024.

SANTOS, Celso Eduardo dos; LOURENÇO, José Luis; JÚNIOR, Alderico R. de Paula; BARBOSA, Luis Filipe Wiltgen. Desenvolvimento de um sistema baseado em blocos para programação intuitiva em microcontroladores. In: **XII Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e VIII Encontro Latino Americano de Pós-Graduação,** 2008. p.1. Paraíba. Anais eletrônicos. Disponível em: <https://www.inicepg.univap.br/cd/INIC_2008/anais/arquivosINIC/INIC0372_01_A.pdf> Acesso em: 11 nov. 2024.

SCHLEMMER, Eliane. Da linguagem logo aos espaços de convivência híbridos e multimodais: percursos da formação docente em tempos de humanidades digitais. In: **Educação e humanidades digitais: aprendizagens; tecnologias e cibercultura.** Coimbra: Pombalina, 2019.

VICK, Vieira Marli; CAMPOS, Flávio; RAABE, André Luís Alice. O legado de Papert e da linguagem logo no brasil. In: **Computação na educação básica: fundamento e experiências.** Porto Alegre: Editora Penso, 2020.

ZATTI, Evandro Alberto. **GenIA:** plataforma para construção de objetos de aprendizagem de matemática que faz uso de programação intuitiva e é assistida por inteligência artificial. 2023. 121 f. Tese (Doutorado) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica, Curitiba, 2023a. <<https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/32509/1/geniaplataformaconstrucaoaprendizagem.pdf>> Acesso em: 13 nov. 2024.

ZATTI, Evandro Alberto. **Plataforma para construção de objetos de aprendizagem de matemática que faz uso de programação intuitiva e é assistida por inteligência artificial.** 2023. 77 f. Produto (Doutorado Profissional) – Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Programa de Pós-Graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica, Curitiba, 2023b. Disponível em: <https://repositorio.utfpr.edu.br/jspui/bitstream/1/32509/2/geniaplataformaconstrucaoaprendizagem_produto.pdf> Acesso em: 13 nov. 2024.

VALENTE, José Armando. Informática na educação no Brasil: análise e contextualização histórica. In: VALENTE, J. A. (Org.). **O computador na sociedade do conhecimento.** Campinas: Unicamp/Nied, 1999. p. 01-27.

VALENTE, José Armando. Integração do pensamento computacional no currículo da educação básica: diferentes estratégias usadas e questões de formação de professores e avaliação do aluno. **Revista e-Curriculum**, v. 14, n. 3. 2016. Disponível em: <<https://revistas.pucsp.br/index.php/curriculum/article/view/29051/20655>> Acesso em: 13 nov. 2024.

WILEY, David Arnim. **Learning Object Design and Sequencing Theory.** Tese (Doutorado) – Department of Instructional Psychology and Technology, Brigham Young University, Provo, Utah, USA, 2000.

Capítulo 9

Transposição didática e a produção de vídeos para a comunicação na Educação Matemática

Liliane Xavier Neves⁶⁵

1. Introdução

Castells (2021) define a comunicação como o compartilhamento de significado por meio da troca de informações em um processo caracterizado por códigos culturais de referência em que as interpretações dependem do contexto das relações sociais. Os modos de compartilhamento transformam a mensagem (McLuhan, 2007) e as tecnologias digitais vem provocando uma transformação cultural, no que diz respeito às formas de se comunicar dos indivíduos.

Na Educação Matemática, uma das causas apontadas como fonte do insucesso na aprendizagem e, consequentemente, da imagem pública da Matemática é a forma como os conceitos inerentes à essa disciplina são comunicados na sala de aula. Ianelli e Scucuglia (2023) afirmam que a imagem pública da Matemática e a imagem dos matemáticos está vinculada a estereótipos negativos, um dos quais apresenta que aprender Matemática está relacionado a poderes e não a habilidades desenvolvidas por qualquer pessoa. Esses autores, apontam o raciocínio matemático como parte importante na constituição de uma sociedade democrática pelo seu papel na atuação cidadã crítica e tomadas de decisões sensatas e informadas. Ianelli e Scucuglia (2023), indicam as tecnologias digitais, em especial, os vídeos, como recursos significativos para o processo de desconstrução da imagem negativa e estereotipada da Matemática e dos matemáticos.

A partir de meados de 2004, inicia-se a quarta fase das tecnologias digitais em Educação Matemática, segundo Borba, Silva e Gadanidis (2018), momento caracterizado pela internet rápida e, consequentemente, pelos diversificados modos de comunicação no ciberespaço. Com o avanço tecnológico, o acesso à recursos de vídeo com interface amigável impulsionam uma revolução na comunicação. Os vídeos são tecnologias digitais que agregam novas possibilidades à comunicação pelo seu potencial multimodal (Neves, 2023) para a construção

⁶⁵ Universidade Estadual de Santa Cruz, <https://orcid.org/0000-0001-8535-0779>, lxneves@uesc.br

do discurso, em particular, o discurso matemático que é construído e compartilhado no ciberespaço.

Nesse contexto, ao discurso matemático proferido na sala de aula por meio da oralidade, na explicação do professor, ou por meio da linguagem escrita, seja no quadro branco ou no livro didático, abre-se novas possibilidades. É importante ressaltar que a internet se transformou aos longos dos anos em uma grandiosa biblioteca, na qual se encontram materiais nos mais diversos formatos. Existem incontáveis vídeos que versam sobre conteúdos de Matemática disponíveis em canais do YouTube e em sites de aprendizagem. Isso levanta alguns questionamentos: a comunicação por meio de vídeos na internet deve ter o mesmo formato daquela proferida em sala de aula? Quais os códigos culturais de referência praticados no ambiente online para a comunicação? E, por fim, quais processos adaptativos vem transformando o conteúdo do saber, a fim de torná-lo apto para o ensino no ambiente online por meio das tecnologias digitais?

A transposição didática se apresenta como um instrumento capaz de auxiliar na análise do processo em que o saber sábio (aquele que os cientistas descobrem) é transformado em saber a ensinar, sendo que esse último está em formato de vídeo. Essas questões serão discutidas neste capítulo.

2. O potencial dos vídeos para a transformação do discurso matemático

Segundo Neves (2020), o acesso às novas tecnologias e a democratização da internet tornou o ciberespaço um lugar para a realização de processos de socialização e de produção e compartilhamento de conhecimentos em novos formatos. As mídias, por meio das tecnologias digitais, ampliam a capacidade de comunicação, além de se colocar como espaço de debates sobre os mais variados temas, influenciando no processo de formação do indivíduo na modernidade. Para Setton (2015) o papel educativo das mídias fica evidente em um cenário de revolução da comunicação, sendo responsáveis pela produção de informações e valores e definindo a cultura da mídia.

As novas formas de relação entre o indivíduo e o conhecimento impostas nesse novo cenário social e cultural, em que as tecnologias digitais têm papel central, demandam mudanças qualitativas nos processos de constituição dos saberes nas instituições educacionais, assim como, um novo papel para o professor, mais alinhado à prática de incentivo à aprendizagem e de utilização crítica das tecnologias digitais para transformar a sala de aula, em particular, de Matemática. De fato, Borba, Neves e Domingues (2018) discutem os resultados de pesquisas que mostram que um número significativo de estudantes brasileiros afirma que utilizam

materiais da internet para estudar, em especial, vídeos, enquanto professores de escolas brasileiras de todos os níveis de ensino afirmam utilizar materiais da internet para preparar as suas aulas.

Considerando que estudantes com frequência substituem os livros didáticos por vídeos da internet e notando a característica dos vídeos de serem recursos que, por vezes é associado ao contar histórias ou à contextualização, essa tecnologia tem potencial para fomentar a construção de imagens alternativas da Matemática pela forma como o discurso é construído. Segundo Neves (2023, p. 58), “o discurso matemático digital trata de quadros (*frames*) conectados que fazem sentido e que expressam uma ideia matemática por meio de um vídeo.”. Mas quais as potencialidades dos vídeos no que diz respeito a transformar o saber sábio em saber a ser ensinado? Como esse recurso tecnológico se diferencia do livro didático?

Ferrés (1995) discute sobre as possibilidades do vídeo como um recurso educacional e afirma que se trata de uma tecnologia que leva a uma nova forma de conhecer, provocando alterações nas formas de pensamento e de expressão e na proporção dos sentidos. De fato, é consenso entre pesquisadores que o conhecimento é construído com uma mídia, seja ela a oralidade, a escrita ou celulares, e está condicionado a ela. Segundo Borba (2012), as tecnologias digitais, como os celulares e a internet, têm moldado não apenas a forma como o conhecimento é produzido, mas também a forma como o indivíduo se constitui enquanto humano. Essa concepção assume que o ser humano é constituído também por tecnologias e as tecnologias são permeadas pelo humano, as quais interagem na produção de conhecimento. Com os vídeos têm-se a possibilidade de construção de conhecimento não apenas com processos dedutivos e analíticos, mas com os sentidos.

Nesse contexto, os vídeos com conteúdo matemático sobressaem como uma tecnologia que estimula os sentidos na produção de conhecimento. A audição e a visão são realçadas pela combinação de imagens, sons, músicas, cenários, expressões corporais, movimentos de câmera, de forma que a compreensão da ideia matemática pode ser construída a partir dessa amalgama na qual processos e leis matemáticas se unem a sensações e emoções para a produção de significados. Essa ideia pode ser percebida no vídeo “Os suspeitos” disponibilizado no site do projeto M3 – Matemática Multimídia. Nesse vídeo nota-se que sons e música suscitam emoções, como medo e surpresa, que auxiliam na atenção e interesse dos telespectadores pela resolução do problema.

Figura 1 – Vídeo “Os suspeitos”

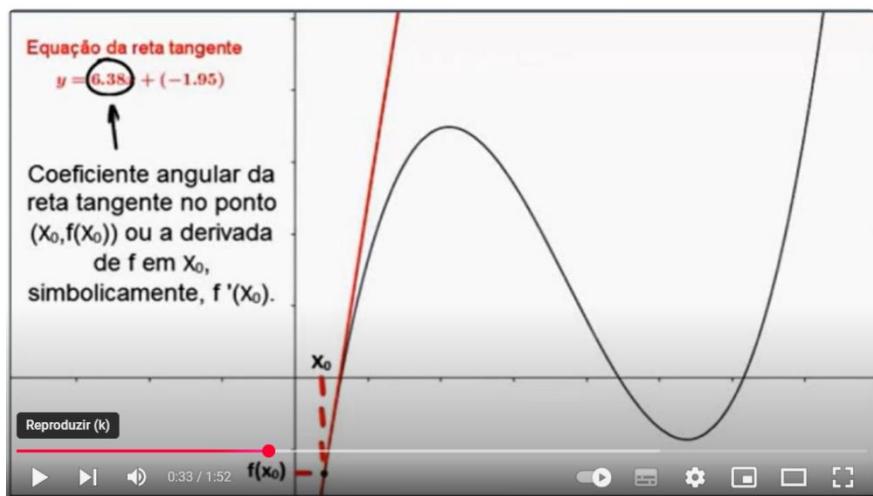


Fonte: <https://m3.ime.unicamp.br/recursos/1180>

O projeto M3 – Matemática multimídia foi realizado no âmbito da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP) e produziu diversos materiais didáticos, incluindo um acervo significativo de vídeos. No vídeo “Os suspeitos” são utilizados diferentes recursos, como sons, música, cenário, linguagem, postura e expressões faciais dos atores, além de suas vestimentas, para construir um discurso em torno de uma interessante aplicação da função Exponencial e do logaritmo.

Outro exemplo é o vídeo que apresenta uma análise do comportamento de uma função quanto aos intervalos de crescimento e decrescimento, e a sua relação com a derivada, que possui uma trilha sonora empolgante.

Figura 2 – Derivada e a análise do comportamento de uma função.



Fonte: <https://youtu.be/YsCIII6kiS8>

O potencial da música, segundo Sekeff (2007), está relacionado a química do cérebro o qual é afetado pela emoção musical e promove, dessa forma, respostas comportamentais. Segundo essa autora, o ritmo induz reações positivas e negativas, além disso, experiências musicais, por mais simples que sejam, solicitam daquele que ouve um estado de prontidão, no qual o movimento de operações mentais é necessário para a compreensão de formas e sentidos. Música e som têm papel de destaque para a construção de significados a partir de discursos proferidos por meio de vídeos ao possibilitar as associações entre conteúdo matemático e emoções. Tais associações são usuais no cinema, que “comunica as ideias por meio das emoções.” (Ferrés, 1995, p. 15).

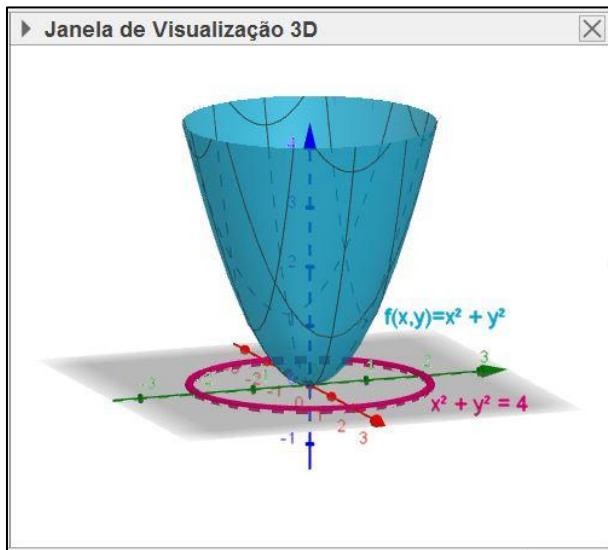
Recursos, como linguagem, imagens, sons, músicas, expressões faciais e gestos são chamados de recursos semióticos e possuem um caráter dinâmico quando compõem um discurso por resultarem “de uma modelagem social e histórica, sendo escolhidos por uma sociedade para representação.” (Kress, 2011, p. 11). Os termos “multisemiótico” e “multimodal” descrevem fenômenos que se constituem a partir da combinação de múltiplos recursos semióticos, os quais se manifestam de diferentes modos. Segundo Borba, Silva e Gadanidis (2018), a utilização de tecnologias e mídias digitais tem estimulado a expressão multimodal, principalmente por meio de vídeos.

Os recursos semióticos se apresentam como uma nova roupagem para os estudos referentes às representações múltiplas, realizados nas décadas de 80 e 90, e registros de representações semióticas, na década de 90. De fato, segundo Borba e Villarreal (2005), na década de 90 as discussões sobre as contribuições da utilização das representações múltiplas para a aprendizagem matemática intensificaram-se devido à acessibilidade a computadores e calculadoras gráficas, além da inserção de softwares matemáticos no mercado. Borba, Silva e Gadanidis (2018) afirmam que, nesse período, a base tecnológica das atividades contava, entre outras coisas, com softwares de geometria dinâmica que promoviam experimentação e visualização pela manipulação de seus recursos e demonstrações realizadas com a prova do arrastar. Dessa forma, o acesso às tecnologias viabilizou a constituição de ambientes de aprendizagem matemática em que diferentes representações eram combinadas para a construção do conhecimento.

Sobre as representações, Goldin e Shteingold (2001) explicam que são sinais, caracteres ou objetos que simbolizam, codificam ou representam algo diferente de si mesmo. Uma fotografia ou um desenho de uma casa são representações diferentes do que significa casa. O numeral 5, como exemplificam Goldin e Shteingold (2001), pode representar um conjunto

particular contendo cinco objetos, determinado pela contagem ou algo abstrato, como uma classe de equivalência de tais conjuntos. Segundo Neves (2020), a Figura 3 ilustra o gráfico que representa a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ na cor azul, a superfície chamada paraboloide. No mesmo espaço tridimensional representado, essa figura tem representado o conjunto das soluções da equação algébrica $x^2 + y^2 = 4$, a circunferência na cor rosa. Essa circunferência representa, no Cálculo Diferencial, a curva de nível de $f(x, y) = x^2 + y^2$, quando $f(x, y) = 4$.

Figura 3 - Exemplo de representação visual.



Fonte: Neves, 2020, p. 26.

Destaca-se na Figura 3 a relação entre os objetos matemáticos representados, a saber, a função $f(x, y) = x^2 + y^2$ e as soluções da equação $x^2 + y^2 = 4$ e o fato de que uma representação pode variar de acordo com o contexto ou o uso. De fato, Neves (2020) explica que uma representação não pode ser entendida de forma isolada, sendo fundamental para a aprendizagem matemática efetiva a combinação de diferentes representações. Na situação ilustrada na Figura 3, por exemplo, o conjunto de pontos referentes à função e à equação, podem ser, respectivamente, representados algebraicamente como $\{(x, y, f(x, y)); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } f(x, y) = x^2 + y^2\}$ e $\{(x, y); x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \text{ e } x^2 + y^2 = 4\}$, no entanto, os gráficos possibilitam um alto nível de análise global do comportamento da função e da equação em detrimento das suas respectivas representações algébricas. Por outro lado, se a intenção for obter generalizações para as ordenadas dos pontos que satisfazem a equação para um valor de x específico, elas podem ser mais bem exploradas a partir de um tratamento algébrico (Neves, 2020).

Friedlander e Tabach (2001) descrevem as funções de representações, como linguagem verbal, representação numérica, algébrica e gráfica. Esses autores afirmam que, com a

linguagem verbal é possível criar um ambiente natural para entender o contexto de um problema e comunicar sua solução, além de enfatizar a conexão entre a matemática, outros domínios acadêmicos e a vida cotidiana; os números são importantes na investigação de casos particulares; os gráficos são intuitivos e sua utilidade como ferramenta matemática varia de acordo com a tarefa em questão; por fim, a representação algébrica é concisa, geral e eficaz na apresentação de padrões e modelos matemáticos, servindo para como um método eficaz para justificar ou provar afirmações gerais.

A combinação de representações para a construção do discurso matemático poderia, portanto, à primeira vista, unir as vantagens e suprir as desvantagens de cada representação, o que, porém, não pode ser garantido de forma generalizada. O que pode ser conjecturado, como resultado das pesquisas realizadas sobre o uso de representações, segundo Goldin e Shteingold (2001), é que o entendimento das relações entre diferentes representações, bem como, as similaridades estruturais e as diferenças entre sistemas de representações resultam no efetivo pensamento matemático.

Smith (1998) enfatiza a importância da coordenação de variadas representações quando se refere ao processo que constrói significados análogos em sistemas de sinais diferentes como uma demonstração de êxito na apreensão de um conceito matemático. Por sua vez, Borba e Confrey (1996) complementam essa ideia afirmando que a Matemática é combinação de representações, o que também é afirmado por O'Halloran (2000). De fato, segundo essa pesquisadora, o discurso matemático é multisemiótico porque envolve o uso dos recursos semióticos simbolismo matemático, imagens e linguagem, principalmente.

Essas ideias estão de acordo com as discussões provenientes da Sistêmico Funcional-Análise do Discurso Multimodal (SF-ADM), abordagem teórica que estuda a organização sistemática de recursos semióticos como ferramentas para criar significado na sociedade. Os recursos semióticos, por sua vez, são definidos nessa abordagem como “um conjunto de recursos modelados através do tempo por sociedades socialmente e culturalmente organizadas.” (Jewitt; Bezemer; O'Halloran, 2016, p. 15). Recursos como linguagem verbal (oral ou escrita), gráficos e imagens, em geral, simbolismo matemático são recursos semióticos, assim como, expressões corporais, música, som, vestuário e mobília. Segundo Neves e Borba (2020), a SF-ADM conjectura-se que as intersemiose, ou seja, a combinação de recursos semióticos, agregam características de cada recurso realocando-as de forma que suas particularidades se estendam possibilitando que o significado do fenômeno multisemiótico. O conceito de multimodalidade compõe os estudos que envolvem a SF-ADM e se refere aos modos pelos

quais os recursos semióticos se manifestam. Os recursos podem se manifestar de forma auditiva, visual ou somática. As modalidades auditiva e visual podem ser vistas na linguagem oral emitida no discurso proferido na sala de aula e no texto escrito no quadro pelo professor ou no livro didático, respectivamente. Os materiais manipuláveis são recursos semióticos que se manifestam por meio da modalidade somática (Neves, 2020).

Santos e Neves (2022), explicam que os significados são atribuídos a partir da escolha e combinação dos recursos semióticos, como também pelos modos nos quais esses recursos são manifestados na comunicação. Esses autores citam o gesto dêitico, representado pelo apontar do dedo indicador. Se na comunicação o dedo indicador é movimentado para a frente e para trás, o significado produzido é de advertência, enquanto, se o movimento for da esquerda para a direita, isso significará uma negação. Claramente que os significados produzidos dependem de outros recursos e modos envolvidos no fenômeno, como a linguagem verbal oral e a intensidade em que é proferida, por exemplo.

Nesse contexto, o vídeo é um recurso multimodal, no qual múltiplos recursos semióticos, nas modalidades auditiva e visual, são combinados para a construção de um discurso. Vale destacar a importância da escolha dos recursos semióticos e a análise da forma como serão combinados, a fim de que produza os significados esperados. Na sala de aula de Matemática, é comum que o professor, ao explicar determinados conteúdos, combine recursos numéricos, gráficos, linguagem verbal, gestos e simbolismo matemático. Dessa forma, vários significados podem ser produzidos com a integração desses recursos, considerando variados modos.

A SF-ADM, como um estudo multisemiótico e multimodal, possibilita a análise de fenômenos multisemióticos e multimodais mais amplos, no que diz respeito à quantidade de recursos semióticos envolvidos, em particular, no fenômeno matemático. Isso traz nova luz e aumenta o interesse em investigar como significados são produzidos por meio de vários modos para a comunicação na sala de aula e na internet. Nesse sentido, as tecnologias ampliam as possibilidades no que se refere à combinação de múltiplos recursos semióticos em atividades matemáticas, como os vídeos, que possibilitam um discurso matemático contextualizado que de tal forma que sejam possíveis novas experiências com a Matemática.

Algo importante a ser notado é sobre como os recursos semióticos são combinados para a construção de um discurso voltado para o ensino de Matemática. Os recursos escolhidos devem se complementar, de forma que possibilite um aprofundamento em torno do conteúdo.

Segundo Neves (2020), a produção de significado resulta da combinação das diferentes competências metafuncionais dos recursos semióticos envolvidos em um fenômeno multimodal. Essa combinação de recursos leva a um novo sentido que é maior do que a simples soma dos significados individuais. Lemke (2010) classifica a essa propriedade como “significado multiplicador”.

Tenho chamado isto de ‘significado multiplicador’, porque as opções de significados de cada mídia multiplicam-se entre si em uma explosão combinatória; em multimídia as possibilidades de significação não são meramente aditivas. [...] Nenhum texto duplica exatamente o que uma figura significa para nós: texto e figura juntos não são duas formas de dizer a mesma coisa; o texto significa mais quando justaposto à figura, e da mesma forma a figura quando colocada ao lado de um texto (Lemke, 2010, p. 462).

Villarreal (1999) investigou os processos por trás do pensamento matemático de estudantes na disciplina Cálculo Diferencial e Integral quando esses utilizavam ambientes computacionais de aprendizagem e os resultados indicaram a deficiência na efetiva coordenação entre representações na realização de atividades matemáticas, pelos estudantes participantes da pesquisa.

Segundo O’Halloran (2011), as tecnologias possuem um grande potencial para expansão de significado. Com os recursos digitais disponíveis na atualidade, potencializados pela internet e suas mídias sociais, novas possibilidades surgem para uma transformação do discurso matemático, tornando possível que novos elementos sejam introduzidos na sala de aula a fim de promoverem uma aprendizagem mais dinâmica e conectada à realidade dos estudantes.

O vídeo é uma tecnologia que pode promover a efetiva combinação de recursos semióticos para a construção de um discurso matemático contextualizado, dinâmico e que possibilite que sejam construídas imagens alternativas sobre a Matemática na sociedade. Trata-se de uma tecnologia caracterizada como um fenômeno multisemiótico e multimodal e sua presença na sala de aula, assim como a sua influência na aprendizagem tem sido discutida no meio acadêmico, em especial, no que se refere à produção de vídeos por estudantes (Borba; Oechsler, 2018).

A Sistêmico Funcional – Análise do Discurso Multimodal (SF – ADM) é uma abordagem que se preocupa com a escolha e combinação de recursos semióticos, tendo foco sobre como o mundo social se constrói através do uso desses recursos para produzir significados, buscando entender e descrever as funções desses recursos como sistemas de significados, além de analisar os sentidos que chegam quando escolhas semióticas são realizadas para a combinação desses recursos (O’Halloran; Lim Fei, 2014). Sendo uma abordagem teórica e

metodológica, a SF-ADM sugere análises baseadas na descrição dos sistemas de significados por diferentes recursos semióticos, de forma que sejam especificadas as unidades de análise para os significados que surgem através de interações semióticas de acordo com o contexto. A noção de recurso semiótico é um conceito chave dessa abordagem.

Formalmente, recursos semióticos são recursos modelados ao longo do tempo através do seu uso para produção de significados em comunidades socialmente e culturalmente organizadas. Linguagem, gestos, expressões faciais, música, som, imagens gráficas, fotografias, pinturas, simbolismo matemático, objetos tridimensionais, imagens em movimento, roupas, cenário, enquadramento, movimento de câmera e espaço são exemplos de recursos semióticos. O'Halloran (2011) apresenta a noção de modalidade (ou modo) como a forma de materialização de um recurso semiótico, podendo ser visual, auditiva ou somática. Neves (2020), exemplifica que a música e o som são materializados pela modalidade auditiva, um gesto ou um gráfico de uma função, pelo modo visual e a modalidade somática diz respeito às sensações físicas do corpo humano na materialização dos recursos semióticos, como o tato, o olfato e o paladar. Na produção de significados em Matemática pode-se observar a modalidade somática quando são realizadas atividades que fazem uso de objetos concretos. O'Halloran (2011) descreve um fenômeno ou evento como multimodal quando envolve duas ou mais modalidades.

O termo multimodalidade é utilizado de forma mais frequente no campo de estudos semióticos para se referir à fenômenos sociais e comunicacionais. De fato, Kress (2010) afirma que a comunicação é, por natureza, multimodal. Da mesma forma, Laburú e Silva (2011) afirmam que o pensar científico se realiza mediante o emprego de uma grande quantidade de signos combinados. Smith (1998), assim como Jewitt, Bezemer e O'Halloran (2016), destaca a funcionalidade dos recursos como motivação para a realização de intersemiose, a fim de obter a expansão do significado. Intersemiose é o termo utilizado na SF – ADM para a combinação de recursos semióticos e os significados resultantes dessas combinações são denominados expansão semântica.

Os três recursos tradicionais do discurso matemático, a saber, linguagem verbal, imagens e simbolismo matemático, ao serem combinados operam intersemioticamente, de forma que levam a um novo significado, um significado diferente da soma dos significados individuais. Com os vídeos, outros recursos semióticos podem ser integrados para a construção do discurso matemático digital (Neves, 2023). Recursos como som, música, linguagem verbal, cenário e variados tipos de efeitos visuais, quando integrados, viabilizam expansões semânticas de tal forma que seja possível um novo olhar para a Matemática.

Neves (2020) destaca a imagem em movimento (trechos de vídeos que compõem o discurso de um novo vídeo) como um especialmente interessante e que pode agregar muito valor a essa discussão. O movimento do gráfico de funções orientado pelas transformações matemáticas, formula visualmente a relação matemática que descreve cada função de uma família de funções apresentada. Esse efeito pode ser realizado com os recursos de animação de softwares, porém o vídeo permite que outros recursos auxiliem no entendimento desse processo, possibilitando uma compreensão mais profunda, com as relações matemáticas sendo integradas ao discurso, assim como a linguagem verbal e a representação numérica.

Laburú, Barros e Silva (2011) afirmam que os significados, em particular, na Matemática, não surgem da adição ou justaposição de cada sistema de representação com o outro, mas da combinação integrada e da multiplicação do significado de cada um com os outros. Nos processos de intersemiose, as escolhas semióticas interagem e combinam multiplicando os significados potenciais, contudo, Jewitt, Bezemer e O'Halloran (2016) explicam que essas escolhas são realizadas em um dado tempo, contexto e cultura que condiciona as combinações que ocorrem nas práticas sociais.

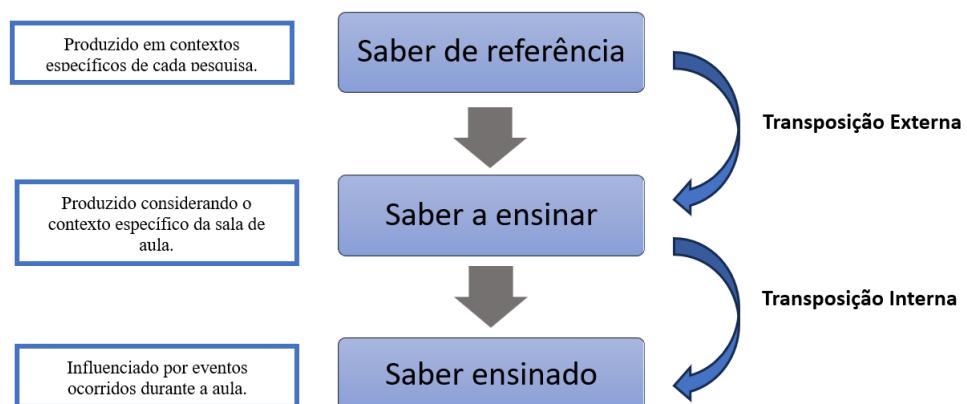
O vídeo deve ser levado para a sala de aula por ser a forma com a qual a nova geração se comunica (Borba; Silva; Gadanidis, 2018), além de permitir que o discurso matemático, se apresente em uma estética que seria impossível utilizando apenas a linguagem verbal. As tecnologias digitais estimulam um novo padrão de discurso caracterizado pela construção de significados via combinação de diferentes recursos semióticos, influenciando os modos de comunicação pela diversidade linguística e cultural (Neves, 2020). De fato, as novas tecnologias permitem diferentes interações de recursos semióticos que estão além das combinações em textos escritos e no discurso oral proferido em sala de aula. Dessa forma, os vídeos contribuem para os estudos multimodais ao ampliar as possibilidades de intersemioses, porém outra questão que se coloca neste cenário versa sobre o processo de transformação do saber elaborado pelos cientistas em saber a ser ensinado, em formato de vídeo, e como as normas próprias do ambiente digital, incidem sobre esse processo, considerando as diretrizes educacionais.

3. Interseções entre os processos de transposição didática e produção de vídeos

O pesquisador francês Yves Chevallard, em 1985, publicou a obra “La Transposition Didactique”, a qual ganhou uma nova edição atualizada e com o acréscimo de um estudo de caso, em 1991 (Leite, 2004). Chevallard (1991) aplicou a transposição didática na Educação

Matemática propondo a análise das transformações pelas quais o conhecimento produzido nas esferas científicas é transposto às esferas escolares e conceituou formalmente essa noção como um processo no qual “um conteúdo do saber que tenha sido definido coo saber a ensinar, sofre, a partir de então, um conjunto de transformações adaptativas que irão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os objetos de ensino.” (Chevallard, 1991, p. 39). Na teoria da transposição didática o saber de referência, que é aquele produzido por pesquisadores em uma linguagem própria do ambiente científico, sofre adaptações para se tornar saber a ensinar, sendo convertido em conteúdo escolar. O saber ensinado é obtido a partir do saber a ensinar, refletindo o que é ensinado na sala de aula, especificamente. Esses dois processos são chamados de transposição didática interna e externa, respectivamente.

Figura 4 - Estrutura da Transposição didática.



Fonte: A própria autora.

A transposição didática é realizada em duas etapas, a saber, Transformação didática externa e interna, considerando o saber de referência, o saber a ensinar e o saber ensinado. Na primeira etapa, o saber de referência, que é aquele que se encontra ainda na linguagem científica com as palavras do teórico original, sofre uma primeira transformação, a fim de se adequar como saber a ensinar. Desta primeira etapa resultam os livros didáticos e vídeos didáticos, por exemplo. Na transposição didática interna, o saber a ensinar se transforma em saber ensinado, sendo este último, aquele saber que é construído na sala de aula, influenciado pelo planejamento e ações didáticas do professor. Nesta etapa o conceito adquire significados próprios do ambiente escolar.

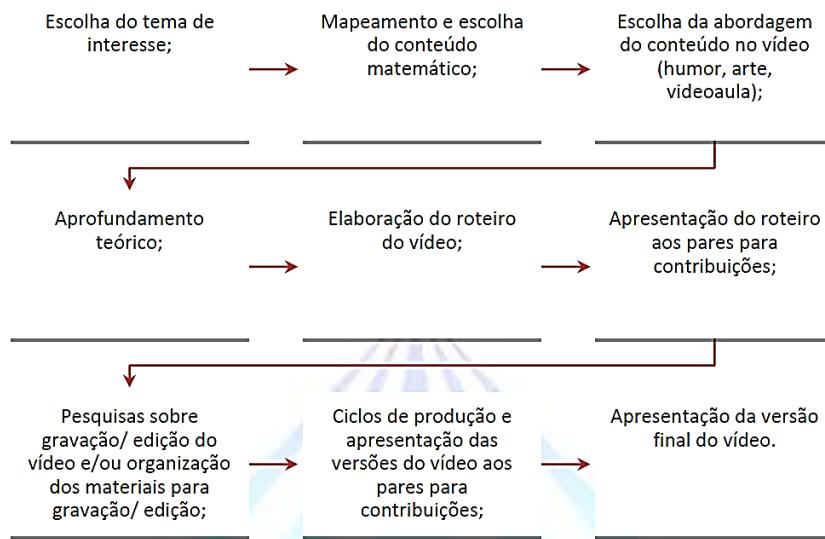
Esses processos envolvem aspectos do contexto em que o conhecimento está sendo trabalhado. Segundo Pais (2011), a transposição didática considera a seleção que ocorre através de uma extensa rede de influências, envolvendo os diversos segmentos do sistema educacional,

a fim de analisar a trajetória do saber. Essas influências “contribuem na redefinição de aspectos conceituais e na reformulação de sua forma de apresentação” (Pais, 2011, p. 19).

Polidoro e Stigar (2010) afirmam que ao estudar a diferenciação entre saber acadêmico e saber escolar, inicia-se um movimento de reflexão em torno dos procedimentos e interesses dos participantes desse processo, a saber, professor e aluno. Além disso, a ideia de que o conhecimento precisaria passar por adaptações ao ser ensinado está alinhada com as estratégias pedagógicas que devem considerar o contexto, de forma ampla, mesmo que as instituições responsáveis pela organização do sistema educacional ainda sigam um modelo de padronização em todos os aspectos. D’Ambrósio (2012) explica que habilidades cognitivas não podem ser avaliadas fora de um contexto cultural. O contexto deve ser considerado no processo de ensino, portanto, faz parte do processo de transposição didática, porém deve-se evitar que seja retirado o foco do conteúdo, o que pode incidir em erros e danos, principalmente, considerando a estrutura de conceitos interligados característico da Matemática.

Assim, podemos entender que a transposição didática é um processo em que o conhecimento científico passa por transformações para ser adequado a um nível menos técnico e acessível a alunos não especializados no tema (Neves; Santos, 2022). No processo de transposição didática é preciso que o professor tenha domínio do conteúdo a ser ensinado, e transforme o conhecimento científico de modo que este não perca suas características originais. Esse entendimento está em conformidade com as etapas do processo de produção de vídeos com conteúdo matemático proposto por Santos e Neves (2022), o qual é constituído de nove etapas (ver Figura 5), sendo o aprofundamento teórico uma etapa que é recorrente, ou seja, é incentivado em todas as outras etapas do processo para que sejam evitados erros ao abordarem o conteúdo.

Figura 5 – Processo de produção de vídeos com conteúdo matemático



Fonte: Santos; Neves, 2022, p. 11

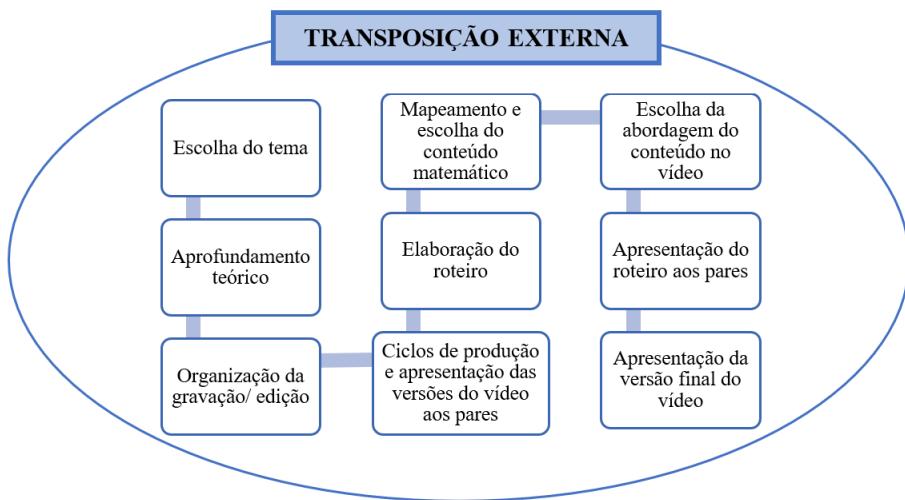
O processo proposto por Santos e Neves (2022) exige uma compreensão aprofundada do conteúdo matemático, de forma que, assim, seja sintetizado e transformado em um discurso matemático digital voltado para o ensino. A transformação do saber de referência em saber a ensinar, por meio de vídeos, requer uma síntese estética com significações lógicas concordantes que é construída a partir das escolhas e combinações apropriadas dos recursos semióticos, a fim de produzir significados. A transposição didática acrescenta aspectos pedagógicos na análise do processo de produção de vídeos com conteúdo matemático, apresentado na Figura 5.

Da mesma forma que o livro didático, o vídeo com conteúdo matemático, que atende etapas específicas de construção do discurso, pode ser visto como o resultado de um processo de transposição didática. A noção de discurso, em particular, de discurso matemático, adotado aqui é aquele definido por Gee (1990), o qual sugere que o discurso é uma associação aceita socialmente entre maneiras de usar a linguagem, de pensar, sentir, acreditar, valorizar e agir que pode ser usada para identificar-se como membro de um grupo ou para sinalizar um papel socialmente significativo. (Gee, 1990).

O caso tratado neste capítulo, refere-se especificamente ao discurso matemático, construído para o meio digital e que, portanto, deve considerar as normas para veiculação no ambiente online, além de estratégias pedagógicas e, claramente, todas as regras próprias da linguagem matemática múltiplo representacional. Nesse contexto, o processo de produção de vídeos com conteúdo matemático proposto por Santos e Neves (2022) está envolto pelo

processo de transposição didática externa, na qual o saber de referência é adaptado para tornar-se saber a ensinar, como ilustrado a seguir.

Figura 6 – Transposição externa e processo de produção de vídeos.



Fonte: A própria autora.

A teoria da transposição didática auxilia de forma significativa o olhar sobre o processo de produção de vídeo como um discurso matemático digital (Neves, 2023), visto que faz emergir em cada etapa elementos relacionados à didática, sobre como o saber de referência é transformado em saber a ensinar, considerando o contexto específico da sala de aula. Isso agrega mais um tipo de conhecimento que faz parte desse processo, a saber, conhecimento técnico, conhecimento do conteúdo e conhecimentos em torno da didática.

Na Educação Matemática pode-se encontrar o discurso matemático em diversos formatos: em formato textual, como livros e artigos ou no formato de discurso matemático digital, como definido por Neves (2023) ao se referir aos vídeos. Dentre as pesquisas desenvolvidas no âmbito do Grupo de pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias Digitais (GPEMTEC), se destacam por tratarem desse tema, as pesquisas que unem a Sistêmico Funcional – Análise do Discurso Multimodal e a transposição didática para a construção de um discurso matemático digital a partir de um problema do livro didático. As análises destas pesquisas lançam a lente teórica sobre as transformações que adaptam o conteúdo matemático para o ambiente online, tendo como mote para iniciar o discurso, um problema do livro didático. Essa discussão será explorada na próxima seção.

4. Pesquisas que envolvem Transposição didática e produção de vídeos no âmbito de um grupo de pesquisa

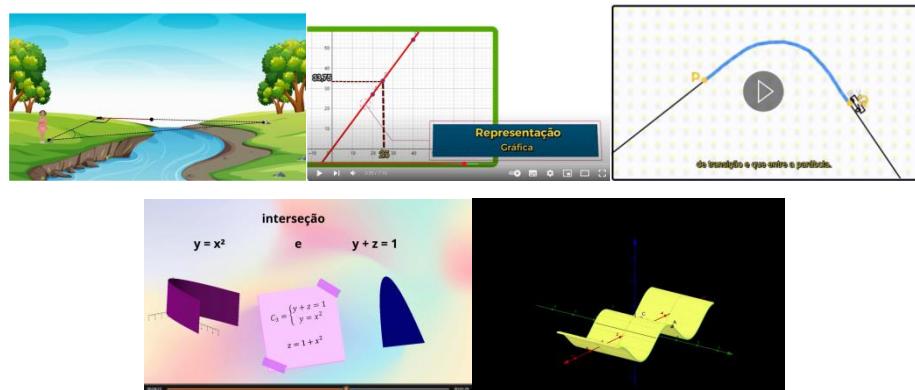
A Transposição Didática começou a fazer parte de pesquisas desenvolvidas por membros do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias Digitais – GPEMTec em 2021. O GPEMTec é um grupo de pesquisa que atua na Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), localiza na cidade de Ilhéus – Bahia e que desenvolve pesquisas em torno da temática da interação de tecnologias digitais com conceitos matemáticos nos processos de ensino e de aprendizagem. Os estudos realizados no âmbito do referido grupo sobre a utilização e a produção de vídeos com conteúdo matemático no contexto do ensino e da aprendizagem impulsionaram a inserção da Transposição Didática (Chevallard, 1991) no seu quadro teórico.

A pesquisas tiveram início com a análise do processo de produção de um vídeo com conteúdo matemático, no que diz respeito a possibilidades de construção do conhecimento matemático. Segundo Santos e Neves (2022), a metodologia qualitativa direcionou o design desta pesquisa, encontrando apoio na Espiral RePARe (Reflexão, Planejamento, Ação, Reflexão) (Magina *et. al*, 2018), a fim de organizar a análise do processo de produção do vídeo “Estatística no Futebol”, produzido pelos pesquisadores. Os resultados dessa pesquisa indicaram que a multimodalidade presente nas etapas da produção do vídeo propicia a exploração de múltiplas representações, fator determinante para a construção de conhecimento matemático. A análise mostrou, ainda, que o processo de produção de vídeos possibilita a exploração do conteúdo matemático de forma contextualizada, viabilizando a pesquisa, a interdisciplinaridade e a exploração do caráter visual e dinâmico da Matemática.

Ao realizar uma avaliação sobre os resultados da pesquisa supracitada, um ponto levantando foi a observação de aspectos didáticos, os quais não foram destacados devido ao referencial teórico, que estava focado na escolha e combinação de recursos semióticos para a construção do discurso no vídeo, a partir da SF-ADM. Isso trouxe um novo encaminhamento para os estudos do grupo, considerando como foco, a partir daí, a análise do processo de transposição didática para a construção do discurso matemático digital (Neves, 2023), sendo problemas selecionados de livros didáticos o mote para as discussões matemáticas abordadas nos vídeos. A SF-ADM continuou fazendo parte do referencial teórico dessas pesquisas, pois analisa a organização do discurso matemático no que diz respeito às escolhas e combinação efetiva dos recursos semióticos, aspecto importante para aprendizagem matemática, tanto para quem produz o vídeo, quanto para quem o assiste.

A partir desses resultados quatro pesquisas foram realizadas com o intuito de analisar o processo de transposição didática de conteúdos matemáticos para o formato de vídeo, tendo como mote problemas do livro didático. Nesses casos, foram observadas questões específicas do conteúdo matemático. Nesse contexto, as pesquisas foram desenvolvidas com conteúdo de trigonometria, função afim, o conceito de derivada, o cálculo do volume de um sólido limitado por superfícies e a noção de superfícies cilíndricas (Neves; Santos; Oliveira, 2023; Silva, 2024; Santos; Neves, 2024).

Figura 7 – Imagens dos vídeos produzidos no GPEMTEC



Fonte: A autora.

Os projetos foram desenvolvidos em momentos diferentes, tendo o intuito de analisar o processo de transposição didática para a construção do discurso matemático digital, porém a equipe também tem interesse em produzir vídeos com conteúdo matemático para disponibilizar a professores e estudantes. Após a escolha dos conteúdos, os livros didáticos foram selecionados e, em seguida os problemas que serviram de mote para a discussão do conteúdo. Os critérios para seleção dos problemas matemáticos foram: (i) Possibilidades de interdisciplinaridade; (ii) Possibilidades de contextualização; (iii) Potencial multimodal; (iv) É possível de diferentes estratégias para resolução. Esses critérios estão alinhados com a construção de um discurso matemático digital contextualizado e dinâmico, coerente com o referencial teórico que privilegia a escolha e combinação de recursos semióticos cuidadosa, além de atenção às normas para veiculação de um discurso no ambiente online em que será compartilhado.

A análise dos livros didáticos, especificamente, dos problemas propostos nesses livros, levantou a discussão entre os pesquisadores sobre a definição de problema matemático. De fato, o que foi observado com a análise dos livros didáticos é que um número significativo desses apresentam exercícios como problemas. Caracterizou-se, então, no âmbito das referidas

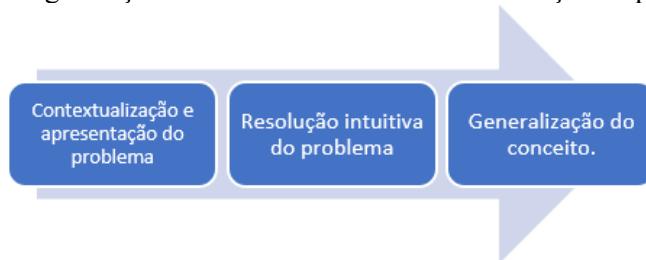
pesquisas, os exercícios como aqueles propostos nos livros didáticos que possuem sentença fechada, podendo ser resolvidos com aplicação de fórmulas, não viabilizando a pesquisa e diferentes formas de solução. Por outro lado, a noção de problema adotada no contexto das pesquisas aqui relatadas trata de que

Exercício, como o próprio nome diz, serve para exercitar, para praticar um determinado algoritmo ou processo. Problema ou problema-processo [...] é a descrição de uma situação onde se procura algo desconhecido e não se tem previamente nenhum algoritmo que garanta sua solução (Dante, 2002, p. 43).

O problema, ponto de partida e orientação para a aprendizagem de novos conceitos matemáticos por meio dos vídeos produzidos, foram, então, elaborados a partir de exercícios do livro didático. Nesse caso, a etapa de elaboração do roteiro do vídeo, foi dedicado inicialmente para a construção dos problemas. O processo de elaboração dos roteiros seguiu um modelo proposto por Neves e Santos (2022), fundamentado na metodologia de resolução de problemas (Ferreira; Martins; Andrade, 2018), a qual sugere que o ensino do conteúdo matemático seja iniciado com situações-problema, de forma que a aprendizagem matemática seja construída a partir de um movimento do concreto para o abstrato, sendo que em cada etapa desse movimento devem se destacar recursos semióticos específicos na produção do vídeo com conteúdo matemático e apenas no final do vídeo, apresenta-se a generalização do conceito matemático foco do vídeo. Essa construção descreve o processo de transposição didática do saber nessas pesquisas.

A transformação do saber de referência ao saber a ensinar, considerando que os vídeos produzidos a partir de problemas do livro didático, se estende por todas as etapas do processo de produção dos vídeos e tem como fim a estrutura apresentada no modelo de roteiro fundamentado na resolução de problemas, a qual segue a organização (Figura 8):

Figura 8: Organização do roteiro fundamental na resolução de problema



Fonte: A autora

As características do conteúdo influenciam a escolha e a combinação dos recursos semióticos, durante o processo de transposição didática. Como exemplo, pode-se citar o vídeo que discutiu o conceito de Superfície cilíndrica, o qual foi contextualizado a partir da

apresentação de situações que envolviam o entendimento da estrutura de algumas superfícies cilíndricas específicas, como o cilindro reto e a “calha”. Em seguida o conceito foi discutido a partir de exemplos específicos de superfícies cilíndricas utilizando a noção intuitiva de uma reta no espaço que percorre um caminho definido por uma curva no espaço. Por fim, discute-se o conceito de superfície cilíndrica generalizada.

A Sistêmico Funcional - Análise do Discurso Multimodal favorece a exploração de diferentes representações para a construção do discurso matemático, um aspecto promissor dos processos de ensino e de aprendizagem. As análises realizadas mostram que o processo de transposição didática vinculado ao processo de produção de vídeos, fornece possibilidades significativas para construção do discurso matemático ao evidenciar aspectos do cenário escolar para o qual o discurso está sendo dirigido, principalmente no que se refere a contextualização do conteúdo matemático.

5. Considerações Finais

A transposição didática tem funcionado para a pesquisa com vídeos, desenvolvidas no âmbito do GPEMTEc, como um suporte para as questões que são próprias do ambiente escolar para o qual o discurso matemático digital é construído. Destaca-se na transposição de conceitos matemáticos, por meio de problemas do livro didático para o vídeo, a escolha e combinação de recursos semióticos, explorando os recursos próprios do vídeo que auxiliam na construção de um discurso dinâmico e a contextualização do conteúdo matemático, a partir do “contar história”. Vale destacar que a combinação apropriada de recursos é essencial para a construção de um discurso que efetivamente facilite a conexão entre as representações, dando acesso às informações que cada recurso traz a partir da sua funcionalidade. A comunicação audiovisual é capaz de fazer emergir emoções como interesse, medo ou encantamento que podem ser associados à Matemática por meio do discurso. Isso pode auxiliar na compreensão da mensagem e na construção de imagens alternativas sobre a Matemática com a utilização efetiva das potencialidades do vídeo, como tecnologia da comunicação e o cuidado com os pressupostos da Transposição didática.

Referências

- BORBA, Marcelo de Carvalho. Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. **ZDM** (Berlin. Print) **JCR**, v. 44, p. 802-814, 2012.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; CONFREY, Jere. A student's construction of transformations of functions in a multiple representational environment. **Educational Studies in Mathematics**, v. 31, p. 319 – 337. 1996.

BORBA, Marcelo de Carvalho; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da; GADANIDIS, George. **Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática**: sala de aula e internet em movimento. 2^a ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora, 2018.

BORBA, Marcelo de Carvalho; NEVES, Liliane Xavier; DOMINGUES, Nilton Silveira. A atuação docente na quarta fase das tecnologias digitais: produção de vídeos como ação colaborativa nas aulas de matemática. **EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, v.9, p.1 – 24. 2018.

BORBA, Marcelo de Carvalho; OECHSLER, Vanessa. Tecnologias na educação: o uso dos vídeos em sala de aula. **Revista brasileira de ensino de ciência e tecnologia**, Ponta Grossa, v. 11, p. 181-213. 2018. DOI: 10.3895/rbect.v11n2.8434

BORBA, Marcelo de Carvalho; VILLARREAL, Mônica Ester. **Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking**: information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation. New York: Springer, 2005.

CASTELLS, Manuel. **O poder da comunicação**. 5^a ed. São Paulo/ Rio de Janeiro: Paz e Terra, 2021.

CHEVALLARD, Yves. **La Transposición Didáctica**: Del saber sabio al saber enseñado. Argentina: La Pensée Sauvage, 1991.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática**: da teoria à prática. 23^a ed. Campinas: Papirus, 2012.

DANTE, Luiz Roberto. **Didática da Resolução de Problemas de Matemática** – 1a a 5a séries. São Paulo: Editora Ática. 12 Ed., 2002.

FERREIRA, N. C.; MARTINS, E. R.; ANDRADE, C. P. Construção do conhecimento matemático na perspectiva da resolução de problemas. In: PINHEIRO, J. M. L; LEAL Jr., L. C. (org.). **A Matemática e seu ensino**: olhares em Educação Matemática. São Paulo: livraria da Física, 2018.

FERRÉS, Joan. **Vídeo e educação**. 2.ed. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995.

FRIEDLANDER, Alex; TABACH, Michal. Promoting multiple representations in algebra. In: CUOCO, Albert A.; CURCIO, Frances R. **The roles of representation in schools Mathematics**. 2001 Yearbook. Reston: NCTM, 2001. p. 173 – 185.

GEE, James Paul. **Social Linguistics and literacies**: ideology in discourses. 3^a Ed. USA/Canada: Routledge, 1990.

GOLDIN, Gerald; SHTEINGOLD, Nina. Systems of representations and the development of mathematical concepts. In: CUOCO, A. A.; CURCIO, F.R. **The roles of representation in schools Mathematics**. 2001 Yearbook. Reston: NCTM, 2001. p. 1 – 23.

IANELLI, Alexandra Carmo Caceres; SILVA, Ricardo Scucuglia Rodrigues da. Imagem da Matemática e multimodalidade em vídeos do “Festival de Vídeos Digitais e Educação Matemática”. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, 12(28), p. 20–45, 2023. Disponível em: <https://doi.org/10.33871/22385800.2023.12.28.20-45>

JEWITT, Carey; BEZEMER, Jeff; O'HALLORAN, Kay. **Introducing Multimodality**. New York: Routledge, 2016.

KRESS, Gunther. **Multimodality**: a social semiotic approach to contemporary communication. New York: Routledge, 2010.

KRESS, Gunther. What is mode? In: JEWITT, Carey. (ed.). **The routledge handbook of multimodal analysis**. London: Routledge, 2011. p. 54–67.

LEITE, Mirian Soares. **Contribuições de Basil Bernstein e Yves Chevallard para a discussão do conhecimento escolar**. 2004. 131 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC-RIO. 2004. Disponível em: <https://www.maxwell.vrac.puc-rio.br/colecao.php?strSecao=resultado&nrSeq=5269&idi=1>

LABURÚ, Carlos Eduardo; BARROS, Marcelo Alves; SILVA, Osmar Henrique Moura da. Multimodos e múltiplas representações, aprendizagem significativa e subjetividade: três referências conciliáveis da educação científica. **Ciência e Educação**, v. 17, n. 2, p. 469 – 487. 2011.

LABURÚ, Carlos Eduardo; SILVA, Osmar Henrique Moura da. Multimodos e múltiplas representações: fundamentos e perspectivas semióticas para a aprendizagem de conceitos científicos. **Investigações em Ensino de Ciências**. v.16, n. 1, p. 7-33. 2011.

LEMKE, Jay L. Letramento metamidiático: transformando significados e mídias. **Trabalhos em Linguística Aplicada**, v. 49, n. 2, p. 455 - 479. 2010.

MAGINA, Sandra Maria Pinto; SANTANA, Eurivalda Ribeiro dos Santos; SANTOS, Aparecido dos; MERLINI, Vera Lúcia. Espiral RePARe: um modelo metodológico de formação de professor centrado na sala de aula. **Revista REAMEC**, v. 6, n. 2, p. 238 - 258, jul/dez 2018. DOI: 10.26571/REAMEC.a2018.v6n2p238-258.16812.

MCLUHAN, Marshall. **Os meios de comunicação como extensão do homem**. São Paulo: Cultrix, 2007.

NEVES, Liliane Xavier. O discurso matemático digital sob a lente da Sistêmico Funcional - Análise do Discurso Multimodal. In: BORBA, Marcelo de Carvalho; XAVIER, José Fábio; SCHUNEMANN, Tieles Aquino (org.). **Educação Matemática: múltiplas visões sobre Tecnologias Digitais**. São Paulo: Livraria da Física, 2023.

NEVES, Liliane Xavier. **Intersemiotics em vídeos produzidos por licenciandos em Matemática da UAB**. 2020. 309 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, campus Rio Claro. 2020. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/191601/neves_lx_dr_rcla.pdf?sequence=7&isAllowed=y.

NEVES, Liliane Xavier; BORBA, Marcelo de Carvalho. Vídeos em Educação Matemática sob a luz da Sistêmico Funcional – Análise do Discurso Multimodal. **UNIÓN (San Cristobal de La Laguna)**, v.16, p.159 - 178, 2020. Disponível em: <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/160/50>.

NEVES, Liliane Xavier; SANTOS, Deivid Irineu de Oliveira. Produção de vídeos com conteúdo matemático: transposição didática de problemas do livro para o vídeo. **Anais CIET:Horizonte**, São Carlos-SP, v. 6, n. 1, 2022. Disponível em: <https://ciet.ufscar.br/submissao/index.php/ciet/article/view/233>.

NEVES, Liliane Xavier; SANTOS, Deivid Irineu de Oliveira; OLIVEIRA, Victor Daniel Santos de. Transposição de problemas de livros didáticos para o discurso matemático Digital In: XX Encontro Baiano de Educação Matemática, 2023, Paulo Afonso. **Anais do XX Encontro Baiano de Educação Matemática**. 2023, p.1 - 12

O'HALLORAN, Kay L. Classroom Discourse in Mathematics: A multisemiotic analysis. **Linguistics and Education**, v. 10, n. 3, p. 359-388. 2000.

O'HALLORAN, Kay. Historical changes in the semiotic landscape: From calculation to computation. In: JEWITT, Carey. (org.). **The routledge handbook of multimodal analysis**. New York: Routledge, 2011. p. 98 – 113.

O'HALLORAN, Kay; LIM FEI, Victor. Systemic functional multimodal discourse analysis. In: NORRIS, Sigrid.; MAIER, Carmen Daniela. **Interactions, Images and Texts: a reader in Multimodality**. Boston/ Berlin: De Gruyter, 2014.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática uma análise da influência francesa**. 3. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2011.

POLIDORO, Lurdes de Fátima; STIGAR, Robson. A Transposição Didática: a passagem do saber científico para o saber escolar. **Ciberteologia - Revista de Teologia & Cultura** - Ano VI, n. 27, 2010. Disponível em: http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/2010/Ensino_religioso/transposicao_ididatica.pdf

SANTOS, Deivid Irineu de Oliveira; NEVES, Liliane Xavier. Multimodalidade e a Construção do Conhecimento Matemático: Uma Análise do Processo de Produção de Vídeos. **Perspectivas da Educação Matemática**, v. 15, n. 38, p. 1-19, 31 ago. 2022.

SANTOS, Deivid Irineu de Oliveira; NEVES, Liliane Xavier. Problemas que envolvem Cálculo Diferencial e Integral e a produção de vídeos com conteúdo matemático In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2024, Campina Grande. **Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: a Educação Matemática num mundo pós-pandêmico**. Meio Digital: Even 3, 2024, p.1 - 12

SEKEFF, Maria de Lourdes. **Da música: seus usos e recursos**. 2. ed. São Paulo: editora UNESP, 2007.

SETTON, Maria da Graça. **Mídia e Educação**. São Paulo: Contexto, 2015.

SILVA, Natália dos Anjos Sena. Discurso matemático digital, GeoGebra e a construção de sólidos para o cálculo de volumes. In: Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 2024, Campina Grande. **Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática: a Educação Matemática num mundo pós-pandêmico**. Meio Digital: Even 3, 2024, p.1 - 12

SMITH, Howard A. Da homogeneidade biológica à heterogeneidade cultural: o papel da construção de significados no desenvolvimento humano. **Educar**, v. 14, p. 115 – 136. 1998.

VILLARREAL, Mônica. Ester. **Pensamento matemático de estudantes universitários de cálculo e tecnologias informáticas**. 1999. 402f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 1999.

Capítulo 10

Análise comparativa de tecnologias digitais em aliança com técnicas usuais do ambiente papel/lápis

Afonso Henriques⁶⁶

Marcos Rogério Neves⁶⁷

Osnildo Andrade Carvalho⁶⁸

1. Introdução

Este capítulo é resultado da pesquisa em desenvolvimento no Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC) da UESC⁶⁹ que tem como objetivo “*investigar as possibilidades de articulação dos processos de produção de modelos PCOC impressos em 3D e de vídeos na constituição de recursos úteis em salas de aulas de matemática visando a aprendizagem dos estudantes, desde a Educação Básica ao Ensino Superior.*” Os Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC) produzidos nesse projeto se utilizam de conhecimentos acerca das organizações praxeológicas de curvas, superfícies, funções de até três variáveis, que admitem representações correspondentes no registro gráfico, partindo da hipótese de que ““ver”⁷⁰ matematicamente os objetos de saberes, principalmente, no espaço tridimensional, nem sempre foi uma tarefa fácil para muitos estudantes em curso de formação inicial em Matemática e áreas afins”. Desenvolver competências matemáticas capazes despertarem diversos interesses e auxiliar o estudante no entendimento desse fenômeno “ver”, visando solucionar problemas correspondentes é uma preocupação de muitos educadores que zelam pela aprendizagem matemática dos estudantes.

Acreditamos que neste despertar, as tecnologias digitais apresentam-se como aliadas, pelo fato de que, existem vários objetos matemáticos tridimensionais trabalhados em sala de aula podem ser analisados e tratados com auxílio das tecnologias digitais, fortalecendo as estratégias de entendimento do referido fenômeno.

⁶⁶ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ henry@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-8783-6008>

⁶⁷ Universidade Estadual de Santa Cruz • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ marcos_neves@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0006-3133-1541>

⁶⁸ Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia • Feira de Santana, BA - Brasil • ✉ osnildocarvalho@ifba.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-5504-4316>

⁶⁹ Universidade Estadual de Santa Cruz

⁷⁰ Ver, aqui possui a ideia de imaginar ou visualizar os objetos de saberes e mobilizar os conceitos correspondentes.

Além disso, o acesso desses objetos que era simplesmente por representação no ambiente papel/lápis, e(ou) virtualmente na tela do computador ou ainda por meio da impressão no papel sulfite, vem ganhando possibilidades de materialização por prototipagem rápida na impressora em 3D, de modo que sejam acessíveis também a “mão livre” ou reproduzidos por materiais diversos, incluindo os recicláveis, como vem sendo feito em diversos Laboratórios de Ensino de Matemática (LEM) nas diversas instituições de formação inicial no Brasil como também no mundo afora.

Nessa perspectiva, emergem, porém diversos questionamentos, tais como: Qual é a tecnologia ou ambiente computacional (*software*) utilizar para auxiliar a formação inicial de estudantes no ensino superior? No contexto da nossa pesquisa em andamento/desenvolvimento, nós já temos respostas para esse questionamento em conformidade com as tecnologias digitais integradas buscando alcançar os objetivos almejados. Com efeito, neste capítulo temos como objetivo apresentar uma análise comparativa das potencialidades e entraves dos ambientes computacionais *Maple* e *GeoGebra*, enquanto tecnologias digitais para a produção matemática nas instituições de ensino, levando em consideração a aliança existente entre as ferramentas que estas tecnologias digitais disponibilizam e as técnicas usuais em ambiente papel/lápis presentes na cultura ou relação de sujeitos com os objetos matemáticos. Para tanto, organizamos este capítulo em seis seções.

Na primeira seção apresentamos as definições que julgamos importantes para o leitor acompanhar melhor as nossas reflexões e contribuições para aprendizagem matemática por mediação das tecnologias digitais na perspectiva de Abordagem Instrumental e Registros de Representação Semióticas. Reforçamos com essas definições a aliança existentes entre as técnicas usuais de ambiente papel/lápis e de ambiente computacional.

Na segunda seção apresentamos, sucintamente, o quadro teórico que adotamos para o desenvolvimento deste capítulo. Na terceira seção, apresenta-se a metodologia que trilhamos. Na quarta seção, intitulada análise de *softwares* apresentamos uma *Modelagem paramétrica* em torno do problema que conjecturamos como referência de análise comparativa das tecnologias digitais (*softwares*) escolhidas para a pesquisa e redação deste capítulo. Na quinta seção apresentamos a análise comparativa propriamente dita com base nas análises realizadas nas seções anteriores. Na sexta seção discorremos sobre as considerações finais consequentes das investigações que constituem este capítulo, e finalmente as referências que utilizadas neste trabalho. Para cumprir a nossa organização passamos, então, para a primeira seção.

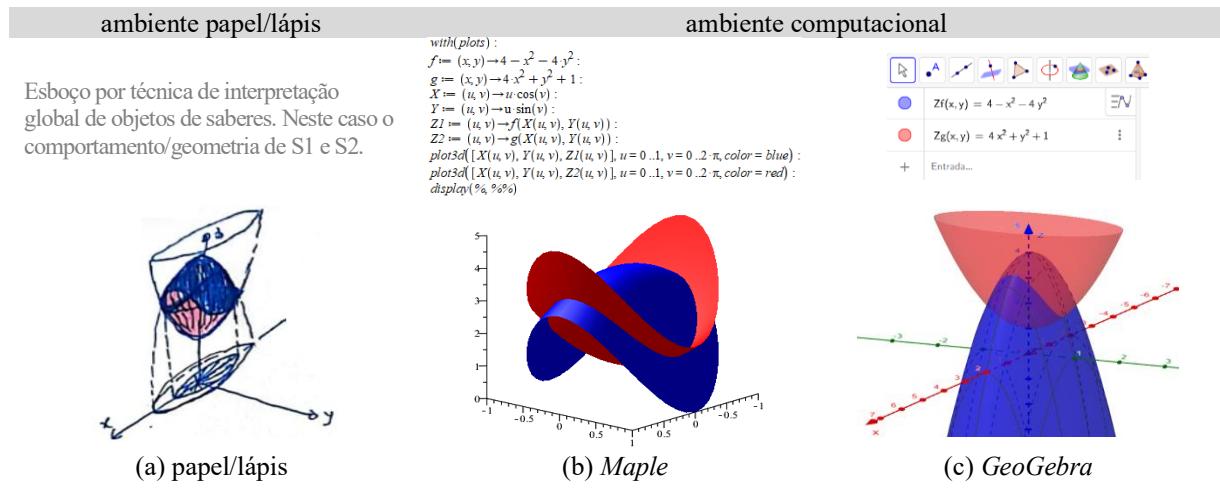
2. Definições preliminares

Apresentamos nesta seção as definições de Crivo-Geométrico; ambiente papel/lápis; ambiente computacional; superfície, *Modelagem paramétrica*, e análise comparativa de tecnologias digitais. Assim, encontramos em Henriques (2019) as seguintes definições:

Um ambiente PAPEL/LÁPIS é um espaço usual de estudo constituído por **Ferramentas** tais como: papel, lápis, caneta, borracha, etc. O quadro, o piloto ou giz também se enquadram nesse ambiente, incluindo toda escrita manual. Um ambiente COMPUTACIONAL é um espaço virtual de estudo constituído de **Ferramentas** tais como: o computador, o *software*, *martphone* e *tablet*, a internet, a calculadora, a Impressora 3D, e de um modo geral, as tecnologias digitais (Henriques, 2019, p. 26, grifo do autor).

A Figura 1, por exemplo, exprime a representação de um espaço tridimensional delimitado por Crivo-Geométrico de duas superfícies (S_1 e S_2) denominadas paraboloides elípticos, sendo um com concavidade voltada para baixo ao longo do eixo z , e o outro com concavidade voltada para cima, de equações dadas por $z = 4 - x^2 - 4y^2$ (Eq₁) e $z = 4x^2 + y^2 + 1$ (Eq₂) respectivamente.

Figura 1: Representação de superfícies de equações Eq₁ e Eq₂ no:



Fonte: Dados da pesquisa

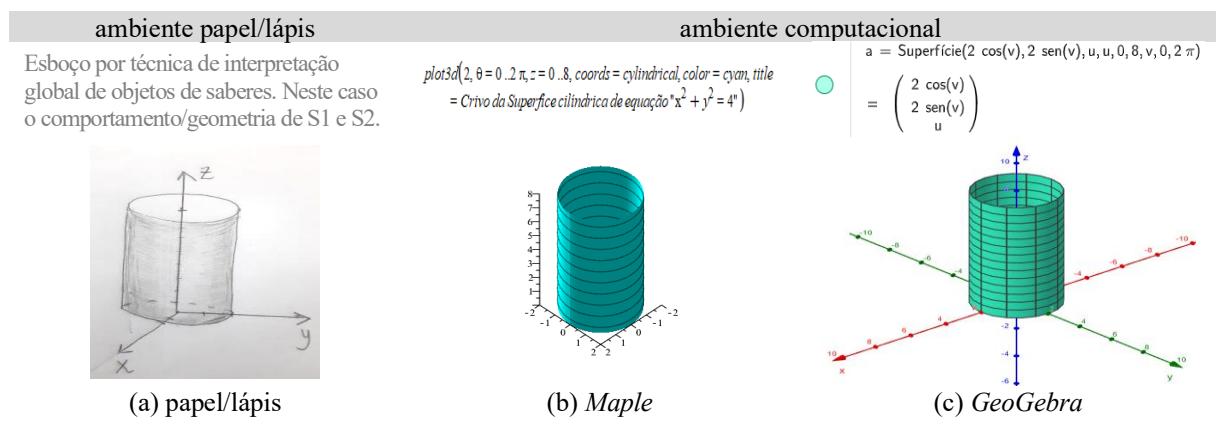
A noção de Crivo-Geométrico é fundamental para compreensão local e global de objetos de saberes matemáticos em torno dos quais são propostas tarefas que permitem comparar as ferramentas disponíveis para as suas realizações. Henriques, Nagamine e Serôdio (2020) sublinham que um:

Crivo-Geométrico é uma conservação ou escolha de parte(s) de uma curva ou de uma superfície, necessária(s) na representação do objeto matemático correspondente no *registro gráfico*. Um segmento, por exemplo, é um crivo de uma curva de curvatura nula (a reta), um arco é um crivo de uma curva de curvatura não nula, um disco é um crivo de uma superfície plana, etc. A reunião conveniente de crivos de curvas pode delimitar uma região plana, ao passo que a reunião conveniente de crivos de

superfícies pode delimitar um sólido enquanto objeto geométrico fechado, no sentido de que existe um limite superior para as distâncias entre os pontos do sólido (Henriques, Nagamine e Serôdio, 2020, p. 258, grifo nosso).

Entendemos, portanto, que representar um objeto matemático no registro gráfico significa conservar ou mobilizar uma de suas partes capaz de exprimi-lo localmente em um dado domínio finito. Assim, podemos inferir que cada uma das três representações indicadas na Figura 1, revela apenas uma parte, ou seja, um crivo da superfície S_1 e da superfície S_2 que permite ao sujeito (estudante) ter uma visualização local e global do objeto representado. Relativamente a *superfícies*, lemos em Henriques e Almouloud (2016, p. 471) que “Uma Superfície S no registro gráfico é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) do espaço tridimensional que satisfazem a equação $F(x, y, z) = 0$ no registro algébrico”. Assim, se $z = f(x, y)$ em que f é uma função de duas variáveis x e y , então os autores ainda sublinham que a “Superfície S de equação $F(x, y, z) = 0$ no registro algébrico é o gráfico da função f , tal que $z = f(x, y)$ ”. Na equação (Eq2) $z = 4x^2 + y^2 + 1$ considerada na Figura 1, por exemplo, podemos escrever $4x^2 + y^2 + 1 - z = 0$. Assim, fazendo $F(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 1 - z$, temos $F(x, y, z) = 0$. Esse tratamento algébrico atende a definição apresentada pelos autores. Ou seja, a superfície de equação $(x, y, z) = 0$ é o gráfico da função $f(x, y) = 4x^2 + y^2 + 1$ e vice-versa. Mas, atenção, pois esse fato nem sempre acontece. Ou seja, nem toda superfície é gráfico da função. Na Matemática, um contraexemplo é suficiente para invalidar a condição “se $z = f(x, y)$ ”. Com efeito, basta considerar a equação $x^2 + y^2 = a^2 \forall a, z \in \mathbb{R}$ que consiste na superfície cilíndrica de raio a ao longo do eixo z . A Figura 2 traz um crivo dessa superfície em que $a = 2$ e $0 \leq z \leq 4$, em ambiente papel/lápis, e computacional *Maple* assim como *GeoGebra*.

Figura 2: Representação de superfícies de equações Eq₁ e Eq₂ no:



Fonte: Dados da pesquisa

Os dois exemplos ilustrados nas Figuras 1 e 2 em dois ambientes de aprendizagem, papel/lápis e computacional mobilizam técnicas distintas visando, porém, o mesmo resultado.

Tanto a percepção da existência de elementos, aparentemente, comuns entre as técnicas utilizadas quanto a percepção de elementos que as distinguem, despertam a necessidade da realização de análise comparativa sistemática das tecnologias digitais em aliança com as técnicas usuais em ambiente papel/lápis. Definimos esse o “análise comparativa de tecnologias digitais” como segue:

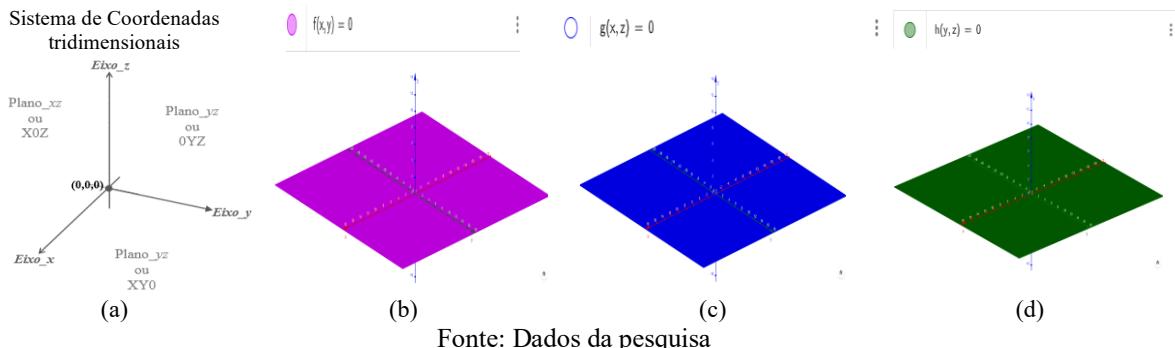
Análise comparativa de tecnologias digitais é uma medida baseada na pesquisa e identificação das ferramentas, comandos ou recursos de duas ou mais tecnologias digitais, que sejam, *smartphones*, celulares, tablets, *softwares*, impressora 3D, ou seja os ambientes computacionais munidas de potencialidades destinadas para o tratamento ou resolução de um mesmo problema ou tarefa institucional. *Definição nossa*.

As ferramentas, comandos ou recursos que são identificadas em uma análise de tecnologias digitais colaboram fortemente na *Modelagem paramétrica* de diversas situações ou problemas de interesses pessoais e(ou) institucionais. No contexto da Educação Matemática o termo modelagem tem um significado que vêm consolidando uma linha de investigação nessa área de conhecimentos. Colaborando com os interesses de formação na perspectiva de Educação Matemática, compartilhamos a *Modelagem paramétrica* definida em Henriques (2021b).

A *Modelagem paramétrica* é uma técnica de geração e manipulação de objetos geométricos, como curvas e superfícies em ambiente computacional, e se apoia na conexão destes objetos e suas inter-relações mediadas por parâmetros especificados que podem ser alterados automaticamente pelo ambiente ou pelo sujeito em tempo real, sem perda da geometria visada (Henriques, 2021b, p. 107, *grifo nosso*).

Essa modelagem colabora na produção dos modelos PCOC citados anteriormente, em que o conceito de parametrização de curvas e de superfícies exerce um papel importante. Nessa produção demos prioridade à praxeologia de *superfícies* de equações do que de *gráficos* de funções não apenas por questões técnicas instrumentais, mas principalmente por questões conceituais. Henriques (2006) mostrou na sua tese que a maioria dos ambientes computacionais instrumentalizados com objetos de saberes tridimensionais não reconhece funções de duas variáveis cujo domínio seja um subconjunto do plano coordenado $X0Z$ ou $0YZ$ (cf. Figura 3(a)). Em outras palavras, nesses ambientes, o gráfico de uma função do tipo $f(x, z)$ (cf. Figura 3(b)) ou $f(y, z)$ (cf. Figura 3(c)) não é diferenciado com o da função $f(x, y)$ (cf. Figura 3(b)). Para verificar isso, basta considerar as funções $f(x, z) = 0$, $f(y, z) = 0$ e $f(x, y) = 0$, cujos gráficos, mediante a mobilização do conceito de função com técnicas do ambiente papel/lápis, consistem nos planos coordenados canônicos tridimensionais. A notação $X0Z$, $0YZ$ e $XY0$ para os referidos planos canônicos foi adotada por Henriques, Farias, Funato e Almouloud (2025, no prelo) e é sugestiva, pois indica que no plano xz a coordenada y é sempre zero, no plano yz , a coordenada x é sempre zero, e no plano xy , z é zero, respectivamente.

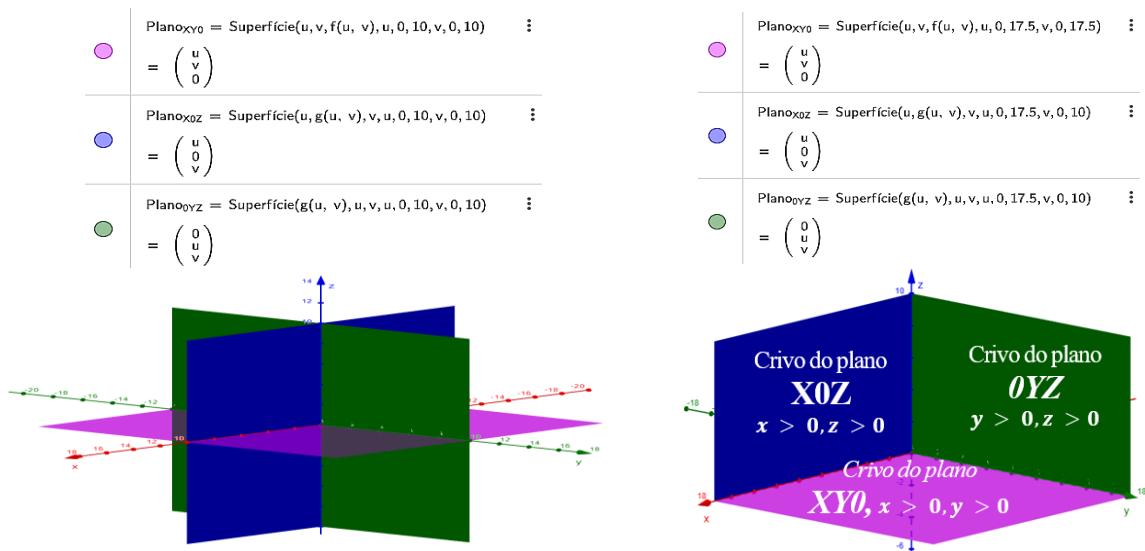
Figura 3: Entrave funcional com domínio no plano $X0Z$ ou no plano $0YZ$ utilizando o *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa

O *entrave funcional*, assim denominado por Henriques (2006) é controlado pelo autor mediante a mobilização do conceito de *superfícies*, e consequentemente pela parametrização de superfícies conforme podemos ver no resultado mostrado na Figura 4.

Figura 4: Crivos de superfícies correspondentes aos planos coordenado tridimensionais produzidos no *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa

Neste capítulo, nos apropriamos tanto dos objetos de saberes apresentados nesta seção quanto dos que apresentaremos com os devidos fundamentos didáticos no Quadro teóricos que descrevemos a seguir.

3. Quadro teórico

Utilizamos como referência o quadro constituído pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) de Duval (1993), a Abordagem Instrumental (ABIN) de Rabardel (1995) e a Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992). Como é de se imaginar, as duas teorias são robustas e ricas de conceitos. Assim, optamos por não descrever sistematicamente os seus elementos teóricos, mas no decorrer do texto, o nosso discurso será

fundamentado nesses elementos sempre que for necessário. Convidamos o(a) leitor(a) para encontrar mais elementos em Duval (1993, 1995, 2012), Chevallard (1992), Rabardel (1995), Henriques e Almouloud (2016), Henriques (2021a).

Não obstante, faremos referências aos *tipos de registro* (a saber, a língua materna, e os registros algébrico, gráfico e numérico em TRRS); às relações Sujeito-instrumento [S-i] (Instrumentação), Instrumento-Objeto [i-O] (Instrumentalização), Sujeito-Objeto [S-O] e Sujeito-Objeto por mediação do instrumento [S(i)-O] do modelo de Situações de Atividade Instrumentais (SAI) em ABIN; bem como potencialidades e entraves das ferramentas tecnológicas (no caso os softwares *Maple* e *GeoGebra*).

Sublinhamos ainda, segundo Henriques (2021), que a relação entre o sujeito e instrumento na tentativa de consolidação da Gênese instrumental ocorre por meio de transferência ou de implementação de situações em ambiente computacional. No entanto, o autor a firma que na

Na *transferência* não há modificação de técnicas de realização para chegar-se ao resultado esperado para a situação, trata-se de uma mera reprodução da situação com o mesmo tratamento que um sujeito faria no ambiente papel/lápis. Ao passo que a *implementação* o acesso ao resultado esperado pode requer a utilização de um comando e a execução da instrução implementada pelo sujeito por mediação da ferramenta. Henriques (2021, p. 254, grifo do autor).

A Gênese instrumental é definida por Rabardel como sendo um processo de aprendizagem no qual uma ferramenta ou artefato torna-se, progressivamente, um instrumento. O “sujeito deve, contudo, desenvolver competências para identificar as situações ou tarefas para as quais um dado instrumento é adequado e em seguida executá-las por meio desse instrumento”. Drijvers (2002, p. 219). A referida identificação ocorre na *instrumentação*, isto é, na relação [s-i] do modelo SAI quando o sujeito busca entender a funcionalidade digital dos recursos do artefato. Com efeito, essa relação só é satisfeita se a *instrumentalização* é efetivada. Isto é, a relação [i-O] é premeditada pelo provedor do instrumento ou pode ser construída pelo sujeito a partir da instrumentação, identificando-se, por conseguinte, as potencialidades da ferramenta. Segundo Henriques (2019)

A **potencialidade** é um conjunto de qualidades de um artefato (ferramenta ou comando, material concreto manipulável, ...) associado aos conhecimentos de um instrumento capaz de permitir ao sujeito agir sobre um objeto do saber, visando solucionar problemas em torno deste objeto de maneira eficiente e, eventualmente dinâmica (Henriques, 2019, p. 46).

O autor explicita, ainda que, “em outras palavras, uma potencialidade de um instrumento, é tudo que as suas ferramentas permitem realizar”. Henriques (2019, p. 46). Além disso, sabendo-se que toda a tecnologia digital é munida de possíveis entraves, esse autor ainda apresenta a seguinte reflexão.

Um **entrave** é um conhecimento característico de um artefato específico (ferramenta ou comando, material concreto manipulável, ...) de um instrumento contendo informações acessíveis ou não pelo sujeito. Tais informações podem ser modificadas pelo sujeito de maneira a solucionar o seu problema.

De fato, conforme acompanhamos nos exemplos anteriores, o entrave funcional não é um motivo de desistência ou abandono dos *softwares* no tratamento de situações de visualização de gráfico de funções, uma vez que todo gráfico de uma função duas variáveis é também uma superfície de uma dada equação, o que favorece a reorganização das estratégias de realização, recorrendo-se, portanto, ao conceito de parametrização e alcançar o resultado esperado nesse mesmo ambiente utilizando novas ferramentas. Desta forma, o entrave é uma oportunidade de manipular as demais funcionalidades para alcançar o objetivo proposto. Com base nesses conhecimentos entramos na metodologia que trilhamos na pesquisa.

4. Metodologia de pesquisa

Nesse neste capítulo seguimos a metodologia de Análise Institucional & Sequência Didática proposta por Henriques (2016), Henriques (2019), organizada em oito etapas desenvolvidas em dois momentos denominados Pesquisa Interna e Pesquisa Externa conforme mostrado na Figura 5.

Figura 5: Os momentos e fases da AI&SD



Fonte: Adaptado de Henriques (2016, p. 4)

Referindo-se ao primeiro momento do desenvolvimento dessa metodologia o autor explica que:

A **Pesquisa Interna** é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por grupo de pesquisadores, sem intervenção de sujeitos externos. Ele conjectura, problematiza, formula hipóteses, questiona-se, define o quadro teórico, os objetivos, descreve o percurso metodológico da sua pesquisa, escolhe, analisa os elementos institucionais específicos e apresenta resultados parciais (Henriques, 2014, grifo nosso).

Em relação ao segundo momento, ele discorre que:

A **Pesquisa Externa** é uma sondagem realizada pelo pesquisador ou por grupo de pesquisadores envolvendo sujeitos externos como público-alvo. É o momento pelo qual o pesquisador aplica os estudos desenvolvidos na pesquisa interna. Por exemplo, a aplicação de uma sequência para o estudo de práticas efetivas de estudantes de uma instituição é uma pesquisa externa (Henriques, 2014, grifo nosso)

Com efeito, as referidas etapas que constituem as duas fases dessa metodologia, esquematizadas na Figura 5 são descritas sucintamente conforme mostrado no Quadro 1. O autor inscreve, no entanto, as seis primeiras etapas na Pesquisa Interna e as duas últimas na Pesquisa Externa.

Quadro 1: Descrição sucinta das etapas da AI&SD

Fase I: Definições e Análises Preliminares	
1ª Etapa	Tomada de decisões iniciais: Definição do tema/assunto da pesquisa, apresentação da problemática e definição dos objetivos gerais e específicos.
2ª Etapa	Identificação de Instituições: Identificação de uma instituição que seja de referência, aplicação ou ambas.
3ª Etapa	Escolha de elementos institucionais: Identificação e escolha dos elementos institucionais a serem analisados.
4ª Etapa	Estudo e apresentação da análise institucional de referência: Estudo dos elementos escolhidos e apresentação de análises correspondentes.
Fase II: Organização, análises e aplicação de uma Sequência Didática	
5ª Etapa	Organização de uma SD: Organização de uma sequência didática contendo tarefas propostas na praxeologia dos objetos de estudo.
6ª Etapa	Análise a priori: Realização de análise matemática/didática de cada tarefa proposta.
7ª Etapa	Aplicação da sequência: Negociação com os elementos da instituição de aplicação e realização do experimento.
8ª Etapa	Análise a posteriori e validação: Análise das práticas efetivas dos sujeitos da pesquisa e validação dos resultados.

Fonte: Adaptação de Henriques (2016)

Essas etapas são posteriormente retomadas e descritas, sistematicamente, pelo autor no desenvolvimento da pesquisa. No presente capítulo restringindo-nos, porém, a 4^a etapa que consiste na análise de elementos institucionais da *Noosfera* na concepção de Chevallard (1992), esquematizados por Henriques, Nagamine A., Nagamine C (2012), Henriques (2019) conforme mostrado no Quadro 2.

Quadro 2: Elementos constituintes de uma instituição



Fonte: Henriques, Nagamine A., Nagamine C (2012, p. 1263), Henriques (2019, p. 3)

Com referência à terceira etapa da AI&SD escolhemos, neste Quadro as **Tecnologias**, enquanto elementos institucionais de referência para este capítulo, realizando particularmente, a análise dos softwares *Maple* e *GeoGebra* que apresentamos a seguir, por entendermos que comparar tecnologias digitais significa conhecer individualmente as ferramentas, comando ou recursos de cada tecnologia ou ambiente computacional envolvido na referida investigação comparativa.

5. Análise de softwares

A análise de um software ou ambiente computacional é um processo intelectual e investigativo de tecnologias digitais, que visa identificar as ferramentas, comandos ou recursos deste ambiente munidos de potencialidades e possíveis entraves que intervêm na resolução de **problemas** ou **tarefas** institucionais em torno de objetos específicos de saberes.

Suponhamos que o **problema** ou **tarefa** seja:

Representar, no registro gráfico, uma simulação de **quatro pratos** fabricados com bordas coloridas, posicionados sobre uma **mesa retangular** de quatro pés, contendo um **cacau verde** em cada prato, utilizando ambientes computacionais providos para estudos matemáticos.

Identificamos esse problema por “Problema de quatro pratos e quatro cacaus” codificado por **[P4PC]**. Sublinhamos que, diante deste ou de qualquer problema emblemático, duas ações são primordiais antes do sujeito pensar em um ambiente computacional que possa utilizar na *Modelagem paramétrica*:

- » A **primeira ação** do sujeito é mobilizar uma praxeologia, no contexto da TAD, isto é, um discurso racional matemático sobre a organização de, ao menos, um objeto do saber capaz de favorecer a modelagem do problema.
- » A **segunda ação** do sujeito é investigar, dentre as tecnologias digitais disponíveis, os ambientes computacionais que proporcionem recursos ou ferramentas munidas de potencialidades que intervêm na modelagem do **problema** ou **tarefa**.

As duas ações intervêm fortemente na aliança existente entre as técnicas usuais de tratamentos de objetos de saberes em ambiente papel/lápis, em diferentes registros de representação, e do ambiente computacional, previstas na instrumentalização deste ambiente com os referidos objetos do saber. A instrumentalização, na concepção de ABIN é, portanto, fundamental na tomada de decisão sobre a segunda ação do sujeito.

Relativamente a **primeira ação**, podemos encontrar na Matemática os objetos de saberes e as respectivas funcionalidades possíveis na abordagem do problema **[P4PC]**. Isso indica que para o estudante compreender a modelagem que desenvolvemos neste problema deve aprender, pelo menos os objetos de saberes apresentados a seguir:

Objeto 1_Geometria Analítica, destacando-se:

Obj01. Quádricas: Elipsóide como simulador na representação de cacaus considerando o seu modelo teórico trivial, notadamente a equação dada por:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \text{ em que } a, b, c \in \mathbb{R}^*.$$

Obj02. Quádricas: Parabolóide como simulador na representação de pratos considerando o seu modelo teórico trivial, notadamente a equação dada por:

- (i) $z = k \pm a(x^2 + y^2)$ ao longo do eixo_z, em que $a, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ou a equação:
- (ii) $y = k \pm a(x^2 + z^2)$ ao longo do eixo_y, em que $a, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ ou a equação:
- (iii) $x = k \pm a(y^2 + z^2)$ ao longo do eixo_x sendo $a, k \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.

Obj03. Quádricas: Superfícies cilíndricas como simuladores de representação dos pés da mesa a partir do modelo teórico pela equação da superfície cilíndrica circular reto, dada por:

- (i) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2$ ao longo da reta que passa por $(x_0, y_0, 0)$ paralela ao eixo_z, sendo $x_0, y_0, k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$ ou por:
- (ii) $(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2 = k^2$ ao longo da reta que passa por $(x_0, 0, z_0)$ paralela ao eixo_y, sendo $x_0, z_0, k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$ ou por:
- (iii) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2$ ao longo da reta que passa por $(0, y_0, z_0)$ paralela ao eixo_x, sendo $y_0, z_0, k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$.

Obj04. Superfícies planas como simuladores de crivos de superfícies que delimitam o espaço 3D finito representante da parte superior da mesa a partir de seus modelos teóricos triviais, notadamente as equações das superfícies planas paralelas aos planos coordenados XY0, X0Z e 0YZ, dadas por $z = z_0$, $y = y_0$ e $x = x_0$, sendo z_0, y_0 e x_0 variáveis didáticas que assumem números reais quaisquer, respectivamente.

Obj05. Posição relativa de pontos (x, y, z) no espaço como simuladores de posicionamento dos pratos sobre a mesa em pontos específicos (x_0, y_0, z_0) .

Obj06. Relação entre as coordenadas cartesianas (x, y, z) e as coordenadas cilíndricas (r, θ, z) de um ponto P do espaço tridimensional, estabelecida segundo as equações $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ e $z = z$, em que r e θ são as coordenadas polares de P' como projeção ortogonal do ponto P sobre o plano_xy.

Obj07. Equações paramétricas, sendo conceito fundamental na Modelagem paramétrica, considerando o modelo:

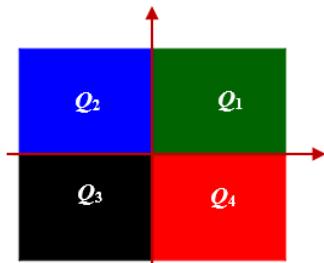
$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

em que $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $z = Z(u, v)$ são as equações paramétricas da superfície S de parâmetros u e v (Henriques, 2021, p. 96).

Obj08. Os quatro quadrantes (Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4) do plano coordenado representados na Figura 6.

Figura 6: Representação de quadrantes nos registros algébricos e gráfico

$$\begin{aligned} Q_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x, 0 < y\} \\ Q_2 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x, 0 > y\} \\ Q_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 > x, 0 < y\} \\ Q_4 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 > x, 0 > y\} \end{aligned}$$



(a) Analiticamente, no registro algébrico

(b) Mapeamento no registro gráfico

Objeto 2_Elementos da Matemática Básica, destacando-se:

Obj09. Função.

Obj010. Circunferência.

Obj011. Trigonometria.

Objeto 3_Topologia, destacando-se o objeto do saber denominado *toro*, com a funcionalidade de simular espessuras de curvas tais como as bordas dos pratos.

Um *toro* em Matemática é uma superfície que consiste em um espaço topológico homeomorfo ao produto de duas circunferências, contidas em dois planos ortogonais entre si, cada [Figura 7], e tem a forma de uma câmara de ar de um automóvel.

Figura 7: Ilustrativo de um processo geométrico de geração de um toro



No contexto geométrico pode-se, portanto, dizer que um toro, enquanto superfície, no registro gráfico, consiste no lugar geométrico tridimensional formado pela revolução da circunferência menor de raio *b* (*Geratriz*) em torno da circunferência maior de raio *a* (*Diretriz*) Henriques (2021b, p. 98). No registro algébrico, a superfície de um toro é parametrizada com as seguintes equações:

$$\begin{cases} X(u, v) = (a + b \cos(v))\cos(u) \\ Y(u, v) = (a + b \cos(v))\sin(u), u, v \in [0, 2\pi], \text{ sendo } b < a \\ Z(u, v) = b \sin(v) \end{cases}$$

em que *a* é o raio da *circunferência Diretriz* do toro e *b* é o raio da *circunferência Geratriz* do **toro**, conforme mostrado na Figura 2 Henriques (2021, p. 98).

Na topologia, diz-se que dois espaços topológicos E_1 e E_2 são homeomorfos se E_1 pode ser transformado em E_2 ou vice-versa, através de deformações contínuas, sem rasgar ou colar novos crivos ou partes de espaços. Assim, o *toro* é, de fato, uma superfície homeomorfa ao produto de duas circunferências. Nesse caso, os dois espaços E_1 e E_2 são circunferências de raios distintos.

Sobre a **segunda ação** do sujeito diante do problema emblemático Problema [P4PC], consideramos, inicialmente, o ambiente computacional *Maple* como tecnologia digital. Para isso, devemos imediatamente, nos preocupar em identificar as suas ferramentas que permitem representar superfícies no registro gráfico a partir das parametrizações correspondentes no registro algébrico.

O **Maple** é organizado com pacotes que agrupam ferramentas ou comandos para o tratamento de objetos de áreas de conhecimentos específicos. Assim, tem-se os pacotes para: Gráficos, Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Objetos geométricos, Equações Diferenciais etc. Para se carregar um pacote, utiliza-se o comando **with** segundo a sintaxe, **with(np)**, onde **np** é o nome do pacote que se deseja carregar (Henriques, 2021b, p. 61, grifo do autor).

Além disso, o seu *kernel* (núcleo) “parte principal do sistema operacional de um computador, que exerce a função de estabelecer a conexão entre o *hardware* e os *softwares* executados pelo computador” Henriques (2021b, p.61), também guarda comandos básicos, a exemplo do “*plot3d*”

instrumentalizado com diferentes sintaxes. Apresentam-se no Quadro 3 duas dessas sintaxes juntamente com as respectivas potencialidades.

Quadro 3: Ferramentas do ambiente computacional *Maple*

N.	Ferramenta	Sintaxe	Potencialidade
1	<i>plot3d</i>	<i>Plot3d(Expef, u=a..b, v=c..d, <opções>)</i>	Permitir a representação de funções de duas variáveis no registro gráfico.
2	<i>plot3d</i>	<i>plot3d([X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)], u=a..b, v=c..d, <opções>)</i>	Permitir a representação de superfícies parametrizadas.

Fonte: Henriques (2021b, p. 95)

Na **Sintaxe N.1:** *Expef* indica a expressão da função f . \mathbf{u} e \mathbf{v} são as variáveis da função f . \mathbf{a} e \mathbf{b} são necessariamente constantes, ao passo que \mathbf{c} e \mathbf{d} podem não ser constantes. Isto é, \mathbf{c} e \mathbf{d} podem, eventualmente, ser expressões que dependem de \mathbf{u} . Na **Sintaxe N.2:** $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $z = Z(u, v)$ indicam as equações paramétricas da superfície S . Isto é:

$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

u e v são as variáveis das equações paramétricas da superfície S (Henriques, 2021b, p. 95).

Neste contexto e conforme se pode observar na Figura 8, a configuração de cada pé da mesa pode ser interpretada como um objeto que se aproxima, matematicamente, ao crivo de uma Superfície Quádrica, em especial o **Obj03 (i)** (*cilíndrico*) apresentado anteriormente pelo modelo teórico que retomamos na Figura 8:

Figura 8: Visualização de uma mesa retangular e tratamento algébrico da equação trivial da superfície cilíndrica



(i) $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2$ ao longo da reta que passa por $(x_0, y_0, 0)$ paralela ao eixo z , sendo $x_0, y_0, k \in \mathbb{R}$ com $k \neq 0$.

Podemos, inicialmente, simular o posicionamento de um pé da mesa ao longo do eixo z . Essa escolha indica que $x_0 = y_0 = 0$. Assim, (i) se reduz a:

$$x^2 + y^2 = k^2$$

Fonte: Dados da pesquisa

Nesse âmbito, podemos utilizar a praxeologia do sexto objeto (**Obj06**) juntamente com a parametrização de uma superfície qualquer, denotada por $[X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)]$ com $u, v \in \mathbb{R}$, em sintaxes do *Maple* (cf. Quadro 3) e representada no sétimo objeto (**Obj07**) por:

$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases} \quad (\text{Eq1})$$

em que $X(u, v)$, $Y(u, v)$, $Z(u, v)$ indicam as equações paramétricas de uma superfície S . Assim, a superfície cilíndrica de equação (i) reduzida na Figura 8, admite a parametrização dada por:

$$SC(u, v) = \begin{cases} X(u, v) = k \cos(v) \\ Y(u, v) = k \sin(v), u \in \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi] \\ Z(u, v) = u \end{cases} \quad (\text{Eq2})$$

Essa parametrização obtida mediante o tratamento algébrico dos objetos de saberes com técnicas de ambiente papel/lápis visando solucionar o problema em pauta, reforça a referida aliança. Assim, com referência em ABIN, a relação entre o sujeito (*S: Estudante*) e o objeto (*O: Superfície cilíndrica parametrizada*) mediada pelo instrumento (*i: Maple*) pode ocorrer, imediatamente, mobilizando, porém, o conhecimento das ferramentas indicadas no Quadro 3, as suas sintaxes e as suas potencialidades. Colocando esses conhecimentos em prática, podemos modelar o problema **[P4PC]** utilizando esse ambiente. Para isso, desenvolvemos a *Modelagem paramétrica* que organizamos em grupos de execução, começando com a simulação dos pés da mesa, conforme mostrado no Quadro 4.

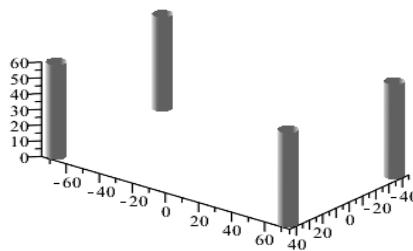
Quadro 4: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *Maple*.

Grupo de Execução (GE 1M⁷¹): Carregar pacote e declaração de variáveis globais	
<pre>with(plots): k := 0.5; xdoPê := 4; ydoPê := 7; zdoPê := 0 Fator := 10; alturaDosPes := 6: XSC := (u, v) → k cos(v): YSC := (u, v) → k sin(v): ZSC := (u, v) → u:</pre>	# Carrega o pacote <i>plots</i> de representação de objetos no registro gráfico. # Variáveis locais e globais (raio k, localização de pés da mesa sobre o piso, fator transformador de mm em cm). # Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas cilíndrica.
Grupo de Execução (GE 2M): Modelagem de crivos de superfícies cilíndricas representantes dos pés	
<pre>PésDaMesa := plot3d({[-xdoPê+XSCp(u, v), -ydoPê+YSCp(u, v), zdoPê+ZSCp(u, v)], [-xdoPê+XSCp(u, v), ydoPê+YSCp(u, v), zdoPê+ZSCp(u, v)], [xdoPê+XSCp(u, v), -ydoPê+YSCp(u, v), zdoPê+ZSCp(u, v)], [xdoPê+XSCp(u, v), ydoPê+YSCp(u, v), zdoPê+ZSCp(u, v)]}, u = -alturaDosPes .. 0, theta = 0 .. 2*Pi, color = gold): display(PésDaMesa)</pre>	

Fonte: Dados da pesquisa

Destacamos com cor diferente, a parametrização no *Maple*, de cada crivo de superfície cilíndrica simulador de cada pé da mesa para favorecer a sua identificação visual. A execução de cada instrução apresentada do primeiro ao segundo grupo com a tecla, “Enter” retorna o resultado apresentado na Figura 9. Essa implementação é também uma estratégia viva para a aprendizagem da Geometria Analítica e Espacial pelos estudantes desde o Ensino Médio ao Ensino Superior.

Figura 9: Simulação de representação dos pés no ambiente computacional *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

⁷¹ GE 1M significa Grupo de Execução 1 no *Maple*. Logo os próximos serão representados por GE 2M, GE 3M, ...

A próxima etapa da modelagem, visa a simulação da mesa como espaço tridimensional delimitado por crivos de superfícies planas paralelas aos planos coordenado XY0, X0Z e 0YZ, apropriando-se da praxeologia dos objetos de saberes **Obj04** e **Obj07** vistos anteriormente. Com efeito, apresenta-se no Quadro 5 o terceiro e quarto grupo de execução instrumentalizando a referida simulação considerando uma mesa de dimensões $120 \times 160 \times 2 \text{ cm}^3$.

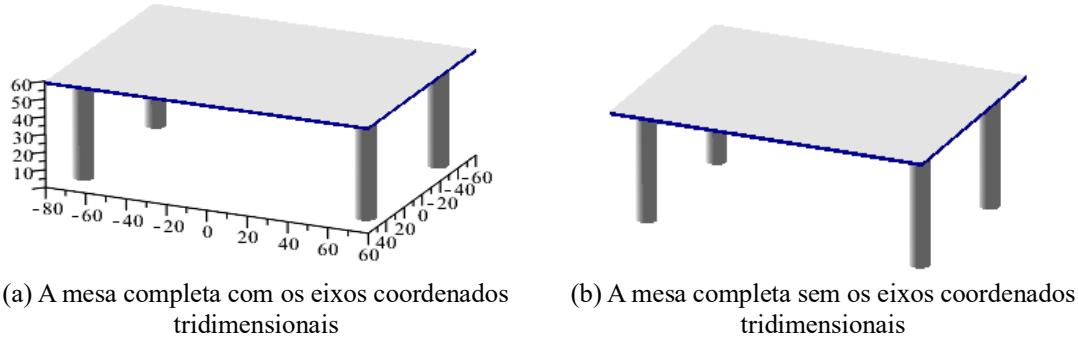
Quadro 5: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *Maple*.

Grupo de Execução (GE 3M): Declaração de variáveis globais e locais
<i>Largura := 6; Comprimento := 8; dz := 0.2;</i> <i>z0 := Largura; y0 := Comprimento; x0 := z0;</i> # Variáveis globais (raio k e localização de pés da mesa sobre o piso). <i>XSPm := (u, v) → u;</i> # Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas da superfície plana. <i>YSPm := (u, v) → v;</i> <i>ZSPm := (u, v) → alturaDosPes;</i>
Grupo de Execução (GE 4M): Modelagem de crivos de superfícies planas que formam a mesa
<i>Mesa := plot3d({Fator*[XSPm(u, v), YSPm(u, v), ZSPm(u, v)], Fator*[XSPm(u, v), YSPm(u, v), ZSPm(u, v) - dz]}, u = -z0 .. z0, v = -y0 .. y0, color = gray);</i> <i>Mesay0 := plot3d({Fator*[XSPm(u, v), y0, YSPm(u, v) + alturaDosPes], Fator*[XSPm(u, v), -y0, YSPm(u, v) + alturaDosPes]}, u = -z0 .. z0, v = -dz .. 0, color = blue);</i> <i>Mesax0 := plot3d({Fator*[x0, XSPm(u, v), YSPm(u, v) + alturaDosPes], Fator*[-x0, XSPm(u, v), YSPm(u, v) + alturaDosPes]}, u = -y0 .. y0, v = -dz .. 0, color = blue); display(PésDaMesa, Mesa, Mesay0, Mesax0)</i>

Fonte: Dados da pesquisa

Como se pode observar, destacamos com uma cor a parametrização, no *Maple*, de cada crivo de superfície plana que delimita o espaço 3D finito representante da mesa para favorecer a sua identificação visual. A execução de cada instrução apresentada no terceiro e quarto grupo com a tecla, “Enter” retorna o resultado apresentado na Figura 10(a). A Figura 10(b) é uma cópia da primeira ocultando a visualização dos eixos coordenados.

Figura 10: Simulação de representação da mesa no ambiente computacional *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

O problema [P4PC] em análise, sugere a disposição de quatro pratos sobre a mesa. Assim, a etapa subsequente da *Modelagem paramétrica*, consiste na simulação dos referidos pratos. Com efeito, pode-se conduzir o estudante na aplicação dos conhecimentos inerentes a praxeologia dos objetos de saberes **Obj02** (*Quádrica parabolóide*) e **Obj04** (*Superfícies planas*). Com efeito, apresenta-se no Quadro 6 o quinto ao sétimo grupo de execução instrumentalizando a referida simulação para pratos de fundo plano e laterais parabólicas sem as bordas coloridas.

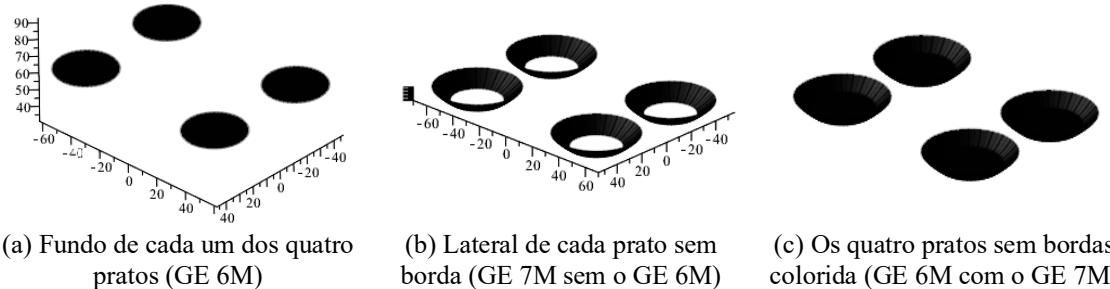
Quadro 6: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *Maple*.

Grupo de Execução (GE 5M): Declaração de variáveis locais	
$\eta := 1/5; r1 := 1.5; r2 := 2.5; xcentro := 3;$ $ycentro := 4.5; zcentro := 0; dr1 := 0.2;$ $XPrato := (u, v) \rightarrow u * \cos(v);$ $YPrato := (u, v) \rightarrow u * \sin(v);$ $ZPrato := (u, v) \rightarrow \eta * u^2; zh := ZPrato(r1, 0);$	# Variáveis globais (raio k e localização de pés da mesa sobre o piso). # Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas da superfície parabólica.
Grupo de Execução (GE 6M): Modelagem do fundo dos pratos	
$BaseDosPratos := plot3d(\{Fator * [-xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1], Fator * [-xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1], Fator * [xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1], Fator * [xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1]\}, u = 0 .. r1 + dr1, v = 0 .. 2 * Pi, color = black, thickness = 3); display(BaseDosPratos, scaling = constrained)$	
Grupo de Execução (GE 7M): Modelagem da superfície lateral dos pratos	
$LateralDosPratos := plot3d(\{Fator * [-xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh], Fator * [-xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), zcentro + ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh], Fator * [xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), zcentro + ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh], Fator * [xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh]\}, u = r1 .. r2, v = 0 .. 2 * Pi, color = black); display(LateralDosPratos, BaseDosPratos, scaling = constrained)$	

Fonte: Dados da pesquisa

A opção de destaque de cada parametrização por cores continuará na escrita deste texto. Ela não influencia nos resultados da modelagem, mas tem o mesmo objetivo destacado anteriormente. A execução de cada instrução apresentada do quinto ao sétimo grupo com a tecla, “Enter” retorna o resultado apresentado na Figura 11.

Figura 11: Simulação de representação dos quatro pratos no ambiente computacional *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

O problema **[P4PC]** em análise impõe ainda que os referidos pratos fossem projetados com bordas coloridas. Ora, observando cada prato é possível conjecturar que a referida borda consiste em um traço da superfície parabólica cujo crivo modela cada prato. Isso indica que podemos representar cada borda por uma curva fechada, que consiste neste traço, que seja uma circunferência. Assim, a aludida imposição pode ser contornada mediante a mobilização da praxeologia do objeto de saberes topológicos (**Objeto 3**), na figura do *toro* que na *Modelagem paramétrica* de PCOC (Henriques, Farias, Funato (2021)) se estabelece como uma das estratégias de dilatação nesses modelos impressos em 3D. Nos caso em análise, poderíamos também, simplesmente, utilizar a ferramenta do *Maple* que tem a potencialidade de “engrossar” objetos no registro gráfico, denominada “thickness” que já foi utilizada nesse texto (cf. GE 6M no Quadro 6). Todavia, o resultado proporcionado por essa ferramenta é meramente visual, ele não é identificado pela

impressora 3D como objeto, entrave desta tecnologia, identificado em nossas pesquisas (Henriques, 2021b, p. 109), ao passo que a “dilatação topológica” por *toro* delimita um espaço tridimensional concebido geometricamente como sólido, passando, por conseguinte pela aprovação de processo de fatiamento de modelos PCOC para a impressão em 3D. Portanto, ao citar a *Modelagem paramétrica* de PCOC para impressão em 3D que não desenvolvemos aqui, estamos abrindo parentes para a difusão dessa possibilidade de pesquisa, ensino, aprendizagem, e consequentemente, de desenvolvimento profissional em Matemática e Educação Matemática.

Assim, com referência a praxeologia de *toro* apresentamos no Quadro 7 o oitavo e o nono grupo de execução instrumentalizando a borda de prato na cor vermelha.

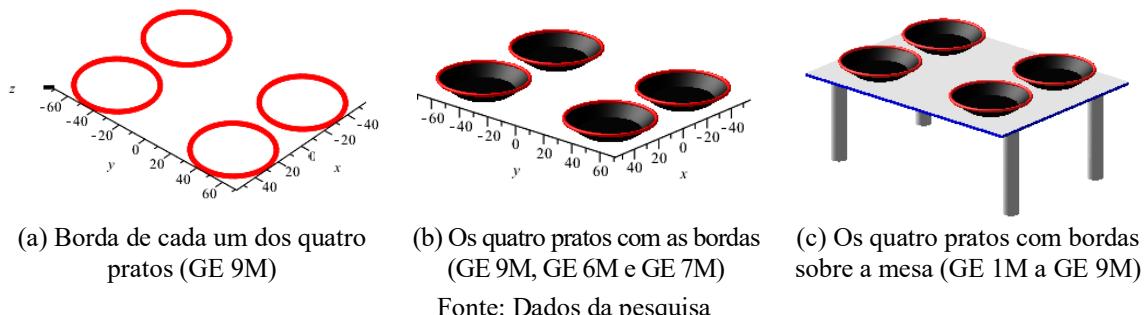
Quadro 7: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *Maple*.

Grupo de Execução (GE 8M): Declaração de variáveis locais	
$rd := \sqrt{\frac{ZPrato(r2, 2\pi)}{\eta}} : rg := 0.1;$ $XToro := (u, v) \rightarrow (rd + rg * \cos(v)) * \cos(u);$ $YToro := (u, v) \rightarrow (rd + rg * \cos(v)) * \sin(u);$ $ZToro := (u, v) \rightarrow rg * \sin(v);$	# Valor do raio maior ((rd) Diretriz, e do raio menor (rg) Geratriz) do toro. # Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas do toro.
Grupo de Execução (GE 9): Modelagem das bordas dos pratos	
<pre>BordaPrato := plot3d([Fator*[-xcentro+XToro(u, v), -ycentro+YToro(u, v), ZToro(u, v)+ZPrato(r2, 2*Pi)+alturaDosPes-zh], Fator*I-xcentro+XToro(u, v), ycentro+YToro(u, v), ZToro(u, v)+ZPrato(r2, 2*Pi)+alturaDosPes-zh], Fator*[xcentro+XToro(u, v), -ycentro+YToro(u, v), ZToro(u, v)+ZPrato(r2, 2*Pi)+alturaDosPes-zh], Fator*[xcentro+XToro(u, v), ycentro+YToro(u, v), ZToro(u, v)+ZPrato(r2, 2*Pi)+alturaDosPes-zh}], u = 0 .. 2*Pi, v = 0 .. 2*Pi, labels = [x, y, z], color = red, scaling = constrained); display(BordaPrato, scaling = constrained)</pre>	

Fonte: Fonte: Dados da pesquisa

A execução de cada instrução apresentada no GE 8M e no GE 9M com a tecla, “Enter” retorna o resultado apresentado na Figura 12(a). A Figura 12(c) reúne todos os resultados da Modelagem obtidos até então.

Figura 12: Simulação e representação da mesa com os pratos no ambiente computacional *Maple*



Continuamos com a modelagem, pois, o problema [P4PC] em análise requer ainda que seja colocado um cacau verde em cada prato. Ora, conforme se pode observar na Figura 13 a configuração de um cacau pode ser interpretada como uma fruta que se aproxima,

matematicamente, a geometria de uma superfície Quádrica, identificada pelo **Obj01** (Elipsóide) apresentado anteriormente pelo modelo teórico que retomamos nessa Figura 13:

Figura 13: Visualização de cacaus em uma plantação e tratamento algébrico da equação trivial do Elipsóide



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Podemos, desta equação, isolar uma das variáveis. Por conveniência motivada pelo status do problema, escolheu-se a variável z . Assim, temos que:

$$\frac{z^2}{c^2} = 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \text{ ou ainda } z = \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}.$$

Fonte: Dados da pesquisa

Para simplificar a representação das equações paramétricas na modelagem podemos associar a equação tratada na Figura 13 a uma função f de duas variáveis, escrevendo:

$$f(x, y) = \pm c \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}$$

Considerando os objetos de saber **Obj07** (relações entre coordenadas cartesianas e cilíndricas), **Obj07** (Equações paramétricas) e o resultado apresentado na Figura 13, então, o cacau pode ser associado a superfície S_1 , por modelagem, mediante a seguinte parametrização:

$$SCacau(u, v) = \begin{cases} X(u, v) = a \cdot u \cdot \cos(v) \\ Y(u, v) = b \cdot u \cdot \cos(u) \\ Z(u, v) = f(X(u, v), Y(u, v)) \end{cases}, u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in [0, 2\pi] \subseteq \mathbb{R}$$

Com base nessa análise, apresenta-se no Quadro 8 o décimo e o décimo primeiro grupo de execução instrumentalizando a borda de prato na cor vermelha.

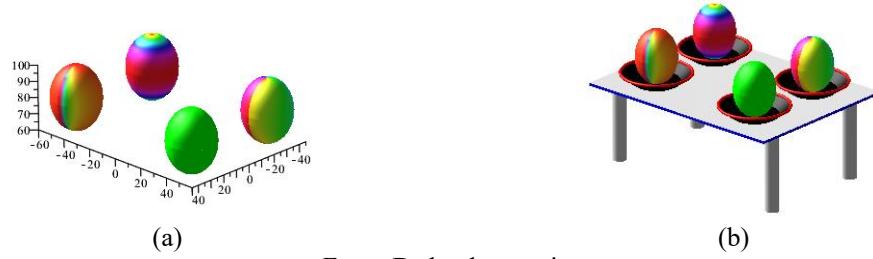
Quadro 8: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *Maple*.

Grupo de Execução (GE 10M): Declaração de variáveis locais da modelagem do cacau
$a := 1.5; b := 1.5; c := 2$
$f := unapply \left(c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}, (x, y) \right);$
Declaração de valores dos coeficientes a , b e c de x , y , e z na equação do modelo teórico do elipsóide.
$XCacau := (u, v) \rightarrow a * u * \cos(v);$
Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas do toro.
$YCacau := (u, v) \rightarrow b * u * \sin(v);$
$ZCacau := (u, v) \rightarrow f(XCacau(u, v), YCacau(u, v));$
Grupo de Execução (GE 11M): Modelagem dos quatro cacaus
$CacauQ1 := plot3d(\{Fator*[xcentro+XCacau(u, v), ycentro+YCacau(u, v), ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes], Fator*[xcentro+XCacau(u, v), ycentro+YCacau(u, v), zcentro-ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes]\}, u = 0 .. 1, v = 0 .. 2*\pi, color = purple);$
$CacauQ2 := plot3d(\{Fator*[-xcentro+XCacau(u, v), ycentro+YCacau(u, v), ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes], Fator*[-xcentro+XCacau(u, v), ycentro+YCacau(u, v), zcentro-ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes]\}, u = 0 .. 1, v = 0 .. 2*\pi, color = green);$
$CacauQ3 := plot3d(\{Fator*[-xcentro+XCacau(u, v), -ycentro+YCacau(u, v), ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes], Fator*[-xcentro+XCacau(u, v), -ycentro+YCacau(u, v), zcentro-ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes]\}, u = 0 .. 1, v = 0 .. 2*\pi, color = purple);$
$CacauQ4 := plot3d(\{Fator*[xcentro+XCacau(u, v), -ycentro+YCacau(u, v), ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes], Fator*[xcentro+XCacau(u, v), -ycentro+YCacau(u, v), zcentro-ZCacau(u, v)+c+alturaDosPes]\}, u = 0 .. 1, v = 0 .. 2*\pi, color = green);$
$CacausNaMesa := display(CacauQ1, CacauQ2, CacauQ3, CacauQ4, scaling = constrained); display(CacausNaMesa);$

Fonte: Dados da pesquisa

A execução de cada instrução apresentada no GE10 e no GE11 com a tecla, “Enter” retorna o resultado apresentado na Figura 14(a). A Figura 14(b) é uma cópia da primeira ocultando a visualização dos eixos coordenados.

Figura 14: Simulação de representação de mesa no ambiente computacional *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

A solução do problema [P4PC] mediante a *Modelagem paramétrica* desenvolvida no *Maple*, não só exprime a beleza da Matemática no nosso cotidiano, mas principalmente a abertura de possibilidade de desenvolvimento de competência em torno dos objetos matemáticos inerentes trabalhados nas diversas instituições de ensino, que muitas vezes os estudantes não veem utilidades práticas. Trata-se, portanto, de um problema riquíssimo que também pode ser resolvido mediante a aplicação de outras estratégias ou ambientes computacionais. Retomaremos mais adiante as ferramentas do *Maple* que utilizamos nessa *Modelagem paramétrica* para efeito da análise comparativa.

No momento, visando a realização da análise comparativa de tecnologias digitais em conformidade com a definição apresentada anteriormente, passamos analisar o mesmo Problema [P4PC] no ambiente computacional *GeoGebra*. Ora, encontramos nesse ambiente, uma ferramenta, que por sinal a sua nomenclatura é sugestiva: trata-se do comando “*Superfície*”, munido de potencialidades de visualização de superfícies de equações parametrizadas, cujo esquema de utilização mobiliza a seguinte sintaxe:

Superfície (Expressão, Expressão, Expressão, Variável 1, Valor Inicial, Valor Final, Variável 2, Valor Inicial, Valor Final)

Nesta sintaxe, as informações: “**Expressão, Expressão, Expressão**” representam expressões das equações paramétricas da superfície S , ao passo que “**Variável 1 e Variável 2**” representam os parâmetros de extremidades em **Valor Inicial e Valor Final**, cada.

Observando a aliança existe as técnicas instrumentais de ambientes computacionais de aprendizagem com as técnicas usuais do ambiente *papel/lápis*, podemos ver que essa potencialidade dialoga com a praxeologia do **Obj07** apresentada anteriormente segundo o modelo:

$$S(u, v) = \begin{cases} x = X(u, v) \\ y = Y(u, v), u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in J \subseteq \mathbb{R} \\ z = Z(u, v) \end{cases}$$

em que $x = X(u, v)$, $y = Y(u, v)$, $z = Z(u, v)$ são as equações paramétricas da superfície S de parâmetros u e v (Henriques, 2021, p. 96).

Utilizando esses conhecimentos, pode-se resolver o Problema [P4PC] no *GeoGebra*, desenvolvendo a *Modelagem paramétrica* em grupos de execução, conforme descrito no Quadro 9.

Quadro 9: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *GeoGebra*.

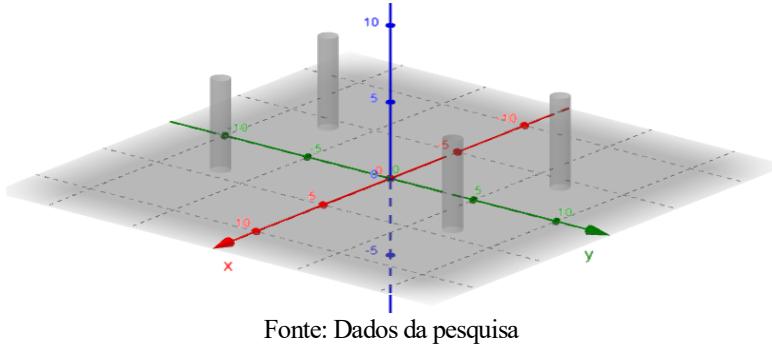
Grupo de Execução (GE 1G)⁷²: Declaração de variáveis globais	
$k = 0.5; xdoPê = 4; ydoPê = 7; zdoPê = 0;$ $alturaDosPes = 6$ $XSC(u, v) = k \cos(v)$ $YSC(u, v) = k \sin(v)$ $ZSC(u, v) = u:$	Variáveis locais e globais (raio k , localização de pés da mesa sobre o piso) declarados em prompt distintos no <i>GeoGebra</i> . Definição de funções X , Y e Z relativas as equações paramétricas cilíndrica.
Grupo de Execução (GE 2G): Modelagem de crivos de superfícies cilíndricas representantes dos pés	
$Pêno1oQ = Suprficie(xdoPê + XSCp(u, v), ydoPê + YSCp(u, v), zdoPê + ZSCp(u, v), u, 0, alturaDosPês, v, 0, 2\pi)$ $Pêno2oQ = Suprficie(-xdoPê + XSCp(u, v), ydoPê + YSCp(u, v), zdoPê + ZSCp(u, v), u, 0, alturaDosPês, v, 0, 2\pi)$ $Pêno3oQ = Suprficie(-xdoPê + XSCp(u, v), -ydoPê + YSCp(u, v), zdoPê + ZSCp(u, v), u, 0, alturaDosPês, v, 0, 2\pi)$ $Pêno4oQ = Suprficie(xdoPê + XSCp(u, v), -ydoPê + YSCp(u, v), zdoPê + ZSCp(u, v), u, 0, alturaDosPês, v, 0, 2\pi)$	

Fonte: Dados da pesquisa

Neste momento é importante entendermos que, embora no GE 1G (Quadro 9) a declaração das variáveis seja apresentada na mesma linha, separadas por um ponto e vírgula, essa apresentação é necessária à diagramação neste texto (motivo pelo qual acontecerá também nos próximos GE). Diferentemente no *Maple* onde as declarações podem ser fornecidas no mesmo *prompt* separadas por *dois pontos* (`:`) ou por *ponto e vírgula* (`;`), no *GeoGebra* cada declaração ocupa um único *prompt* (campo de entrada de instruções). Além disso, no *GeoGebra* a atribuição de valores, sejam numéricas ou expressões, a uma variável não requer o símbolo de *dois pontos igual* (`:=`) como exige a instrumentalização no *Maple*, e sim, apenas o símbolo de *igualdade* (`=`). A definição de uma função é representada por *transferência*, isto é, de maneira usual conforme ocorre com as técnicas do ambiente papel/lápis. Ademais, a visualização no registro gráfico do resultado de cada equação ou função transferida ao *GeoGebra* pelo *prompt* não requer uma execução com a tecla, “*Enter*” como acontece com a instrumentação de instruções fornecidas ao *Maple*. Esse fenômeno instrumental e digital ocorre imediatamente após a conclusão fiel de transferência ou implementação de uma instrução. Assim, o primeiro e o segundo grupo de execução proporcionam o resultado apresentado na Figura 15. Essa implementação é também uma estratégia viva para a aprendizagem da Geometria Analítica e Espacial pelos estudantes desde o Ensino Médio ao Ensino Superior.

⁷² GE 1G significa Grupo de Execução 1 no *GeoGebra*. Logo os próximos serão representados por GE 2G, GE 3G, ...

Figura 15: Simulação de representação de câmeras de ar no ambiente computacional *Maple*



Fonte: Dados da pesquisa

De modo análogo a *Modelagem paramétrica* desenvolvida no *Maple*, no *GeoGebra* a etapa subsequente da resolução do problema [P4PC] também consiste na representação da parte superior (topo) da mesa como um espaço tridimensional delimitado por crivos de superfícies planas paralelas aos planos coordenado XY0, X0Z e 0YZ, apropriando-se da praxeologia dos objetos de saberes **Obj04** e **Obj07** apresentados anteriormente. Em outras palavras, o topo da mesa é representado por um paralelepípedo fino, no contexto da Geometria espacial. Com base nesses conhecimentos apresentam-se no Quadro 10 o terceiro e o quarto grupos de execução no *GeoGebra* com referência ao topo de uma mesa de dimensões 120x160x2 cm³.

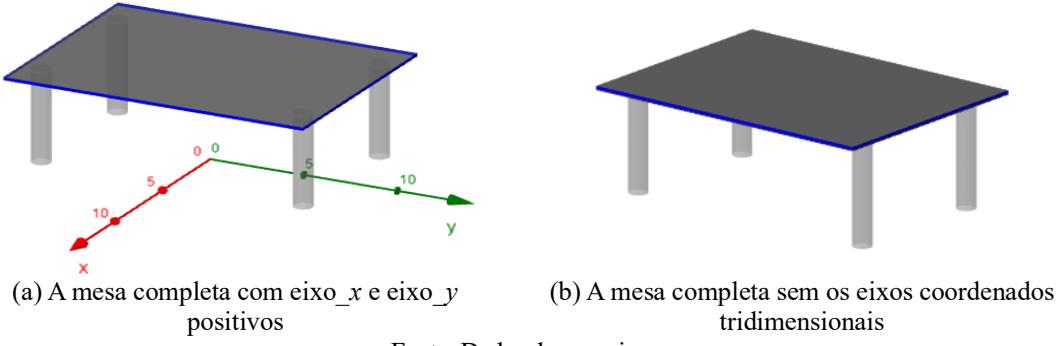
Quadro 10: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *GeoGebra*.

Grupo de Execução (GE 3G): Declaração de variáveis globais e locais	
$Largura = 6; Comprimento = 8; dz = 0.2;$	Variáveis locais referentes as dimensões da mesa
$z0 = Largura; y0 = Comprimento; x0 = z0;$	declaradas em prompt distintos no <i>GeoGebra</i> .
$XSPm(u, v) = u$	
$YSPm(u, v) = v$	Definição de funções X, Y e Z relativas as equações
$ZSPm(u, v) = alturaDosPes$	paramétricas da superfície plana.
Grupo de Execução (GE 4G): Modelagem de crivos de superfícies planas que formam a mesa	
$SPz6_s = \text{Superfície}(XSPm(u, v), YSPm(u, v), ZSPm(u, v), u, -z0, z0, v, -y0, y0)$	
$SPz6_mdz = \text{Superfície}(XSPm(u, v), YSPm(u, v), ZSPm(u, v) - dz, u, -z0, z0, v, -y0, y0)$	
$SPy0_{Pos} = \text{Superfície}(XSPm(u, v), y0, YSPm(u, v) + alturaDosPes, u, -z0, z0, v, -dz, 0)$	
$SPy0_{Neg} = \text{Superfície}(XSPm(u, v), -y0, YSPm(u, v) + alturaDosPes, u, -z0, z0, v, -dz, 0)$	
$SPx0_{Pos} = \text{Superfície}(x0, XSPm(u, v), YSPm(u, v) + alturaDosPes, u, -y0, y0, v, -dz, 0)$	
$SPx0_{Neg} = \text{Superfície}(-x0, XSPm(u, v), YSPm(u, v) + alturaDosPes, u, -y0, y0, v, -dz, 0)$	

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme mencionado anteriormente, cada instrução é fornecida ao *GeoGebra* ocupando um *prompt* próprio, e a execução ocorre de forma automática sem necessidade de uma ação adicional do sujeito (estudante). Assim, as instruções apresentadas no terceiro e no quarto grupo retornam o resultado apresentado na Figura 16(a). A Figura 16(b) é apenas uma cópia da primeira ocultando os eixos coordenados.

Figura 16: Simulação de representação de mesa no ambiente computacional *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa

A etapa subsequente consiste na modelagem dos quatro pratos sobre a mesa. Assim, pode-se orientar o sujeito (estudante) na aquisição e aplicação prática dos conhecimentos inerentes a praxeologia dos objetos de saberes **Obj02** (*Quádrica: parabolóide*) e **Obj04** (*Superfícies planas*). Desta forma, apresenta-se no Quadro 11 o quinto ao sétimo grupo de execução instrumentalizando a referida simulação para pratos de fundo plano na cor preta e laterais parabólicas na cor branca sem as bordas que serão implementadas do GE 9G em diante.

Quadro 11: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *GeoGebra*.

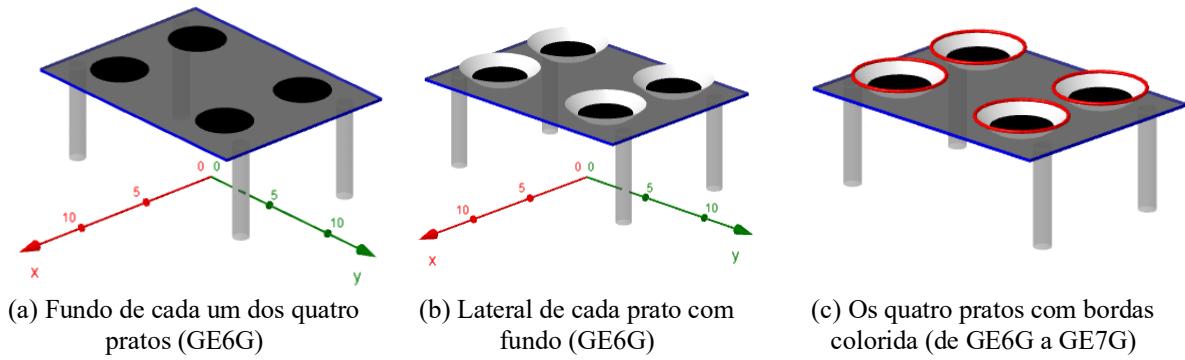
Grupo de Execução (GE 5G): Declaração de variáveis locais para o fundo e as laterais dos pratos	
$\eta = \frac{1}{5}; r1 = 1.5; r2 = 2.5; xcentro := 3;$ $ycentro := 4.5; zcentro := 0; dr1 := 0.2;$ $XPrato(u, v) = u * \cos(v);$ $YPrato(u, v) = u * \sin(v);$ $ZPrato(u, v) = \eta * u^2; zh = ZPrato(r1, 0);$	Variáveis locais identificadores dos centros dos pratos declaradas em prompt distintos no <i>GeoGebra</i> . Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas da superfície parabólica.
Grupo de Execução (GE 6G): Modelagem do fundo dos pratos	
Superfície($xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1, u, 0, r1 + dr1, v, 0, 2\pi$) Superfície($-xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1, u, 0, r1 + dr1, v, 0, 2\pi$) Superfície($-xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1, u, 0, r1 + dr1, v, 0, 2\pi$) Superfície($xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), alturaDosPes + dr1, u, 0, r1 + dr1, v, 0, 2\pi$)	
Grupo de Execução (GE 7G): Modelagem da superfície lateral dos pratos	
Superfície($xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh, u, r1, r2, v, 0, 2\pi$) Superfície($-xcentro + XPrato(u, v), ycentro + YPrato(u, v), ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh, u, r1, r2, v, 0, 2\pi$) Superfície($-xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh, u, r1, r2, v, 0, 2\pi$) Superfície($xcentro + XPrato(u, v), -ycentro + YPrato(u, v), ZPrato(u, v) + alturaDosPes - zh, u, r1, r2, v, 0, 2\pi$)	

Fonte: Dados da pesquisa

Podemos levar o estudante a observar que as equações para métricas identificadas por XPrato, YPrato e ZPrato representam uma única superfície parabólica côncava para cima ao longo do eixo_z, tendo o vértice na origem do sistema de coordenadas tridimensionais. Esse conhecimento deve ser mobilizado pelo estudante. Com efeito, a disposição de cada fundo do prato e consequentemente das suas laterais é controlada pela *Modelagem paramétrica* mediante a manipulação dos sinais das coordenadas do centro do prato, com referência aos quatro quadrantes (Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4) do plano coordenado segundo a praxeologia do **Obj08**. Assim, a conclusão da implementação de cada instrução apresentada do quinto ao sétimo grupo retorna o resultado apresentado na Figura 17 (a) e

(b) juntamente com os resultados anteriores.

Figura 17: Simulação de representação dos quatro pratos no ambiente computacional *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa

Será que o estudante tendo a relação pessoal com esse tipo de problema e *Modelagem paramétrica* correspondente consegue visualizar a importância e aplicabilidade desses conceitos no seu cotidiano? Vale apena desenvolver um trabalho laborioso como este com os estudantes? Inferimos que o resultado apresentando na Figura 17 (c) é uma antecipação estratégica de organização de produtos no texto. Esse resultado é alcançado mediante a modelagem apresentada no Quadro 12 organizador do oitavo e do nono grupos de execução.

Quadro 12: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *GeoGebra*.

Grupo de Execução (GE 8G): Declaração de variáveis locais para a modelagem de bordas dos pratos	
$rd = \sqrt{\frac{ZPrato(r2, 2\pi)}{\eta}}$; $rg = 0.1$;	# Valor do raio maior ((rd) Diretriz, e do raio menor (rg) Geratriz) do toro declarados em prompt distintos no <i>GeoGebra</i> .
$XToro(u, v) = (rd + rg * \cos(v)) * \cos(u)$:	
$YToro(u, v) = (rd + rg * \cos(v)) * \sin(u)$:	# Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas do toro.
$ZToro(u, v) = rg * \sin(v)$:	
Grupo de Execução (GE 9G): Modelagem das bordas dos pratos	
BordaPratoQ1 = Superfície(xcentro + XToro(u, v), ycentro + YToro(u, v), ZToro(u, v) + ZPrato(r2, 2 * Pi) + alturaDosPes - zh, u, 0, 2pi, v, 0, 2pi)	
BordaPratoQ2 = Superfície(-xcentro + XToro(u, v), ycentro + YToro(u, v), ZToro(u, v) + ZPrato(r2, 2 * Pi) + alturaDosPes - zh, u, 0, 2pi, v, 0, 2pi)	
BordaPratoQ3 = Superfície(-xcentro + XToro(u, v), -ycentro + YToro(u, v), ZToro(u, v) + ZPrato(r2, 2 * Pi) + alturaDosPes - zh, u, 0, 2pi, v, 0, 2pi)	
BordaPratoQ4 = Superfície(xcentro + XToro(u, v), -ycentro + YToro(u, v), ZToro(u, v) + ZPrato(r2, 2 * Pi) + alturaDosPes - zh, u, 0, 2pi, v, 0, 2pi)	

Fonte: Dados da pesquisa

Conforme se pode observar no GE 8G, modelagem da produção das bordas se apropria da praxeologia topológica do objeto toro e a mobilização dos quatro quadrantes (Q_1, Q_2, Q_3 e Q_4) do plano coordenado segundo a praxeologia do **Obj08**, alcançando-se, assim, o resultado apresentado na Figura 17 (c). Para concluir a resolução do problema [P4PC], apresentamos no Quadro 13 o décimo e o décimo primeiro grupo de execução referentes a modelagem que simula a disposição dos quatro cacau nos quatro pratos.

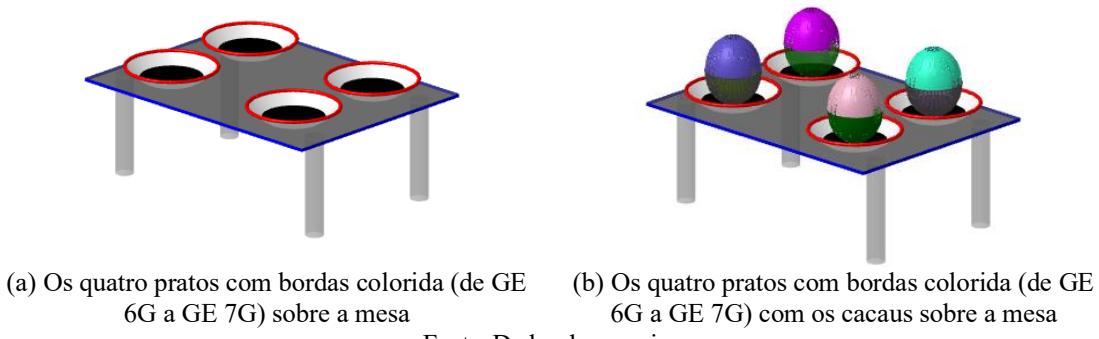
Quadro 13: Modelagem paramétrica do problema P4PC em grupos de execução no *GeoGebra*.

Grupo de Execução (GE 10G): Declaração de variáveis locais da modelagem do cacau	
$a = 1.5; b = 1.5; c = 2$	
$f(x, y) = c \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)}$	Declaração de valores dos coeficientes a , b e c de x , y , e z na equação do modelo teórico do elipsóide.
$X\text{Cacau}(u, v) = a * u * \cos(v)$	Definição de funções X, Y e Z relativas as equações paramétricas do toro.
$Y\text{Cacau}(u, v) = b * u * \sin(v)$	
$Z\text{Cacau}(u, v) = f(X\text{Cacau}(u, v), Y\text{Cacau}(u, v))$	
Grupo de Execução (GE 11G): Modelagem dos quatro cacaus	
$\text{CacauQ}_{1P} = \text{Superfície}(x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{1n} = \text{Superfície}(x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), -Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{2P} = \text{Superfície}(-x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{2n} = \text{Superfície}(-x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), -Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{3P} = \text{Superfície}(-x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), -y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{3n} = \text{Superfície}(-x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), -y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), -Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{4P} = \text{Superfície}(x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), -y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	
$\text{CacauQ}_{4n} = \text{Superfície}(x\text{centro} + X\text{Cacau}(u, v), -y\text{centro} + Y\text{Cacau}(u, v), -Z\text{Cacau}(u, v) + c + \text{alturaDosPes}, u, 0, 1, v, 0, 2\pi)$	

Fonte: Dados da pesquisa

Para simplificar a interpretação nessa modelagem, devemos conduzir o estudante a compreender que cada instrução apresentada no GE 11G é uma mera repetição da primeira estocada na variável CacauQ_{1P} que consiste na visualização do hemisférico positivo do elipsóide centrada no ponto de coordenadas $x\text{centro}$, $y\text{centro}$ e $z\text{centro}$. Essa última coordenada é omitida na instrução pois, ela foi declarada como uma variável com valor zero, tornando-se neutro na modelagem. Além disso, deve-se observar ainda que a manipulação dos sinais das coordenadas do centro de cada cacau, é conduzida com referência aos quatro quadrantes ($Q1$, $Q2$, $Q3$ e $Q4$) do plano coordenado com base na praxeologia do **Obj08**. Assim, essas instruções devidamente implementadas, o *GeoGebra* retorna o resultado apresentado na Figura 18(a). A Figura 18(b) é uma cópia da primeira ocultando a visualização dos eixos coordenados.

Figura 18: Simulação de representação de mesa no ambiente computacional *GeoGebra*



Fonte: Dados da pesquisa

As análises separadas nos dois ambientes *Maple* e *GeoGebra* a partir do problema [P4PC] considerado permitem apresentar a análise comparativa dos dois ambientes como segue.

6. Análise comparativa de softwares

O nosso escopo nessa seção do capítulo não é recomendar qual seja o melhor *software* e muito menos indicar qual seja o pior, mas, almejar o objetivo geral deste trabalho apresentado anteriormente, ou seja, apresentar uma análise comparativa das ferramentas dos ambientes computacionais *Maple* e *GeoGebra* munidas de potencialidades e entraves para o ensino de matemática na Educação Superior. Para isso, apoiamo-nos no Quadro teórico de referência apresentado anteriormente e na definição de *análise de um software*. Elaboramos um problema como referência de análise que identificamos por [P4PC] “*simulação de quatro pratos com cacau cada sobre uma mesa*”. As análises nos permitiram identificar as ferramentas de cada um dos dois softwares e as suas respectivas potencialidades referentes ao problema [P4PC] que apresentamos no Quadro 14.

Quadro 14: Ferramentas e potencialidades dos ambientes computacionais analisados

Ferramentas do ambiente computacional <i>Maple</i> utilizadas na Modelagem do problema [P4PC]			
N.	Ferramenta	Sintaxe	Potencialidade
1	<i>Prompt</i>	<i>Sem sintaxe</i>	Permitir a entrada de instruções
2	<i>Sem comando</i>	$F := (x, y) \rightarrow \text{Expressão em } x \text{ e } y$	Permitir especificar uma função de duas variáveis <i>x</i> e <i>y</i>
3	<i>plot3d</i>	$\text{plot3d}([X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)], u=a..b, v=c..d, <\text{opções}>)$	Permitir representar superfícies parametrizadas.
4	<i>display</i>	<i>display(variáveis)</i>	Permitir visualizar objetos simultaneamente
5	<i>Sem comando</i>	<i>Variável := valor da variável</i>	Permitir estocar um valor a uma variável, seja numérica, seja uma expressão
6	<i>Sem comando</i>	<i>Dois pontos (:) no final de uma instrução</i>	Permite ocultar resultados da execução da instrução
7	<i>Texto</i>	<i>Sem sintaxe</i>	Permitir digitar textos
8	<i>color</i>	<i>Color = nome da cor escrito em inglês</i>	Permite colocar cor aos objetos
Ferramentas do ambiente computacional <i>GeoGebra</i> utilizadas			
N.	Ferramenta	Sintaxe	Potencialidade
1	<i>Prompt</i>	<i>Sem sintaxe</i>	Permitir a entrada de instruções
2	<i>Sem comando</i>	$F(x, y) = \text{Expressão em } x \text{ e } y:$	Permitir especificar uma função de duas variáveis <i>x</i> e <i>y</i>
3	<i>Superfície</i>	<i>Superficie (Expressão, Expressão, Expressão, Variável 1, Valor Inicial, Valor Final, Variável 2, Valor Inicial, Valor Final)</i>	Permitir representar superfícies parametrizadas
5	<i>Sem comando</i>	$P = (x, y, z)$	Permitir especificar um ponto
8	<i>Texto</i>	<i>Sem sintaxe</i>	Permitir digitar textos
9	<i>Rastro</i>	<i>Sem sintaxe</i>	Permitir visualizar o rastro de um objeto

Fonte: Dados da pesquisa

Os dois ambientes computacionais são instrumentalizados com interfaces, ferramentas e sintaxes distintas, porém, munidas com as mesmas potencialidades relativamente ao ensino e aprendizagem de superfícies matemáticas. A parametrização mobilizada em cada *software* segue a estrutura usual de representação de superfícies parametrizadas em ambiente papel/lápis, contemplando assim a instrumentalização desse objeto do saber, e reforçando a aliança existente entre as técnicas usuais de ambiente papel/lápis e computacionais, porém, cada

software tem a sua própria estrutura de utilização desse objeto na *Modelagem paramétrica*. Para isso, basta observar as ferramentas N.3 (*Maple*) e N.3 (*GeoGebra*) no Quadro 14.

A identificação, isto é, encontrar uma determinada ferramenta no *software* durante a análise na relação [S-i], segundo modelo SAI da Abordagem Instrumental se mostrou mais sugestiva no ambiente computacional *GeoGebra* do que no *Maple*. Uma vez que o *prompt* do *GeoGebra* sugere identificação imediata de uma dada ferramenta (comando), bastando para isso digitar algumas letras contidas no nome da ferramenta. Por exemplo, se entrarmos com “*Sup*” no *prompt* na busca de uma ferramenta associada ao conceito de superfície, o *GeoGebra* ilustra imediatamente o comando “Superfície” juntamente com as suas possibilidades de utilização (as *sintaxes*), o que não ocorre no *Maple* onde para identificar a ferramenta “*plot3d*” localizada no seu *kernel* (o núcleo). Interessante ainda observar que no *Maple* toda instrução atribuída a uma variável, pode ser ocultada terminando-a com a ferramenta N.6 (cf. Quadro 14) para evitar a visualização de vários símbolos na tela. Por exemplo:

Quadro 15: Exemplo ilustrativo de atribuição de uma instrução a uma variável no *Maple*

	Grupo de Execução (GE 2M): Modelagem de crivos de superfícies cilíndricas representantes dos pés $\text{Péno3oQ} := \text{plot3d}(\text{Fator} \cdot [-x\text{doPé} + \text{XSCp}(u, v), -y\text{doPé} + \text{YSCp}(u, v), z\text{doPé} + \text{ZSCp}(u, v)], u = 0 \dots \text{alturaDosPés}, v = 0 \dots 2\pi, \text{color} = \text{gray}) :$
---	--

Fonte: Dados da pesquisa

Ao passo que no *GeoGebra* toda instrução apresentada no seu *prompt* exprime, imediatamente, uma informação ou resultado correspondente. Utilizando o mesmo exemplo acima, porém para *GeoGebra*, temos a ilustração apresentada no Quadro 16:

Quadro 16: Exemplo ilustrativo de atribuição de uma instrução a uma variável no *GeoGebra*

	Grupo de Execução (GE 2G): Modelagem de crivos de superfícies cilíndricas representantes dos pés	::
	$\begin{aligned} \text{Péno3oQ} &= \text{Superfície}(-x\text{doPé} + \text{XSC}(u, v), -y\text{doPé} + \text{YSC}(u, v), z\text{doPé} + \text{ZSC}(u, v), u, 0, \text{alturaDosPés}, v, 0, 2\pi) \\ &= \begin{cases} -4 + \text{Se}\left(-10 \leq u \leq 10 \wedge -10 \leq v \leq 10, \frac{1}{2} \cos(v)\right) \\ -7 + \text{Se}\left(-10 \leq u \leq 10 \wedge -10 \leq v \leq 10, \frac{1}{2} \sin(v)\right) \\ \text{Se}(-10 \leq u \leq 10 \wedge -10 \leq v \leq 10, u) \end{cases} \end{aligned}$::

Fonte: Dados da pesquisa

Por um lado, o acesso imediato de informações que segundo exemplo consiste na visualização da parametrização da superfície representante do pé da mesa no terceiro quadrante, pode auxiliar o sujeito (estudantes) na análise e interpretação da superfície parametrizada, assim como o domínio de validade dos parâmetros mobilizados no comando “Superfície”. Por outro lado, em uma situação

como esta, referente ao problema [P4PC], a medida em que evoluem os grupos de execuções, o *GeoGebra* vai ficando sobrecarregado, e acaba travando na execução das instruções, estabelecendo uma dificuldade na relação instrumental do sujeito com os resultados apresentados, tanto na janela algébrica quanto geométrica. Esse fato não aconteceu no *Maple* durante a modelagem desse mesmo problema. Neste capítulo não nos aprofundamos nesta questão que deixamos para futuros trabalhos.

7. Considerações finais

A análise de ambientes computacionais (*softwares*) e as suas possíveis comparações, deve ser considerada como uma das práticas prioritárias na vertente de tecnologias digitais em Educação Matemática, pois, se configura como processo intelectual importante na formação de recursos humanos, não apenas na Educação no Ensino Superior, mas também em todos os níveis de escolaridades dos quais as tecnologias digitais são aliadas, em todos os sentidos formativos. Nas análises que apresentamos neste capítulo com o propósito de alcançar o nosso objetivo, vimos o quanto a *Modelagem paramétrica* pode ser eficiente na apropriação e aplicação de conceitos matemáticos aos diversos objetos do nosso cotidiano, valorizando, por conseguinte, o papel e o lugar da Matemática em diversos aspectos sociais. Assim, esperamos ter trazido contribuições significativas na perspectiva de análise e utilização de tecnologias digitais na Educação Matemática, seja na sala de aula, laboratório, seja na pesquisa, na extensão e na sociedade contemporânea onde as tecnologias digitais estão cada vez mais ao alcance de muitas pessoas.

Referências

- CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, V. 12, n°1, p. 73-112. 1992.
- DRIJVERS P. (2002), L'algèbre sur l'écran, sur le papier et la pensée algébrique. p. 215-242. In: GUIN D. & TROUCHE L. Calculatrices symboliques – transformer un outil en un instrument du travail mathématique : un problème didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. La pensée sauvage éditions.
- DUVAL R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives*. IREM de Strasbourg, v. 5, p. 35-65. 1993.
- DUVAL R. *Sémiosis et pensée humaine*, Bern : Peter Lang. 1995.
- DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Moretti, M. T. REVEMAT: R. Eletr. de Edu. Matem. eISSN 1981-1322. Florianópolis, v. 07, n. 2, p.266-297, (2012). Disponível em: <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p266>. Acessado aos 19/03/2025.
- HENRIQUES, A, FARIAS, E. S, FUNATO, R. L, ALMOLOUD, S. *Cadernos de Cálculo Universitário*. Ilhéus, BA: Editus. 2025, obra no prelo.
- HENRIQUES, A. FARIAS, E. S.; FUNATO, R. L. Exposição do Laboratório de Visualização Matemática da UESC e o papel da Impressora 3D na produção de Recursos Didáticos. In. *Educação Matemática em Pesquisa Perspectivas e Tendências - Volume 2*. Editora Científica digital. V. 2. 2021. p. 478-493.
- HENRIQUES, A. Abordagem Instrumental e aplicações. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v.23. p. 247-280, 2021a.

HENRIQUES, A. Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D. Ilhéus, BA: Editus. 2021b, 247 p.

HENRIQUES, A., Nagamine, A., Serôdio, R. Mobilização de crivos de curvas e de superfícies na resolução de problemas matemáticos: uma aplicação no ensino superior. *Educ. Matem. Pesq.*, São Paulo, 2020. v.22, n. 1, 253-275.

HENRIQUES, A. Saberes Universitários e as suas relações na Educação Básica - Uma análise institucional em torno do Cálculo Diferencial e Integral e das Geometrias. Via Litterarum. Ibicaraí, Bahia. Editora. 2019.

HENRIQUES, A.; ALMOLOUD, S. A. Teoria dos Registros de Representação Semiótica em Pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: Uma Análise de Superfícies e Funções de duas Variáveis com Intervenção do Software Maple, Revista Ciência & Educação, Bauru, v. 22, n. 2, p. 465-487, 2016.

HENRIQUES, A. Análise Institucional & Sequência Didática como Metodologia de Pesquisa, Anais do I Simpósio Latino-Americano de Didática da Matemática (LADIMA) 01-06 de novembro de 2016, Bonito, MS.

HENRIQUES, A.; NAGAMINE, A.; NAGAMINE, C. M. L. Reflexões Sobre Análise Institucional: o caso do ensino e aprendizagem de integrais múltiplas. Bolema, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1261-1288, dez. 2012.

HENRIQUES, A. L'enseignement et l'apprentissage des intégrales multiples : analyse didactique intégrant l'usage du logiciel Maple. UJF-Grenoble, Lab. Leibniz, 2006. Disponível em: <https://theses.hal.science/tel-00100353/en/>. Acessado em 19/03/2025.

RABARDEL P. Les Hommes et les Technologies : Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin Editeur, Paris. 1995.

Capítulo 11

Uso do Geogebra otimizado no ensino da Geometria Descritiva sob o aspecto teórico da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS)

Hugo Costa Pereira e Souza⁷³

Maria Deusa Ferreira da Silva⁷⁴

1. Introdução

Este capítulo se constitui em um recorte de uma pesquisa de doutorado⁷⁵ em andamento, a qual pretende investigar a compreensão obtida por estudantes de um curso de licenciatura em matemática de conteúdos da disciplina Geometria Descritiva, retas e planos, a partir do uso do GeoGebra otimizado sob a perspectiva científica das Teorias de Registro de Representação Semiótica (TRRS) de Duval e da Situação didática (TSD).

O trabalho está sendo desenvolvido no Programa de Pós-Graduação em Ensino da Rede Nordeste de Ensino (RENOEN) oferecido na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). As linhas de pesquisas discorridas neste programa centram-se nas seguintes áreas de estudo: Ensino, currículo e cultura e Práticas pedagógicas no ensino de ciências e matemática.

Metodologicamente, para realização deste artigo foi desenvolvida uma pesquisa bibliográfica com abordagem qualitativa cujo objetivo foi analisar as contribuições, já consolidadas e divulgadas na literatura, do uso do software GeoGebra e da TRRS no ensino de conteúdos da disciplina Geometria descrita. Ademais, apresentar a importância dessa abordagem teórica e a inserção das Tecnologias digitais de informação e comunicação (TDIC) no contexto de ensino e aprendizagem de conhecimentos ditos mais abstratos e complexos.

Posto isso, considerando estudos teóricos e empíricos os quais discutem a interação entre tecnologia e representação semiótica, neste estudo será feita uma revisão de literatura

⁷³ Professor Mestre da Universidade Estadual de Montes Claros-UNIMONTES(MG)-Departamento de Ciências Exatas - Doutorando do RENOEN – Rede Nordeste de Ensino – Polo Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia- UESB, Campus de Vitória da Conquista (BA), Hugocosta.souza@hotmail.com

⁷⁴ Professora Voluntária do Programa de Pós-Graduação em Ensino-PPGEN e do Programa de Pós-Graduação (Doutorado) RENOEN - Rede Nordeste de Ensino, Maria.deusa@uesb.edu.br

⁷⁵ Título da pesquisa: Uso do Software GeoGebra otimizado no Ensino da Geometria Descritiva no curso de Licenciatura em Matemática: Uma análise da aprendizagem dos estudantes a partir da Teoria de Registro das Representações Semióticas (TRRS) e das Situações Didáticas (TSD).

sobre o uso do Geogebra no ensino de Geometria Descritiva, analisando suas aplicações, potencialidades a partir da perspectiva da TRRS, paralelamente será apresentada a otimização da ferramenta a ser utilizada, produto resultado de pesquisa de mestrado⁷⁶.

É sabido, com base na literatura divulgada em meios científicos, que o ensino de conteúdos matemáticos é circundado por desafios no contexto educacional, isso sendo perceptível, especialmente, em relação a matérias abstratas; tópicos que requerem visualização tridimensional e à relação entre diferentes representações matemáticas. Nota-se que vários fatores cognitivos e/ou pedagógicos contribuem para essas dificuldades, tais como limitações da percepção espacial; dificuldades na abstração matemática por parte dos estudantes; falta de ferramentas didáticas adequadas etc.

Na busca pela resolução desses problemas, observa-se, nos últimos anos, um gradual interesse pela inserção de tecnologias digitais no contexto de ensino da matemática e uso de inovações didático-metodológicas pautadas em estudos científicos. Assim, em se tratando do ensino e aprendizagem da disciplina Geometria Descritiva em cursos de graduação, ressalta-se o uso do software GeoGebra como importante ferramenta pedagógica. Paralelamente, destaca-se a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS), proposta por Raymond Duval, que tem sido amplamente discutida como um referencial teórico que pode contribuir para inovações no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

Ademais, a estrutura deste artigo está organizada da seguinte forma: na seção seguinte, apresenta-se uma síntese dos princípios científicos da TRRS e sua aplicação no ensino de conteúdos matemáticos. Em sequência, **discute-se sobre a relevância das tecnologias digitais no ensino, com ênfase na Geometria Descritiva.** Posteriormente, examina-se a literatura sobre o uso do GeoGebra na Geometria Descritiva, discutindo as evidências empíricas acerca de sua eficácia. Na próxima seção, é apresentado a otimização do software e suas contribuições. Por fim, são expostos os resultados da revisão e considerações finais.

⁷⁶ Dissertação: “Geometria Descritiva uma abordagem teórica e computacional” disponível em: https://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_HUGO_COSTA_PEREIRA_E_SOUZA.pdf

2. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e implicações no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos

A Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Raymond Duval, surgiu na década de 1970 e tem proporcionado contribuições significativas para o campo da Educação Matemática.

A partir da publicação da obra *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*, lançada na França em 1995, a teoria de Duval tem sido amplamente difundida, destacando-se como um referencial essencial para a compreensão dos processos de aprendizagem matemática. Assim, conforme afirma Duval (2018) “a teoria dos registros de representação semiótica é essencialmente um instrumento que foi elaborado para analisar a maneira de pensar e de trabalhar a matemática quaisquer que sejam os conceitos e domínios (geometria, álgebra, análise...) tratados” (p. 2).

Os preceitos basilares da TRRS destacam que os conceitos; objetos matemáticos, devido a sua característica abstrata e complexa, não devem ser ensinados apenas por meio de manipulação de símbolos, mas também mediante o acesso a representações semióticas diversas, tais como: expressões algébricas, gráficos, tabelas etc.

De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos “reais” ou “físicos”. É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática (DUVAL, 2012, p. 3).

Posto isso, conforme Duval (2013), “[...] a atividade matemática deveria ser analisada em termos de transformações de representações semióticas e não de conceitos puramente mentais” (2013, p. 14). Nesse sentido, a teoria destaca que a compreensão matemática não ocorre apenas no nível abstrato, dependendo também das transformações entre os diferentes registros de representação.

O autor ressalta, contudo, o seguinte: “[...] passar de um registro de representação a outro não é somente mudar de tratamento, é também explicar as propriedades ou os aspectos diferentes de um mesmo objeto” (DUVAL, 2003, p. 22)

Outra questão apontada por Duval (2012) refere-se à percepção de objeto matemático e suas representações. Consoante o autor, por meio da aplicação didática de múltiplos registros de representação evita-se que os objetos matemáticos possam ser confundidos com suas

representações. A coordenação entre esses registros desempenha um papel central na apreensão conceitual, permitindo aos estudantes identificarem um mesmo objeto matemático, independentemente da representação utilizada.

Dessa forma, para que uma representação funcione verdadeiramente como tal, é necessário que ela possibilite o acesso ao objeto representado, sem restringi-lo a uma única forma de visualização.

A par disso, ressalta-se, também, o papel do professor dessa área de ensino no que tange ao seu conhecimento didático metodológico de aplicação dos conteúdos, posto que não basta ser detentor da teoria, é preciso que este educador seja capacitado a lidar com o uso de metodologias diferenciadas que contribuam para melhor aprendizagem de seus alunos.

O princípio da TRRS reforça a importância do uso de tecnologias diversas, como, por exemplo, as que possibilitam a exploração interativa e visual de múltiplas representações, favorecendo a construção do conhecimento matemático de forma dinâmica e efetiva. Ademais, possibilitam levar o conhecimento a pessoas com transtornos de aprendizagem.

No contexto de ensino da Geometria Descritiva, a aplicação dos preceitos da TRRS é totalmente relevante, uma vez que conceitos geométricos são representados por diferentes formas, como linguagem algébrica, diagramas e modelagens, contudo nem sempre foi possível contribuir apenas pelo ensino tradicional com o tratamento em diferentes dimensões, ou representações em meio digital; tridimensionais. Situação essa que pode ser aprimorada por meio de recursos tecnológicos/digitais.

Outra questão no ensino, no que diz respeito a GD, é a complexidade inerente à disciplina, já que há uma necessidade de articular conceitos matemáticos abstratos com representações espaciais. Assim a manipulação de elementos tridimensionais em um espaço bidimensional, quando não utilizado recursos digitais específicos, exige do estudante um alto nível de raciocínio lógico e visualização geométrica, e dependendo de vários fatores no processo de ensino essa compreensão pode ser ineficaz.

Além disso, ainda se tratando do ensino da GD, a assimilação de conceitos como projeções ortogonais, mudanças de planos e transformações geométricas exige o domínio de abordagens analíticas e representações gráficas. Esse processo representa um desafio tanto para iniciantes quanto para aqueles que já possuem familiaridade com conteúdos matemáticos mais avançados, dada a complexidade envolvida na transposição entre diferentes sistemas de representação espacial.

Diante do exposto, o norte teórico da TRRS e a inserção de tecnologias digitais que possuem recursos extras de visualização espacial, manipulação tridimensional etc. podem contribuir para solucionar problemáticas como as apresentadas, proporcionando não só uma abordagem interativa e dinâmica dos conteúdos estudados, como também para melhor assimilação, apropriação dos conceitos, propriedades e relações espaciais inerentes à área em questão.

3. Tecnologias Digitais no contexto educacional

O avanço das tecnologias digitais nas últimas décadas tem desempenhado papel transformador no contexto educacional, impactando diversas áreas do conhecimento. Contribuindo, assim, para reestruturação de métodos de ensino tradicionais e melhores resultados no processo de aprendizagem dos estudantes.

Nota-se que a inserção dessas tecnologias permite não só maior interatividade entre os envolvidos, como também possibilita personalização do ensino, possibilitando a diversificação de estratégias pedagógicas. Nesse sentido, vários instrumentos como: ambientes virtuais, softwares, recursos multimídias podem proporcionar aos estudantes experiências diversas e adaptáveis às suas necessidades individuais, o que favorece uma construção ativa do conhecimento.

Nessa diretriz, Moran (2017) destaca a importância das Tecnologias Digitais na personalização do processo de aprendizagem, possibilitando a criação de roteiros individuais por meio dos quais os alunos possam acessar e estudar conforme seu próprio ritmo. Essa flexibilidade permite que cada estudante avance de acordo com suas capacidades e condições específicas, além de possibilitar a realização de avaliações quando se sentir preparado.

Ainda conforme o autor: “Nunca tivemos tantas plataformas, aplicativos, recursos nas nossas mãos. Nossa mente é que orienta nossas escolhas, nossa criatividade nos impulsiona para novas práticas.” Corroborando essa ideia, para Cassiano; Góes; Neves, (2019)

as tecnologias digitais, cada vez mais, estão sendo incorporadas às práticas educativas formais, o que exige da escola e do professor um olhar que amplie as possibilidades de uso das tecnologias associadas aos processos educacionais, ou seja, é necessário que o professor se distancie do uso, vem um nível predominantemente instrumental, e que discuta e reconheça tais tecnologias como potencializadoras de um pensar crítico, de um agir sobre o mundo de forma mais autônoma e ativa (2019, p. 45).

Para Moran “As tecnologias mais interessantes estão hoje integradas nos smartphones, celulares conectados à Internet”. Nessa perspectiva, é interessante ressaltar que disseminação

desses instrumentos e sua integração com a internet tornam essas tecnologias ainda mais acessíveis no contexto educacional. Assim, o uso contínuo pode contribuir para maior autonomia na construção ativa do conhecimento, além de possibilitar um ensino mais dinâmico seja de quaisquer conteúdos, consolidando, assim, as Tecnologias Digitais como recursos fundamentais para o processo de ensino e aprendizagem na sociedade contemporânea.

No ensino de disciplinas das áreas exatas, como Matemática, as tecnologias possuem papel emancipador por possibilitarem maior visualização, compreensão e manipulação de conceitos muitas vezes abstratos.

No entanto, não basta apenas a inserção dessas tecnologias no âmbito educacional, é preciso integrá-las ao processo de ensino. A correta mediação docente é imprescindível para garantir que esses instrumentos sejam utilizados de maneira didática e alinhada aos objetivos de cada uso. Ademais, estudos científicos comprovam que, quando bem planejados, as TD são capazes de fomentar uma aprendizagem efetiva, contribuindo para o desenvolvimento autônomo e crítico dos estudantes envolvidos no processo.

Em se tratando do ensino de Geometria Descritiva, direcionamento deste estudo, o uso de instrumentos digitais tem contribuído para melhor compreensão dos conceitos geométricos abordados, tornando, assim, a aprendizagem mais dinâmica, ativa e interativa. Há disponíveis diversos softwares de geometria dinâmica, como o GeoGebra, os quais permitem que os estudantes manipulem objetos tridimensionais entre outras ações, interações, sobre esse uso e seus benefícios discutiremos nas seções seguintes.

4. Uso do GeoGebra e ensino de Geometria Descritiva: uma breve RSL

Em uma breve contextualização, o GeoGebra é um software educacional de código aberto o qual combina Geometria, Álgebra e Cálculo em um ambiente interativo. Possui interface intuitiva e promove a manipulação em tempo real e isso o torna uma ferramenta relevante para o ensino e aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. Assim, contribui para um estudo dinâmico, permitindo a construção e manipulação interativa de figuras geométricas, oferecendo aos estudantes uma experiência de aprendizagem mais visual e interativa. Sobre isso, consoante Pacheco (2019, p. 199),

com o uso do GeoGebra, é possível dinamizar e enriquecer as atividades no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois é um software de Geometria Dinâmica, onde são contempladas as construções de pontos, vetores, segmentos, retas e secções cônicas. Através do GeoGebra é possível analisar equações, relacionar variáveis com números, encontrar raízes de equações. Permite ainda associar uma expressão algébrica à representação de um objeto da Geometria.

Posto isso, um diferencial do programa é possibilitar múltiplos registros de representação, como gráficos, tabelas, expressões algébricas e visualizações tridimensionais, favorecendo o estudo de diferentes registros matemáticos. Tornando assim, instrumento fundamental para a aprendizagem significativa conforme os preceitos da Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS).

É notável, devido a sua flexibilidade, acessibilidade e configuração, que o GeoGebra se consolida como um instrumento diferencial para melhores resultados no processo de ensino e aprendizagem da Matemática e áreas afins.

Em se tratando do uso dessa ferramenta no ensino de Geometria Descritiva a aplicação tem se tornado uma metodologia inovadora para a exploração de conceitos geométricos complexos, pois contribui para melhor visualização e manipulação de objetos no espaço tridimensional. Ademais, contribui para a superação de dificuldades, apresentadas pelos estudantes, associadas muitas vezes à transposição entre diferentes sistemas de projeção e visualização espacial.

A seguir, breve análise das evidências apresentadas pela literatura acerca da eficácia dessa ferramenta na promoção da compreensão dos princípios fundamentais da Geometria Descritiva. Metodologicamente, para esta RSL, partiu-se do seguinte questionamento: De que forma o GeoGebra tem sido utilizado no ensino de Geometria Descritiva e quais são os impactos dessa abordagem no processo de aprendizagem dos estudantes?

O procedimento de busca em meio acadêmico ateve-se a bases de dados como Google Acadêmico; Scielo; Periódicos CAPES e Renote (Revista Novas Tecnologias na Educação), orientado pelas seguintes palavras em foco: “GeoGebra”; “Geometria Descritiva”; “Ensino de Geometria Descritiva”.

Em prosseguimento, foram adotados alguns critérios de inclusão e exclusão na seleção dos trabalhados apreciados em princípio. Assim, foram incluídos artigos publicados entre 2011 e 2024, descritos como estudos que abordam o uso do GeoGebra no ensino de GD; e excluídos artigos que tratam do GeoGebra em outras áreas da matemática, não tendo o foco na GD.

Para fins da pesquisa, o processo de seleção seguiu etapas tais como: triagem inicial mediante leitura de títulos e resumos para eliminação dos artigos irrelevantes; seguida de leitura completa dos trabalhos e por fim coleta de informações relevantes, como objetivos, metodologias e principais resultados, postuladas nos parágrafos seguintes.

Ressalta-se o trabalho intitulado “Utilização do GeoGebra para o Ensino de Geometria: uma revisão sistemática de literatura”, dos autores Maia; Gondim e Vasconcelos (2023), o qual em linhas gerais apresenta uma revisão da literatura sobre a utilização do GeoGebra no ensino de geometria, assim analisou estudos publicados entre 2011e 2020 a partir de quatro repositórios digitais: *SciELO*, *o Google Acadêmico*, *o Periódico da Capes* e *a RENOTE*. Os autores comprovam que o uso do software descrito está cada vez mais presente no contexto educacional, por meio de variadas experiências, contribuindo para a visualização geométrica e facilitando a consolidação de conceitos matemáticos.

Conforme os autores, a utilização do programa descrito na educação, especialmente no ensino de Matemática, contribui para transformar a sala de aula em um ambiente interativo, permitindo que os alunos explorem, interajam, construam conceitos e experimentem a Geometria por meio desse Software.

Corroborando essa ideia, os autores dialogam com Merlo e Assis (2010) pontuando que para estes os softwares de simulação possibilitam a criação de modelos dinâmicos e simplificados da realidade, permitindo a exploração de fenômenos reais ou fictícios em um contexto de aprendizagem. Sua principal vantagem reside na flexibilidade para modificar e adicionar dados e variáveis, possibilitando a manipulação dos elementos que influenciam a experiência. Além disso, a simulação estimula a formulação de respostas, a análise dos resultados obtidos e o aprimoramento de conceitos. (Merlo, Assis, 2010, p. 10, Apud Maia; Gondim E Vasconcelos, 2023).

Maia; Gondim e Vasconcelos (2023) destacam a importância do GeoGebra e pontuam que por se tratar de um software livre, com uma interface intuitiva e de fácil manuseio, o programa se destaca como uma ferramenta mediadora no processo investigativo para a resolução de problemas, favorecendo um estudo mais dinâmico. Além disso, sua aplicabilidade não se restringe ao estudo de figuras geométricas, permitindo também a construção de gráficos para diferentes tipos de funções.

Após análise qualitativa e quantitativa dos estudos selecionados, Maia; Gondim e Vasconcelos (2023) confirmam que a inserção do GeoGebra no ensino de GD possibilita a visualização geométrica dos elementos algébricos, facilitando a formalização e conceituação dos conteúdos. Ademais, o programa é uma válida ferramenta tecnológica “capaz de tornar a aula de Matemática mais atrativa, dinâmica, interativa, assíncrona, e capaz de atender de

maneira eficiente a heterogeneidade presente na maioria das salas de aula do ensino brasileiro”. Por fim, nas considerações finais os autores pontuam:

Com relação à utilização do software GeoGebra no contexto educacional, os estudos apontam um grande potencial da ferramenta no processo de ensino e aprendizagem. O conhecimento sobre o uso do GeoGebra pelos indivíduos e a rápida manipulação das ferramentas dinâmicas que ele proporciona pode colaborar significativamente na construção coletiva de saberes e aprendizagens

O estudo intitulado “Geometria Descritiva e GeoGebra 3D: Uma Prática para o Desenvolvimento da Visualização” investigou o uso do GeoGebra 3D como instrumento de auxílio ao estudante de Geometria Espacial na transposição de enunciados, visando mensurar se a prática de construir e projetar objetos bidimensionais e tridimensionais, por meio do GeoGebra, contribui para o desenvolvimento da visualização espacial dos estudantes. A pesquisa, de natureza qualitativa e bibliográfica, foi aplicada a alunos de licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia.

Por meio dessa pesquisa, Ferreira (2024) objetivou avaliar a eficácia do GeoGebra 3D como ferramenta didática no ensino de GD, tendo como foco aprimorar a capacidade de visualização espacial dos alunos. Metodologicamente, o estudo adotou uma abordagem qualitativa, partindo da construção e projeção de objetos geométricos por parte dos estudantes, seguida de análises sobre o desenvolvimento das habilidades de visualização espacial desses envolvidos.

Os resultados do trabalho apontaram que a prática de ensino e aprendizagem a partir do uso do software tornou-se eficaz no desenvolvimento das habilidades direcionadas, facilitando a compreensão de conceitos geométricos complexos e promovendo maior engajamento dos estudantes. Ademais, o autor ressalta a importância do uso da ferramenta, uma vez que a possibilidade de construir e manipular objetos geométricos no GeoGebra 3D auxiliou os estudantes na compreensão de conceitos complexos da Geometria Descritiva, tornando o aprendizado mais concreto e acessível.

Posto isso, concluiu-se a partir da aplicação que o uso do GeoGebra 3D no ensino de Geometria Descritiva é uma estratégia efetiva e contribuiu para aprimorar a visualização espacial dos estudantes, culminando em uma aprendizagem mais significativa e interativa.

Outro trabalho apreciado, “Uso do Software GeoGebra como Alternativa ao Ensino da Geometria Descritiva na Engenharia”, investigou a aplicação do GeoGebra como uma alternativa metodológica para o ensino da Geometria Descritiva em cursos de Engenharia. O estudo destaca que a dificuldade na percepção espacial, muitas vezes, é resultante de

deficiências no ensino básico de Matemática, o que acarreta muitos casos a evasão nos cursos de engenharia. Com o intuito de sanar esse problemática, os autores propuseram a identificação das dificuldades dos estudantes e posterior aplicação prática da Geometria, utilizando o software como ferramenta de apoio nas aulas.

O estudo demonstra resultados positivos como melhor desenvolvimento da visão espacial. Assim, reforça a necessidade de abordagens que auxiliem os alunos de Engenharia a aprimorarem sua percepção espacial, reduzindo dificuldades na interpretação de projeções e representações tridimensionais em um plano bidimensional.

Além disso, ressalta o GeoGebra como recurso didático que permite aos estudantes visualizarem construções geométricas de forma dinâmica e interativa, favorecendo o aprendizado por meio da experimentação.

O estudo conclui que a implementação do GeoGebra como ferramenta auxiliar no ensino de GD pode facilitar a aprendizagem, tornando conceitos mais acessíveis e melhorando a visão espacial dos alunos. Ademais, a abordagem testada pode contribuir para um ensino eficaz e para redução da evasão nos cursos de Engenharia, promovendo uma formação mais sólida e alinhada às demandas da área de estudo.

Por fim, nota-se que a integração do GeoGebra no ensino de Geometria Descritiva tem se mostrado uma estratégia eficaz para aprimorar a visualização espacial e a compreensão dos conceitos geométricos pelos estudantes.

As pesquisas apresentadas evidenciam que o uso de ferramentas tecnológicas, como o GeoGebra, pode tornar o aprendizado mais dinâmico e interativo, contribuindo para a formação de profissionais com habilidades espaciais e matemáticas aprimoradas.

Assim, a inserção de tecnologias digitais, como o GeoGebra, pode atuar como um instrumento educacional satisfatório para o ensino de conteúdos matemáticos sob a perspectiva da TRRS, resultando na resolução de dificuldades comuns associadas a características dos conteúdos estudados.

Por essa perspectiva de inserção e aplicação do GeoGebra no ensino de conteúdos matemático com vistas a melhorar o processo de ensino e aprendizagem de conceitos complexos e muitas vezes abstratos, ressalta-se de fundamental importância à adequação/otimização de instrumentos educacionais às práticas educativas. Nesse sentido, passamos a seguir à apresentação das ferramentas do GeoGebra as quais foram otimizadas e direcionamentos para aplicação.

5. GeoGebra otimizado e apontamentos

Em atendimento às demandas contemporâneas, aprimorar recursos já existentes permite potencializar sua aplicação pedagógica, tornando o ensino mais intuitivo, dinâmico, atrativo. Além disso, adequações de recursos contribuem para que os instrumentos disponíveis possam ser utilizados em sua totalidade e favoreçam aos estudantes uma maior exploração das possibilidades, no caso em específico deste estudo, do software GeoGebra ampliando estudos como: visualização espacial, a resolução de problemas e desenvolvimento do pensamento lógico-matemático.

Dito isso, salienta-se que a criação de ferramentas específicas para auxiliar o ensino disciplina de GD no GeoGebra teve como objetivo minimizar o tempo em que o estudante levava para manipular o software e obter os resultados. Assim, a otimização objetiva facilitar o foco na resolução da questão e favorecer uma experiência de aprendizado mais eficiente.

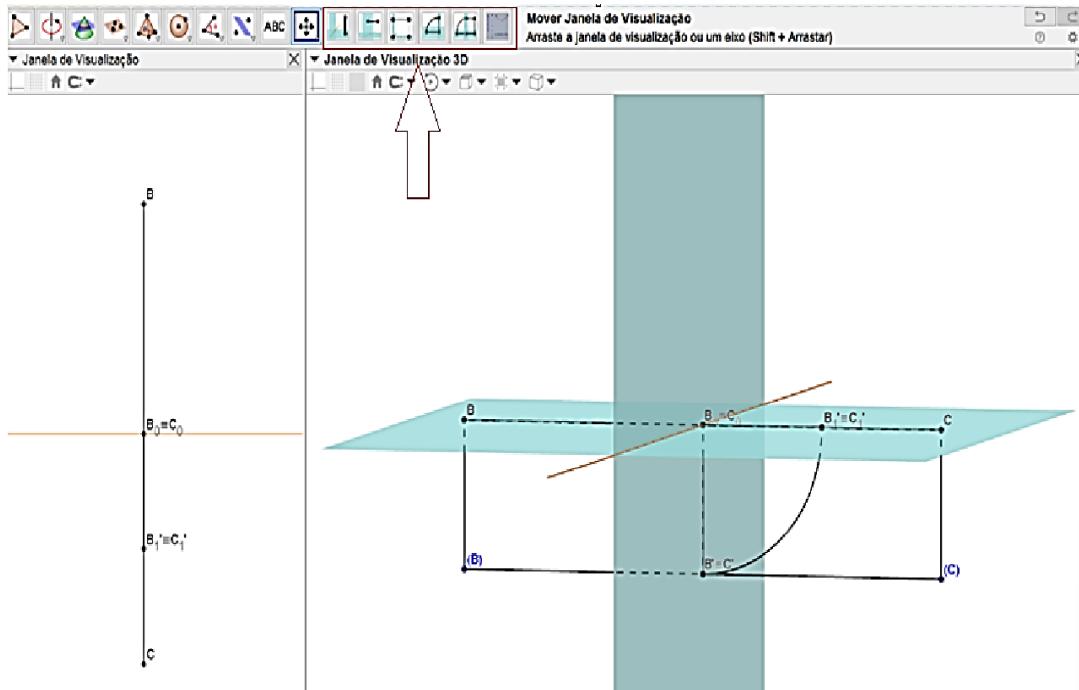
Além disso, ao disponibilizar para o estudante as ferramentas específicas da disciplina Geometria Descritiva, elimina-se a necessidade de que o estudante já tenha um conhecimento mais profundo na manipulação das ferramentas do programa, podendo assim se dedicar ao entendimento da teoria da disciplina.

Esse pensamento corrobora com a perspectiva de que as TIC devem facilitar o processo de ensino e aprendizagem, reduzindo barreiras e promovendo uma experiência mais eficiente, conforme Morais e Conceição (2018), as “ferramentas tecnológicas de apoio são eficientes na personalização e melhoria do processo de aprendizagem”.

A saber, foram criadas dez ferramentas (Figura 1) (Souza, 2018):

- Projeção horizontal de um ponto
- Projeção vertical de um ponto
- Projeções verticais e horizontais de um ponto
- Rebatimento do ponto
- Projeção + rebatimento
- Projeção horizontal da reta
- Projeção vertical da reta
- Projeções + rebatimento da reta
- Traços de reta na janela de visualização 2D do GeoGebra
- Traços de reta na janela de visualização 3D do GeoGebra

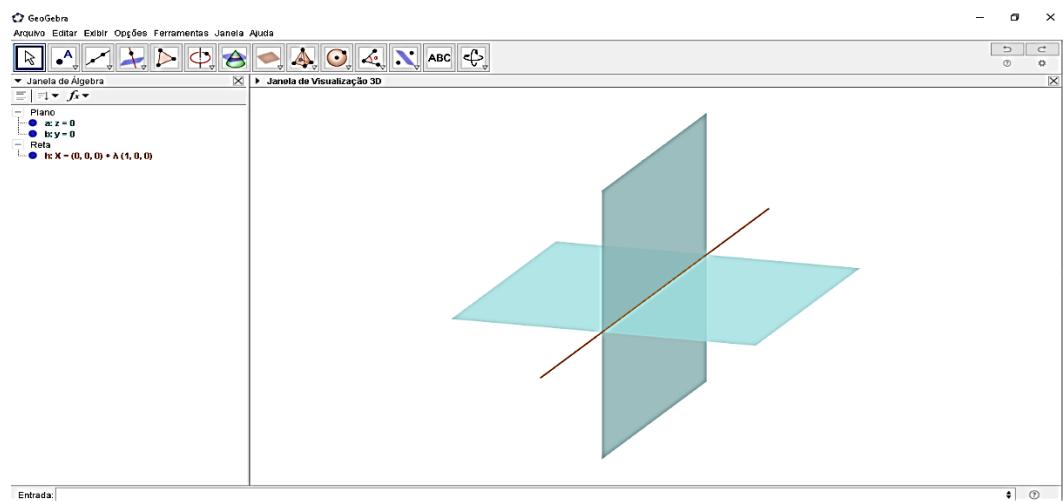
Figura 1: Visualização das ferramentas



Fonte: Arquivo do autor

Anteriormente à criação das ferramentas, foi necessária a construção dos planos de projeções mongeanas no GeoGebra (Figura 2), de forma a padronizar a posição dos eixos de projeção, conforme figura a seguir.

Figura 2: construção dos planos de projeções mongeanas no GeoGebra

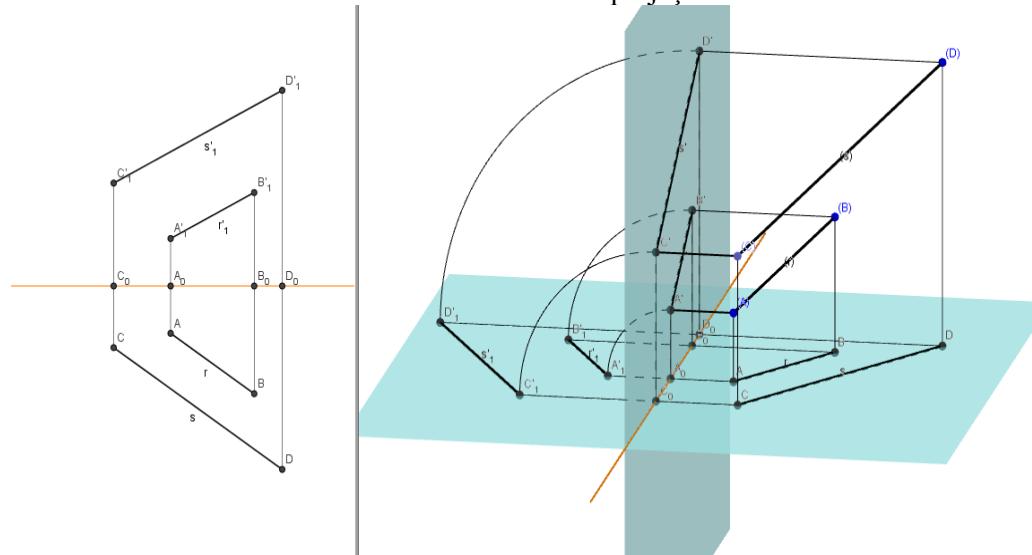


Fonte: Arquivo do autor

Posteriormente, usando ferramenta do próprio GeoGebra “Criar uma nova ferramenta” foram construídas as dez ferramentas citadas. Para exemplificação, segue o procedimento utilizado na criação da ferramenta **Projeções + Rebatimento da reta** (Souza, 2018):

- i. Definir dois pontos, (A) e (B), no 1º Diedro, por exemplo A=(1,-2,3) e B=(4,-3,1);
- ii. Com a ferramenta segmento, definir o segmento (A)(B);
- iii. Com a ferramenta Projeção do ponto, definir as projeções horizontais e verticais dos pontos (A) e (B);
- iv. Nomear todos os pontos e projeções com suas devidas notações;
- v. A partir das projeções dos pontos, definir, com a ferramenta segmento, as projeções verticais e horizontais da reta (A)(B) (segmento AB e A'B');
- vi. Na barra de ferramentas, aba “Editar” ir em propriedades, na aba estilo, definir a espessura da linha em 1 para os seguintes seguimentos: (A)A, (B)B, (A)A', (B)B', AA₀, BB₀, A'A₀ e B'B₀;
- vii. Definir os rebatimentos dos pontos com a ferramenta rebatimento do ponto;
- viii. A partir do rebatimento dos pontos, definir o rebatimento da reta;
- ix. Nomear todos os pontos e projeções com suas devidas notações;
- x. Na barra de ferramentas, aba “Editar” ir em propriedades, na aba estilo, definir a espessura da linha em 1 para os seguintes seguimentos A'₁A₀ e B'₁B₀ e nos arcos $\widehat{A'_1A'}$ e $\widehat{B'_1B'}$;
- xi. Na barra de ferramentas, selecionar “criar nova ferramenta”;
- xii. Na aba “Objetos Finais”, selecionar os seguintes: AB, (A)A, (B)B, A'B', (A)A', (B)B', A'A₀, B'B₀, A'₁A₀ e B'₁B₀, os arcos: $\widehat{A'_1A'}$ e $\widehat{B'_1B'}$ e os pontos: A, B, A', B', A'₁, A₀, B'₁ e B₀;
- xiii. Na aba “Objetos Iniciais” selecionar os pontos (A) e (B);
- xiv. Na aba “Nome e Ícone” em “Nome da Ferramenta” inserir: Projeções e Rebatimento da reta;
- xv. Na “Ajuda da Ferramenta” inserir a seguinte descrição: Selecione 2 pontos que determinam a reta (r);
- xvi. Na aba ícone, adicionar um ícone que corresponda à ferramenta.

Figura 3: Plano de projeção mongeano e sua respectiva épura de duas retas paralelas, obtidas utilizando o GeoGebra com as ferramentas de projeção + rebatimento



Fonte: Os autores

Passemos a um exemplo da resolução de um problema aplicando as ferramentas otimizadas:

Questão: Dados (A)[-3,4,6], (B)[3,4,1], (C)[2,5,7] e (D)[?, ?, ?], Determine em épura

- Uma reta (C)(D) concorrente a (A)(B);
- Uma reta (C)(E) paralela a (A)(B).
- Os traços das retas (A)(B), (C)(D) e (C)(E).

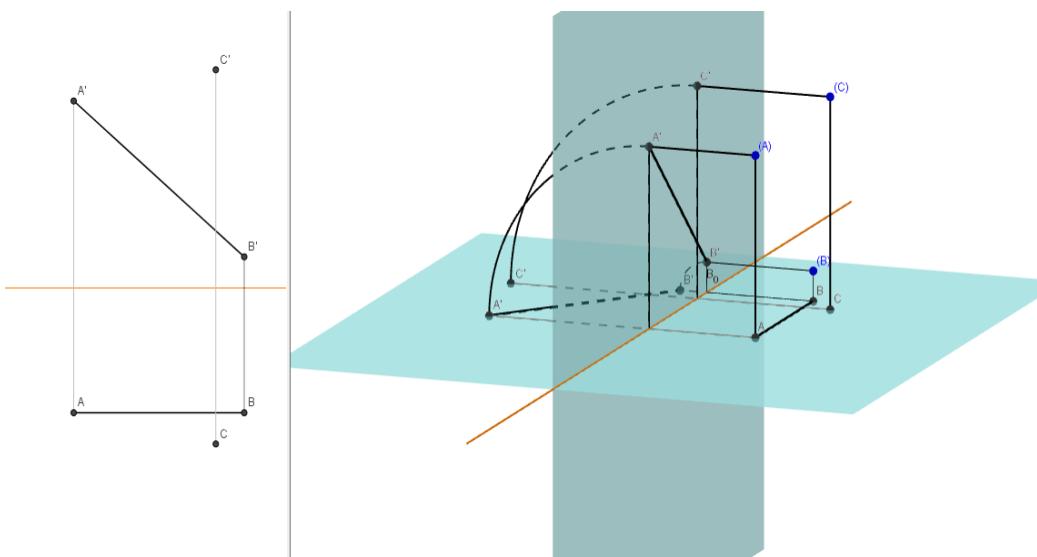
Resolução:

Mesmo que a questão tenha solicitado que seja resolvido em épura, vamos utilizar a janela de visualização 3D para obter as projeções da reta (A)(B) e do ponto (C).

- Na janela de visualização 3D inserir os pontos A=(-3,-4,6), B=(3,-4,1) e C=(2,-5,7);
- Utilizar a ferramenta *Projeções e Rebatimento da reta* para definir as projeções e rebatimento da reta (A)(B). Utilizar a ferramenta *Projeções e Rebatimento* para definir as projeções e rebatimento do ponto (C).

Note que não foi necessário definir o segmento (A)(B) para definir suas projeções.

Figura 4: Print da resolução no GeoGebra



Fonte: Arquivo do autor

O trabalho de otimização do GeoGebra demonstra ser de grande relevância, pois os objetivos traçados foram alcançados com sucesso.

Ademais, as novas ferramentas são eficazes e possibilitaram/possibilitarão uma redução significativa no tempo de resolução das atividades referentes ao estudo do conteúdo abordado.

Durante os testes dessas ferramentas, verificou-se também que era possível visualizar o objeto tanto no plano de projeção mongeana quanto em sua épura, facilitando, assim, a compreensão das vistas nos espaços tridimensional (R^3) e bidimensional (R^2).

Desse modo, a inclusão do programa otimizado nas aulas de Geometria Descritiva (GD) contribui de forma positiva para a aprendizagem dos conteúdos, oferecendo ao usuário uma visão simultânea das projeções nos diferentes planos (SOUZA, 2018).

A otimização do programa, tal como apresentada, é de total relevância quando analisada à luz da Teoria de Registro de Representação Semiótica, uma vez que esse aprimoramento permite não apenas a execução mais ágil e precisa de procedimentos técnicos da GD, como também amplia de forma eficaz o tempo e a qualidade da interação dos alunos com os conceitos trabalhados.

Nota-se que ao automatizar etapas operacionais que exigiam, em sua forma tradicional, um maior esforço técnico e domínio prévio do programa, as ferramentas otimizadas favorecem a articulação e coordenação entre registros, tais como, gráfico, algébrico, geométrico e verbal e isso é caracterizado o princípio central da TRRS.

Posto isso, a versão aprimorada torna-se um instrumento semiótico e contribui para melhor resultados no processo de ensino e aprendizagem.

6. Considerações Finais

Por meio desta pesquisa, verificou-se que o GeoGebra tem sido amplamente utilizado como ferramenta pedagógica para o ensino de conteúdos matemáticos diversos, apresentando resultados positivos em relação à compreensão conceitual, à visualização espacial e à interação dos estudantes no decorrer do processo de compreensão.

Evidenciou, ainda, que a utilização do GeoGebra no ensino de GD, em articulação com a TRRS, pode contribuir para resultados positivos no que diz respeito ao processo de compreensão dos estudantes acerca de conteúdos matemáticos complexos e/ou abstratos.

Ademais, este estudo é coerente por apresentar uma otimização do programa GeoGebra como ferramenta semiótica conforme postulado pela base da TRRS, uma vez que esta possibilita a exploração de múltiplos registros de representação de maneira dinâmica, possibilitando ainda melhor entendimento das articulações entre representações bidimensionais e tridimensionais, processo considerado por Duval como essencial para que a aprendizagem matemática ocorra.

Ainda sobre a otimização, conclui-se que esta contribui para operacionalizar os princípios semióticos da teoria em práticas de ensino concretas e atua como facilitadora no processo de conversão e o tratamento entre registros. Constitui como mediadora no processo de construção do significado, ampliando a compreensão dos objetos matemáticos e promovendo uma aprendizagem mais ativa e autônoma.

Nesse contexto, ressalta-se a importância de investigações que postulem a necessidade de não apenas inserir tecnologias na prática pedagógica, mas que também estas tecnologias estejam ancoradas em teorias que fundamentem esse uso didático.

Por fim, considera-se que a proposta aqui delineada pode colaborar para o ensino da Geometria Descritiva em cursos de licenciatura em Matemática, especialmente no que se refere à superação de dificuldades relacionadas à visualização espacial e à abstração. Espera-se, com isso, contribuir para o avanço das discussões sobre o uso de tecnologias digitais no ensino de Matemática, bem como incentivar novas pesquisas que explorem, ampliem e aprofundem as possibilidades do GeoGebra otimizado no contexto da Educação Matemática.

A continuidade deste estudo no âmbito do doutorado busca, justamente, consolidar essa ferramenta como instrumento pedagógico robusto, fundamentado teoricamente e alinhado às necessidades do ensino contemporâneo.

Referências

- CASSIANO, Glauber; GÓES, Camila Bahia; NEVES, Bárbara Coelho. *As tecnologias digitais no contexto educacional para a autonomia dos sujeitos*. Revista Fontes Documentais, Salvador, v. 2, n. 3, p. 43–58, 2019. Disponível em: <https://periodicos.ufba.br/index.php/RFD/article/view/57584/30400>. Acesso em: 30 mar. 2025.
- DUVAL, R. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? (M. T. Moretti, Trad.). Revista Eletrônica de Educação Matemática, 13(2), 1-27, 2018. 105007/1981-1322.2018v13n2p01
- DUVAL, R. Entrevista: Raymond Duval e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. FREITAS, J. L. M.; REZENDE, V. (Orgs). RPEM, v. 02, n. 03, p. 10-34, 2013.
- DUVAL, Raymond. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem. Florianópolis, 2012.
- DUVAL, Raymond. *Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo: problemas específicos para a aprendizagem da matemática*. Tradução de Plínio A. S. Alves. Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, 2003.
- FERREIRA, Lucas Lima. GEOMETRIA DESCRIPTIVA E GEOGEBRA 3D: UMA PRÁTICA PARA DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO. **Encontro Baiano de Educação Matemática**, [S. l.], p. 1–12, 2024. Disponível em: <https://www.sbmbrasil.org.br/eventos/index.php/ebem/article/view/755>. Acesso em: 5 mar. 2025.
- JESUS, A. R. de, OLIVEIRA, B. de J., & OLIVEIRA, L. F. S. de. (2019). Uso do software geogebra como alternativa ao ensino da geometria descritiva na engenharia. *Caderno De Graduação - Ciências Exatas E Tecnológicas* - UNIT - SERGIPE, 5(2), 143. Recuperado de <https://periodicos.set.edu.br/cadernoxatas/article/view/6993>
- MAIA, L. E. de O., GONDIM, R. de S., & VASCONCELOS, F. H. L. . (2023). Utilização do geogebra para o ensino de geometria: uma revisão sistemática de literatura. *Ensino Da Matemática Em Debate*, 10(1), 31–51. Disponível em: <https://doi.org/10.23925/2358-4122.2023v10i60031>.
- MORAIS, J. L. M.; DA CONCEIÇÃO, A. F. Ferramentas Tecnológicas e Metodologias de Apoio à Aprendizagem Personalizada no Ensino Superior: uma Revisão Sistemática. **Informática na educação: teoria & prática**, Porto Alegre, v. 21, n. 3, 2018. DOI: 10.22456/1982-1654.86226. Disponível em: <https://seer.ufrgs.br/index.php/InfEducTeoriaPratica/article/view/86226>. Acesso em: fev. 2025.
- MORAN, José Manuel. *Novas tecnologias e mediação pedagógica*. 2000. Disponível em: https://moran.eca.usp.br/wp-content/uploads/2017/11/tecnologias_moran.pdf. Acesso em: março 2024.
- PACHECO, Erica Farias. Utilizando o software GeoGebra no ensino da Matemática: uma ferramenta para construção de gráficos de parábolas e elipses no 3º ano do Ensino Médio. Debates em Educação, Maceió, v. 11, nº 24, Maio/ago. 2019
- SOUZA, Hugo Costa Pereira. *Geometria Descritiva: uma abordagem teórica e computacional*. 2018. 91 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2018. Disponível em: https://www2.uesb.br/ppg/profmat/wp-content/uploads/2018/11/Dissertacao_HUGO_COSTA_PEREIRA_E_SOUZA.pdf. Acesso em: fev. 2025.

Capítulo 12

Tecnologias Digitais e Didática da Matemática: o uso da Inteligência Artificial Generativa no paradigma do questionamento do mundo

Nailys Melo Sena Santos⁷⁷

Denize da Silva Souza⁷⁸

Saddo Ag Almouloud⁷⁹

1. Introdução

Nos últimos anos, vivenciamos o rápido avanço das tecnologias digitais, com destaque para as tecnologias móveis digitais. Crianças e adultos passaram a viver cada vez mais imersos no mundo digital e mais dependentes das tecnologias para realizar tarefas simples do dia a dia, como assistir a desenhos e jogar ou, para os adultos, pagar uma conta, entrar em contato com outras pessoas, realizar uma compra etc.

Nesse sentido, Santos, Chagas e Bottentuit Jr. (2022) relatam que, nos últimos 20 anos, a tecnologia tem modificado as interações humanas com uma frequência cada vez maior. Mais especificamente, após a pandemia, no período de 2020 a 2021, essas modificações tornaram-se mais intensas, sucedidas pelo surgimento do *ChatGPT*. Estudos revelam que esse cenário acelerou a transformação digital da sociedade e, com isso intensificou a dependência da tecnologia para diversos aspectos da vida social, econômica e cultural (Santos, Chagas e Bottentuit Jr., 2022; Alves, 2022).

Em junho de 2020, quando a empresa *OpenAI* disponibilizou gratuitamente o *ChatGPT* (*Chat Generative Pre-trained Transformer*), houve uma euforia na sociedade marcada por um misto de deslumbre e receio. Isso ocorreu devido à funcionalidade do programa, capaz de gerar sequências de texto coerentes com uma qualidade impressionante e tempo recorde. O *ChatGPT*, um *chatbot on-line* de inteligência artificial generativa (GenAI⁸⁰), utiliza um modelo de aprendizado de máquina baseado em redes neurais, treinado com uma vasta quantidade de

⁷⁷ Universidade Federal de Sergipe, <https://orcid.org/0000-0002-5143-5050>, nailys_sena@hotmail.com

⁷⁸ Universidade Federal de Sergipe, <https://orcid.org/0000-0002-4976-893X>, denize@academico.ufs.br

⁷⁹ Universidade Federal do Pará, <https://orcid.org/0000-0002-8391-7054>, saddoag@gmail.com

⁸⁰ Abreviação de *Generative Artificial Intelligence*.

dados textuais disponíveis na internet, o que lhe permite prever palavras de maneira eficiente (Giraffa e Kohls-Santos, 2023).

O avanço das inteligências artificiais (IA), de acordo com Urmeneta e Romero (2024, p. 10, tradução nossa), inaugura uma era “na qual as tecnologias inteligentes podem aprimorar a experiência de aprendizado de maneiras inéditas”. Além da personalização das atividades de aprendizado, essas tecnologias possibilitam colaborações entre humano e IA. Dessa forma, a educação na era tecnológica não deve se limitar apenas a transmitir informações, refere-se a cultivar o pensamento criativo nos alunos, encorajar a criticidade e capacitá-los a se tornarem aprendizes durante a vida.

Um ano antes da disponibilização gratuita do *ChatGPT*, Pais (2019) já alertava que, na era tecnológica, o aluno deve ser levado a processar informações em vez de apenas coletá-las. Ao utilizar o termo processar, o pesquisador esclarece que este se “aproxima mais do sentido de tratamento de informações para transformá-las em conhecimento” (*ibidem*, p. 68), diferentemente do sentido ao qual era atribuído no passado, quando se referia a uma conotação negativa de automatismo. Dito isto, Pais (2019) sugere que estratégias didáticas se tornem possibilidades para o aluno estudar situações-problema, compatíveis com as atuais exigências da educação.

Diante do exposto, passamos a nos questionar: de que maneira é possível integrar o uso das tecnologias de GenAI nas aulas de matemática por meio de estratégias didáticas que atendam às exigências da era tecnológica? Mais especificamente, como promover o diálogo entre humanos e GenAI no ensino de matemática, de modo que os alunos desenvolvam um pensamento criativo e crítico, capaz de analisar e questionar as informações que recebem?

Estas indagações levaram a primeira autora deste texto a desenvolver um projeto de pesquisa de doutorado que visa a investigar as potencialidades e possibilidades da utilização das GenAI em atividades investigativas para o ensino de matemática. Para tanto, este projeto fundamenta-se na Teoria Antropológica do Didático (TAD), do pesquisador francês Yves Chevallard, importante nome da Didática da Matemática.

O referido teórico tem desenvolvido, há pouco mais de 30 anos, teorizações que permitem analisar a dinâmica dos saberes matemáticos e investigar os problemas existentes na difusão dos objetos do saber a serem ensinados em diferentes instituições. A partir dos anos 2000, Chevallard (2009) passou a se dedicar ao estudo e à proposição de dispositivos didáticos

denominados *parcours d'étude et de recherche*⁸¹ (PER) e *activité d'étude et de recherche*⁸² (AER), voltados para uma pedagogia de investigação. Por meio do PER e da AER, busca-se desenvolver nos alunos a atitude de questionamento, equipando-os com as ferramentas de que necessitam.

O PER é uma metodologia baseada no questionamento por parte da comunidade de estudo, cujo objetivo central é a construção de uma resposta final para uma questão inicial, denominada geradora. Durante o processo de estudo da questão geradora, surgem questões derivadas, cujas respostas temporárias contribuem para a investigação. A questão geradora é elaborada de modo que revele a razão de ser do saber a ser estudado. Para tanto, faz-se necessário realizar uma pesquisa epistemológica e transpositiva, analisando a gênese e o desenvolvimento histórico deste saber, a fim de identificar as questões fundamentais que este permite responder. Como resultado, será possível identificar as questões geradoras, sejam elas matemáticas ou não, que aquele saber permite responder (Gascón, 2018).

Diante do exposto, neste artigo, apresentamos o desenvolvimento de um estudo preliminar realizado pela primeira autora, para o qual foi elaborada uma aula de matemática nos moldes do PER com o objetivo de ensinar sólidos geométricos no 9º ano do ensino fundamental, em diálogo com as plataformas de GenAI, *ChatGPT* e *NotebookLM*. Para tanto, foi tomado como base o estudo deste saber matemático realizado na pesquisa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da primeira autora, o qual permitiu identificar a gênese e razão de ser desse objeto — sólidos geométricos (Sena Santos, 2021).

A seguir, apresenta-se um rápido contexto sobre o que fundamentou nosso trabalho, iniciando com uma abordagem teórica sobre as ferramentas tecnológicas utilizadas atualmente, como funcionam na área da Educação e na Educação Matemática. Em seguida, buscamos também apresentar uma abordagem sobre a teoria que norteia o estudo – a TAD.

2. Inteligência artificial generativa e educação matemática

De acordo com Rossini, Santos e Veloso (2024), os sistemas de Inteligência Artificial (IA) fazem parte do nosso cotidiano há algumas décadas. Entretanto, até o lançamento do *ChatGPT* (*Generative Pre-trained Transformer*), sua interação passava despercebida por nós, quando realizávamos buscas em navegadores da *internet*, nas recomendações personalizadas de acordo com nossas preferências em mídias sociais, quando utilizávamos os assistentes

⁸¹ Leia-se a tradução de *parcours d'étude et de recherche* — percurso de estudo e pesquisa.

⁸² Leia-se a tradução de *activité d'étude et de recherche* — atividade de estudo e pesquisa.

virtuais ou os sistemas de reconhecimento de voz muito comuns em plataformas *on-line*, *smartphones*, automóveis, etc.

Com o lançamento do *ChatGPT*, em 2022, pelo laboratório de pesquisa *Open AI*, “a IA passou da invisibilidade para o protagonismo quando se tornou produtor de conteúdos diversos a partir de prompts em linguagem natural” (Rossini, Santos e Veloso 2024, p. 59). A possibilidade de criar textos, imagens, músicas e até mesmo códigos de programação por meio de interação conversacional em linguagem natural estabeleceu um marco importante da IA para a sociedade e, assim, popularizou seu uso.

O *ChatGPT* utiliza a técnica de Inteligência Artificial Generativa (GenAI), um ramo da IA que usa redes neurais artificiais previamente treinadas para gerar novos conteúdos e informações de forma autônoma a partir de uma mensagem (prompt) em linguagem natural (Rossini, Santos e Veloso 2024). As redes neurais artificiais, inspiradas na organização do sistema nervoso humano, são técnicas computacionais em forma de modelo matemático elaboradas a partir das interligações (sinapses) das unidades de processamento (neurônios) organizadas em camadas sequenciais de entrada, intermediária e de saída (Carraro, 2023).

“Cada neurônio é responsável por receber uma entrada, processá-la e transmitir o seu resultado adiante” (Carraro, 2023, p. 52). Os neurônios que estão na camada de entrada recebem os dados brutos externos e os convertem em valores numéricos. Os neurônios das camadas intermediárias recebem o resultado do processamento da camada anterior e realizam os cálculos. Por fim, a camada de saída fornecerá o resultado do modelo (Carraro, 2023).

De acordo com Carraro (2023), há diversas arquiteturas de redes neurais, de modo que cada uma foi projetada para lidar melhor com certo tipo de tarefa. Um dos tipos de arquitetura de rede neural desenvolvidos refere-se aos *Transformers*, uma nova arquitetura de rede neural para compreensão de linguagem.

O principal conceito por trás da arquitetura de um *Transformer* é o mecanismo de “atenção”, que permite que o modelo “preste mais atenção” a algumas palavras do que a outras, o que resulta em uma maior capacidade de entender o contexto e a sintaxe de um texto (Carraro, 2023, p. 57, itálico e aspas do autor).

A arquitetura *transformer* foi um dos grandes responsáveis pelo aprimoramento dos modelos de linguagem – modelo probabilístico que, após ser treinado com muitos textos, consegue prever a próxima palavra em uma sequência de palavras. A trajetória desses modelos iniciou-se nos anos 1950 e 1960, evoluiu ao longo dos anos e chegou até a criação do *Large*

Language Models (LLM)⁸³. O LLM é um modelo que realiza seu treinamento de forma autônoma, utilizando grandes volumes de dados não rotulados, extraídos de diversas fontes da *internet*, com o objetivo de identificar padrões úteis sem depender de rotulagem manual ou intervenção humana (Carraro, 2023).

O LLM possibilitou uma revolução nos *chatbots*⁸⁴, que passaram a entender e gerar textos de forma muito mais sofisticada e, dessa forma, proporcionar uma experiência de conversação mais natural e útil.

O *ChatGPT* é um desses *chatbots*, capaz de gerar textos avançados e participar de conversas convincentes com os usuários. Ele pode realizar várias tarefas, como escrever redações, gerar ideias de pesquisa, realizar revisões de literatura, aprimorar artigos e escrever códigos de programação (Shoufan, 2023, p. 38806, tradução e itálico nossos).

O surgimento de *chatbots* que utilizam o LLM “representa um avanço na interação entre humano e computador com base em inteligência artificial para criação de conhecimento” (*idem, ibidem*).

Na educação, o *ChatGPT* foi recebido com admiração, mas também gerou controvérsia. Estudos nesta área evidenciaram as limitações e desafios éticos associados ao uso da GenAI, como privacidade, vieses algorítmicos e a precisão das respostas geradas como obstáculos para sua utilização” (Barros e Abreu, 2024). Entretanto, apesar desses obstáculos, as GenAI podem desempenhar um papel significativo na educação, auxiliando professores em seus planejamentos de aulas, avaliação de alunos e desenvolvimento profissional. Os alunos, por sua vez, podem desenvolver habilidades como leitura, escrita, análise de informações, pensamento crítico, resolução de problemas, geração de questões práticas e pesquisa (Shoufan, 2023).

Mais especificamente, no contexto da educação matemática, a integração da GenAI “pode proporcionar um ambiente de aprendizado mais interativo e adaptado às necessidades individuais, permitindo que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma prática e contextualizada” (Barros e Abreu, 2024, p. 299). O *ChatGPT*, por exemplo, fomenta a interação entre alunos, professores e conteúdos matemáticos, por meio de diálogos naturais e personalizados, estimulando a inovação pedagógica e a autonomia dos estudantes (Silva e Tanaka Filho, 2025).

⁸³ Em português: “Grande Modelo de Linguagem”.

⁸⁴ “Um *chatbot* é um programa de computador que simula uma conversa com usuários por meio de linguagem natural ou texto, dando a ilusão de estar se comunicando com um humano” (Shoufan, 2023, p. 38805).

Essa autonomia, segundo Barros e Abreu (2024), gera impactos significativos para além da sala de aula, visto que possibilita desenvolver habilidades de autoaprendizagem essenciais para o século XXI. No entanto, vale considerar os desafios relacionados à falta de fontes para as respostas geradas e às respostas erradas, chamadas de "alucinações" (p. 299). Portanto, para a aplicabilidade junto aos estudantes, é necessária a supervisão dos educadores para garantir a veracidade e a qualidade do material gerado, bem como a criação de perguntas e comandos (prompt) bem elaborados (Ribeiro *et al.*, 2024).

Nesse viés, os estudos da Didática da Matemática, sob a perspectiva da Teoria Antropológica do Didático, podem contribuir com a ação educativa para o ensino de matemática, quanto à elaboração de atividades matemáticas ou mesmo o planejamento de uma aula, valendo-se de duas ferramentas, GenAI e o PER, as quais podemos considerar como uma inovação pedagógica, se articuladas de modo eficaz.

Em outras palavras, consideramos que o uso da GenAI pode ser articulado com uma atividade investigativa nos moldes do PER para o ensino da matemática. O uso da inteligência artificial generativa gera possibilidades ao professor que ensina matemática para planejar aulas criativas, a fim de fomentar também a criatividade e desenvolvimento de habilidades nos alunos. O PER, por ser uma metodologia da Teoria Antropológica do Didático, favorece condições para o professor/pesquisador romper velhas tradições do ensino de matemática ao ensinar objetos matemáticos. A partir dessa articulação, esperamos propor uma atividade investigativa que permita o desenvolvimento da autonomia e do pensamento crítico dos estudantes, principalmente no que se refere à validação e criação de boas perguntas.

3. Teoria antropológica do didático

Yves Chevallard, teórico da Didática da Matemática francesa, tem desenvolvido, há pouco mais de três décadas, uma teoria que permite questionar o saber matemático e investigar os problemas existentes entre os diferentes objetos do saber a ensinar. O teórico caracteriza o saber a ensinar como aqueles apresentados “nos manuais e/ou livros didáticos, nas propostas curriculares e nos planejamentos de ensino, utilizados pelos professores com o intuito de transpor, em sala de aula, o objeto de ensino em um saber ensinado” (Sena Santos, 2021, p. 39).

Chevallard (2018) observa que esses saberes, por vezes, apresentam-se como problemáticas para o professor de matemática, o qual atribui a origem desses problemas à dificuldade que seus alunos apresentam na compreensão dos objetos matemáticos. Chevallard (2018, p. 32) aponta que os professores buscam “explicações” matemáticas para reduzir o

fracasso dos alunos, baseando-se inicialmente nos saberes dos currículos e livros didáticos. Contudo, essas fontes são limitadas, o que leva o professor a recorrer aos saberes acadêmicos adquiridos na universidade. Ainda assim, esses materiais, muitas vezes, mostram-se inadequados para interpretação, compreensão e ensino dos conteúdos e, desse modo, deixam o professor sem respostas às demandas dos alunos.

Diante disso, Chevallard evidencia a necessidade de investigar o saber escolar, posicionando-o no centro da pesquisa sobre os processos de ensino e aprendizagem da matemática. Com base nos resultados de pesquisas e estudos desenvolvidos no contexto de suas teorizações – a teoria da transposição didática e a teoria antropológica do didático –, Chevallard identificou que o ensino atual da matemática segue um paradigma escolar, o qual, esse teórico denomina-o «monumentalista» ou «paradigma de visita às obras» (Carvalho e Santos, 2023).

Ao sugerir que, atualmente, os sistemas de ensino são caracterizados pelo paradigma de visita às obras, Chevallard e Strømskag (2022) fazem alusão a um passeio em um museu que os observadores visitam para conhecer as obras sem que haja nenhuma interação.

No contexto da teoria antropológica do didático, esse paradigma é conhecido como o paradigma da "visita às obras" ou – segundo uma metáfora usada na TAD – da "visita aos monumentos", pois cada um desses fragmentos de conhecimento – por exemplo, a fórmula de Herón para a área de um triângulo – é abordado como um monumento que se sustenta por si só, que os alunos devem admirar e apreciar, mesmo quando sabem quase nada sobre suas razões de ser, tanto no presente quanto no passado (Chevallard, 2012, p. 2, 3).

Nesse paradigma, a razão para estudar determinada obra é apenas a importância dada à obra em si. Contudo, os estudos de Chevallard no decorrer dos anos foram evocando variações do paradigma de visita às obras, como, por exemplo, o ensino de matemática disposto pela apresentação da obra acompanhada de aplicações ou exemplos. Essa variante propunha-se a engajar os alunos nos exercícios logo após a exposição da obra, na busca de fornecer possíveis razões para a existência desta e contribuir para um maior envolvimento no estudo. Outra variação citada refere-se ao ensino, no qual os alunos são envolvidos na solução de uma situação que abarcará o uso de técnicas já anteriormente adquiridas por eles, a fim de levá-los a assimilar novas noções ou técnicas (Matheron e Méjani, 2022).

Em oposição ao paradigma atual de visita às obras, o teórico propõe a transição para um novo paradigma: o paradigma de questionamento do mundo. Nesse novo paradigma, os alunos iriam à escola “não para visitar saberes vistos como desejáveis em si, mas para questionar sobre o mundo e questionar o mundo” (Chevallard, 2018, p. 37). Para tanto, esse teórico sugere pensar

em dispositivos didáticos para o ensino e aprendizagem da matemática que questionem elementos do ensino escolar tradicional e que integrem a razão de ser do saber escolar.

Assim, Chevallard (2018, p. 37) recomenda que as escolas passem a adotar “uma pedagogia da investigação codisciplinar para formar seus alunos ao ato de questionamento e às ferramentas de que ele necessita”. Nesse sentido, uma investigação raramente mobiliza saberes de uma única disciplina; em outras palavras, uma investigação favorece que os saberes provenientes de diversas disciplinas sejam explorados, o que justifica a codisciplinaridade (Chevallard, 2009). Participar de uma investigação nesses moldes equivale a participar de um “*parcours d'étude et de recherche* (PER)” motivado por essa mesma investigação (Chevallard, 2009, p. 1, itálico do autor).

O dispositivo didático PER foi inspirado e adaptado do sistema *travaux personnels encadrés* (TPE)⁸⁵ instalado no ensino francês, no início de 2000, para estudantes do ensino médio (Chevallard, 2001, 2018). De acordo com Almouloud *et al.* (2018), os TPE seguem uma orientação nacional do Ministério da Educação francês, o qual define temáticas que norteiam a construção dos TPE, como, por exemplo, as desigualdades: crise e progresso, uma das temáticas propostas entre os anos de 2015 e 2017.

Com base nesses temas, os alunos, em grupos, constroem uma pergunta investigada por eles com o intuito de respondê-la ao longo de um semestre, durante duas horas por semana. Seu desenvolvimento incita uma recontextualização dos conhecimentos disciplinares, o que leva à descompartimentalização das disciplinas. Na importação realizada por Chevallard (2009), o PER não mantém a característica codisciplinar dos TPE, uma vez que são propostos para o estudo dos objetos matemáticos.

Nessa abordagem, a codisciplinaridade é colocada entre parênteses. Os PER em questão são <<matemáticos>>: são PER que, hoje, eu chamo mais geralmente de PER (ou investigações) *monodisciplinares*; ou, para ser mais realista, *quase monodisciplinares*. No caso da aula de matemática, podemos falar de *investigações matemáticas* (Chevallard, 2009, p. 3).

O PER articula-se com a AER, que “consiste no estudo de uma questão *q* que, realizada sob certas condições e sob certas restrições, vai fazer encontrar uma obra *o* normalmente determinada de antemão” (Chevallard e Strømskag, 2022, p. 33, itálico dos autores). Quando aplicada no ensino de matemática, a pedagogia do AER levará ao encontro dos objetos matemáticos escolares. Por outro lado, propor uma questão mais ampla gera todo um PER

⁸⁵ Leia-se a tradução de *travaux personnels encadrés* (TPE) – trabalho pessoal supervisionado.

constituído por mapa de questões, $Q = \{q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, \dots\}$, ou seja, podemos dizer que um PER consiste na realização de uma sequência de AER derivada da questão Q.

Embora uma AER no sentido usual do termo possa ser vista como um PER, a noção de PER aqui considerada se distingue em vários aspectos da noção de AER, aparecendo como uma superação desta última. No ponto de partida de um PER assim entendido, há, naturalmente, uma primeira questão Q, mas uma questão à qual não se atribui o objetivo de «forçar» o encontro com algum elemento matemático específico – com tal teorema, definição, notação, técnica, etc. Ao contrário, é desejável que o estudo prolongado de Q tenha um forte potencial gerador, de modo que ele possa se desdobrar em um grande número de questões «secundárias», que seriam objeto de AER específicas, mesmo que não seja mais possível satisfazer o requisito de uma «divisão minuciosa» do novo conteúdo matemático que uma determinada AER deveria revelar (Chevallard, 2007, p. 41, tradução nossa).

Assim, Chevallard (2009, p. 3, tradução nossa) apresenta um ponto importante para a proposição de um PER, a “geratividade da questão Q”. É necessário que a questão Q, ao ser estudada sob certas condições e restrições, possibilite gerar questões derivadas. Assim, diferentemente do paradigma de visita às obras, no qual o objetivo é conhecer coisas, no paradigma de questionamento do mundo, o currículo apresenta-se “como um conjunto de perguntas em que os estudantes, com o professor, investigam para aportar alguma resposta” (Teixeira e Farias, 2022, p. 9).

Todavia, há algumas restrições para a implementação do PER que provêm, em sua maioria, do paradigma de visita às obras, como, por exemplo, a rigidez da organização conceitual do saber matemático, o monumentalismo da pedagogia dominante e as fronteiras que existem entre as disciplinas. Outras restrições derivam especificamente do próprio saber matemático escolar (Teixeira e Farias, 2022).

Assim, propor um PER requer uma investigação preliminar sobre o saber a ser estudado, uma investigação que permita identificar quais questões esse saber responde e quais são as respostas para essas questões (Matheron e Méjani, 2022). Com base nesse estudo preliminar, uma etapa adicional torna-se necessária: a elaboração de um modelo praxeológico de referência (MPR).

De acordo com Gáscon (2018), o MPR pode ser construído após o estudo das três dimensões fundamentais do problema didático relativo ao saber em questão. Os problemas didáticos, no âmbito da Didática da Matemática, são gerados e evoluem com a disciplina que os constrói. Dessa forma, Gáscon (2011) esclarece que um problema didático pode ser formulado provisoriamente a partir da consideração de um problema docente.

Os problemas docentes surgem das inquietações do professor quando tem que ensinar um determinado conteúdo aos seus alunos e podem ser expressos com questões do tipo: o que ensinar e como ensinar um determinado saber matemático? (Gáscon, 2011). Essas questões podem ser formulações mais específicas, como, por exemplo: como posso usar as GenAI para melhorar o processo de ensino dos sólidos geométricos?

Gáscon (2011, p. 207, tradução nossa) explica que os “problemas docentes são formulados com as noções disponíveis na cultura escolar, que muitas vezes são importadas dos documentos curriculares”. Assim, para ser considerado um problema didático, este deve requerer ao menos da dimensão epistemológica, na qual se investiga o saber matemático antes de ser transformado em objeto de ensino, a partir do estudo histórico acerca desse saber, visando identificar sua gênese e razão de ser.

Como resultado dessa dimensão, procura-se explicitar um Modelo Epistemológico de Referência (MER) que permite questionar como as instituições envolvidas no problema didático interpretam o saber matemático. A dimensão epistemológica é considerada central por permear e condicionar fortemente as demais dimensões.

O estudo realizado na dimensão econômica visa identificar nas instituições envolvidas no processo de ensino e aprendizagem a maneira como o saber matemático está posto, sendo possível explicitar o Modelo Epistemológico Dominante (MED) de cada instituição, materializadas em um modelo docente, ou seja, nas praxeologias utilizadas pelo professor para ensinar objetos matemáticos. Na dimensão ecológica, investiga-se o motivo pelo qual o objeto matemático existe na instituição da maneira como existe e quais condições seriam necessárias para modificá-la (Farras, Bosch e Gascón, 2013; Figueroa e Almouloud, 2018).

Após o estudo das três dimensões fundamentais, reestrutura-se o modelo de referência, seguindo a estrutura praxeológica da TAD, a fim de explicitar um novo modelo, o MPR, o qual permite caracterizar e analisar praxeologias a ensinar. A noção de praxeologia “é o coração da TAD” (Chevallard, 2018, p. 24), utilizada para se referir a modelização das atividades humanas, incluindo as atividades matemáticas. A escolha dessa palavra é justificada pelo teórico pelo fato de que, sempre, haverá um discurso mais ou menos fundamentado que explica e dá razão a qualquer prática humana, realizada no interior de uma instituição (Chevallard, 1998; 2002).

As praxeologias podem ser de dois tipos: praxeologia (ou organização) matemática e a praxeologia (ou organização) didática. Enquanto a primeira diz respeito à maneira como é

possível instituir um conceito matemático, a segunda refere-se à forma como é possível estudar uma determinada organização matemática (Almouloud, 2022).

As praxeologias matemáticas são constituídas por quatro elementos: tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Uma tarefa é expressa por um verbo de ação, que, ao adicionar um complemento, caracteriza um tipo de tarefa. Com isso, ao serem dadas as tarefas t do tipo T , em princípio, haverá uma maneira de realizá-las. Essa maneira é chamada por Chevallard (1998, 2018) de técnica τ , do grego, *tekhnē* (como fazer). Portanto, uma praxeologia relacionada a um tipo de tarefa possui ao menos uma técnica correspondente. Um tipo de tarefa e uma técnica constituem o bloco técnico-prático da praxeologia (ou organização) matemática, denominado “saber-fazer”.

Uma técnica, empreendida para resolver uma determinada tarefa, sempre será acompanhada por um discurso racional, que justifica e valida o seu uso. A esse discurso dá-se o nome de tecnologia (θ). Toda tecnologia, por sua vez, necessita de uma justificação, uma vez que o discurso que justifica a técnica apresenta-se com afirmações mais ou menos explícitas. Eleva-se então o nível de justificação, dessa vez, em relação à tecnologia. A tecnologia da tecnologia é denominada teoria (Θ). A dupla formada pela tecnologia e pela teoria constitui o bloco tecnológico-teórico, identificado como “saber” (Chevallard, 1998, 2018).

A associação e articulação entre esses dois blocos, bloco técnico-prático — $[T, \tau]$, e bloco tecnológico-teórico — $[\theta, \Theta]$, resultam na organização de tipos de tarefas. Quando organizados para um tipo de tarefa, constituem a estrutura praxeológica mais simples, a praxeologia (ou organização) matemática pontual. Em outras palavras, para cada tipo de tarefa, é possível organizarmos uma praxeologia pontual, na qual obteremos um saber-fazer justificado por um saber. A união de praxeologias pontuais resulta em praxeologias locais que giram em torno de uma mesma tecnologia.

Tendo em conta o mesmo raciocínio, as praxeologias locais serão reunidas em praxeologias regionais, centradas em uma mesma teoria, entretanto, com tecnologias diferentes. Por último, as praxeologias regionais constituirão praxeologias globais correspondentes a várias teorias. Essas teorias são restritas a uma disciplina, como a matemática, a qual impõe restrições e condições para o estabelecimento das praxeologias, e, desse modo, compõe-se o que Chevallard (2002) denomina como níveis de determinação matemática.

Além da disciplina, Chevallard (2002) classifica outros quatro níveis de determinação matemática: objeto, tema, setor, domínio, sendo a disciplina o último desses níveis.

Figura 1. Níveis de determinação matemática



Fonte: Modificado de Sena Santos (2021).

Esses são os primeiros níveis que oferecem restrições para uma organização matemática. Quando Chevallard (2018) estabelece uma praxeologia pontual, está se referindo a um tipo de tarefa. Este tipo de tarefa determina um objeto de estudo; por exemplo, o tipo de tarefa: nomear os sólidos geométricos; podemos dizer que se refere ao objeto de estudo: nomenclatura dos sólidos geométricos.

Podemos apontar outros objetos de estudo, como classificação dos sólidos, elementos dos sólidos geométricos etc. Esses objetos determinam praxeologias pontuais justificadas pela mesma tecnologia, que assume o *status* de tema de estudo da praxeologia local. O tema de estudo, por sua vez, é situado em um terceiro nível de determinação. Quando diferentes praxeologias locais são justificadas pela mesma teoria, que recebe o nome de setor de estudo, constituem-se uma praxeologia regional. Por fim, uma praxeologia global determina um domínio de estudo, como a geometria, constituído por várias teorias.

Para a elaboração da proposta do PER, apoiamo-nos no estudo apresentado na dissertação do mestrado da primeira autora, que realizou o estudo das três dimensões fundamentais (epistemológica, econômica e ecológica) do problema didático dos sólidos geométricos. Assim, como resultado desse estudo, Sena Santos (2021) identificou os tipos de tarefas aos quais os sólidos geométricos respondem (razão de ser) e situou o estudo dos sólidos geométricos nos anos finais do ensino fundamental como uma praxeologia matemática local, conforme Quadro 1.

Quadro 1. Escala de níveis de determinação matemática dos sólidos geométricos

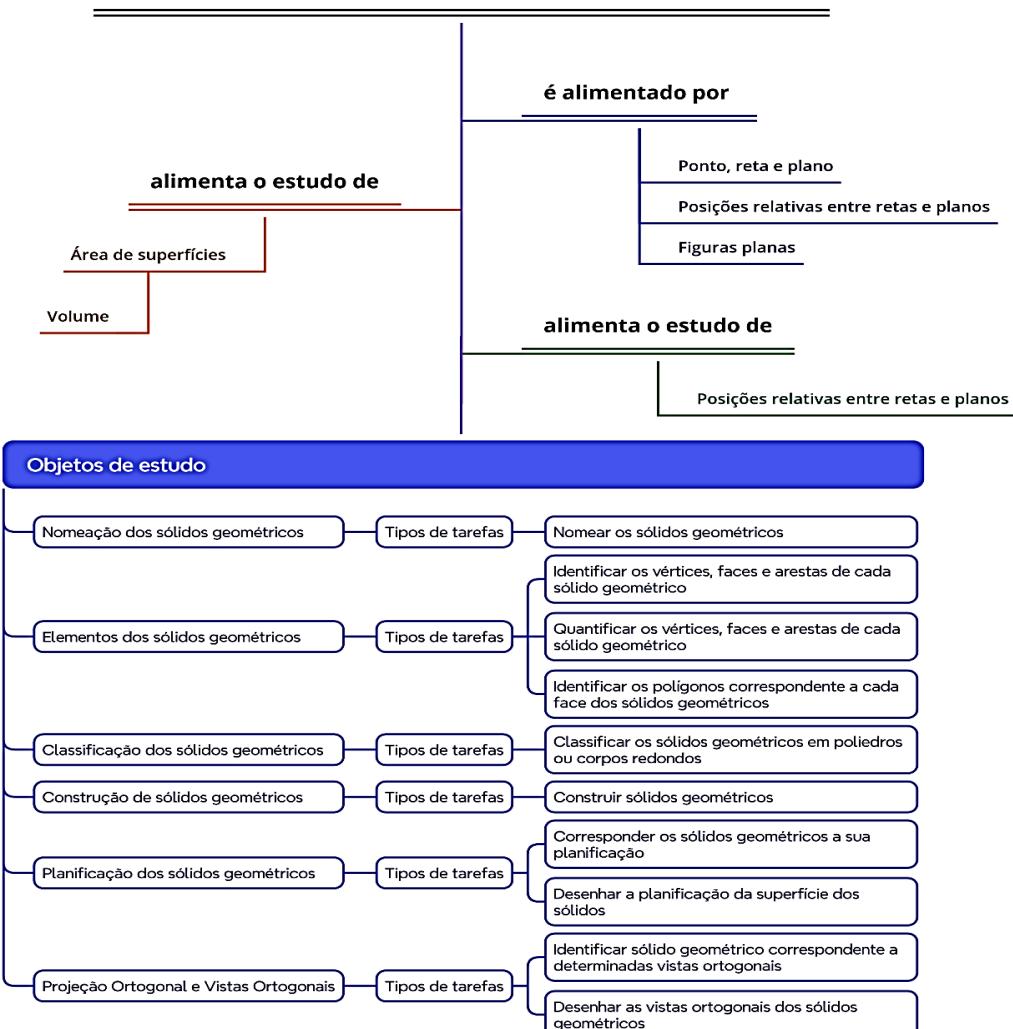
Disciplina	Matemática
Domínio	Geometria
Setor	Geometria espacial
Tema	Sólidos geométricos
Objetos de estudo	Nomenclatura dos sólidos geométricos; elementos dos sólidos geométricos; classificação dos sólidos geométricos; construção de sólidos geométricos; planificação da superfície de sólidos geométricos; projeção e vistas ortogonais.

Fonte: Modificado de Sena Santos (2021).

Após o referido estudo, Sena Santos (2021) construiu um MPR, no qual são apresentados os objetos de estudo referentes ao tema sólidos geométricos, os conceitos alimentados por esse tema e aqueles que alimentam o seu estudo. Optamos por reelaborar o MPR criado pela pesquisadora, adicionando os tipos de tarefas correspondentes a cada um dos objetos de estudos, para melhor visualização.

Figura 2. MPR dos sólidos geométricos

Sólidos Geométricos para os anos finais do ensino fundamental



Fonte: Elaborado pelos autores

Com essas informações, dialogamos com duas plataformas de inteligência artificial generativa, *NotebookLM* e *Chat GPT*, para, com cada uma delas, respectivamente, desenvolver uma questão geradora para a nossa proposta de PER e as possíveis questões parciais que poderiam surgir na implementação do PER. Conforme proposto pela TAD, nossa questão geratriz deve suscitar a razão de ser dos sólidos geométricos e gerar motivação para os alunos interessarem-se em estudá-la.

4. Diálogo com a GenAI sobre o PER

O diálogo foi iniciado na plataforma *NotebookLM*, alimentando-a com os textos de Menezes (2015), Chevallard (2002), Chevallard (2009) e um recorte da dissertação de autoria de Sena Santos (2021) referente aos resultados obtidos a partir do estudo das três dimensões do problema didático sobre sólidos geométricos. Os dois primeiros autores abordam sobre as noções fundamentais propostas pela TAD que embasam o desenvolvimento do PER. No terceiro texto, Chevallard (2009) discorre a respeito do PER, sua elaboração, problemáticas e avanços.

Segundo a introdução apresentada na sua página inicial, o *NotebookLM* é uma ferramenta de IA que permite a criação de anotações, resumos, guias de estudo e, até mesmo, audiovisuais, quando se tomam como base as fontes carregadas pelo usuário. Assim, o *NotebookLM* auxilia na compreensão de informações complexas a partir das fontes fornecidas. Diferentemente do ChatGPT, que, em sua versão gratuita, limita o número de arquivos que podem ser carregados em um diálogo, a ferramenta *NotebookLM* suporta vários arquivos simultaneamente e oferece recursos de compartilhamento e análise de uso. O *NotebookLM* ainda se descreve como

uma ferramenta de pesquisa que auxilia na síntese de informações de múltiplas fontes. Ele permite o *upload* de diversos formatos de documentos (PDFs, slides, Google Docs, etc.) e oferece *templates* como FAQ, guia de estudo, documento informativo e linha do tempo, facilitando a organização e compreensão do material. Para livros, recomenda-se a criação de um documento Google Docs com citações formatadas, incluindo metadados. Interações com Google Keep e ReadWise permitem a coleta e importação de trechos de páginas web e e-books, respectivamente. Finalmente, o *NotebookLM* permite interação via *chat*, com respostas citadas para garantir a rastreabilidade das informações⁸⁶.

Assim, a partir dos textos carregados no bate-papo iniciado, realizamos uma série de questionamentos quanto às noções de praxeologias pontual, local, regional e global, até obtermos da ferramenta uma resposta satisfatória sobre esses conceitos. Em seguida, partimos

⁸⁶ <https://notebooklm.google.com/>.

para questionamentos referentes à articulação dos fundamentos da TAD com o dispositivo do PER. Por fim, solicitamos que fornecesse sugestões para elaboração de uma questão para o estudo dos sólidos geométricos com base no recorte da dissertação.

Realizamos esse procedimento em dois momentos e obtivemos duas sugestões diferentes. No primeiro bate-papo, solicitamos tarefas em nível de praxeologia global e, no segundo diálogo, em nível de praxeologia regional. No Quadro 2, apresentamos o *prompt* utilizado e as respostas fornecidas nos dois momentos⁸⁷.

Quadro 2. *Prompt* e respostas do diálogo com o *NotebookLM*

Prompt: A partir das tarefas que constituem a razão de ser do tema sólidos geométricos, sugira uma tarefa a nível global/regional que desencadeia os estudos das demais tarefas.
Tarefa (Praxeologia regional): Projetar e construir uma maquete de uma cidade utilizando sólidos geométricos, considerando aspectos arquitetônicos e urbanísticos.
Tarefa (Praxeologia global): Projetar e construir embalagens otimizadas para diferentes produtos, utilizando sólidos geométricos.

Fonte: Elaborado pela primeira autora (jan., 2025).

Com base nessas sugestões, elaboramos a seguinte proposta de questão geradora para desenvolver o PER para o 9º ano do ensino fundamental: o que devemos considerar para confeccionar caixas de lembrancinha reciclando uma garrafa PET?

Após definirmos a questão geradora, realizamos um diálogo com a plataforma *ChatGPT*, em dois momentos, com o intuito de listarmos as possíveis questões derivadas que poderiam surgir durante a implementação do PER. No primeiro diálogo, realizamos a pergunta (*prompt*) sem explicar o que seria o PER (Protocolo 1).

Protocolo 1. Questões subsidiárias resultantes da Q ♡

Prompt: Pretendo desenvolver uma atividade investigativa de matemática nos moldes do Percurso de Estudo e Pesquisa com meus alunos, pela qual eles precisam encontrar a resposta para uma pergunta geradora. A proposta é que eles elaborem perguntas derivadas, que deverão ser respondidas, para que, ao final, seja possível responder à pergunta geradora. Por exemplo, se a pergunta geradora fosse “O que devo considerar para me prevenir de um tsunami?”, como pergunta derivada, o aluno poderia elaborar: “O que é um tsunami?”, “Como eles se formam?”, “Qual extensão de danos que o tsunami pode causar?” etc. Agora, elabore uma lista de possíveis perguntas derivadas para a seguinte pergunta geradora: o que devemos considerar para confeccionar uma caixa de lembrancinha reciclando uma garrafa pet?

ChatGPT respondeu:

Aqui está uma lista de possíveis perguntas derivadas para a sua pergunta geradora:

Materiais e Sustentabilidade

Q1.1. O que é uma garrafa PET e quais são suas características?

Q1.2. Quais os impactos ambientais das garrafas PET?

Q1.3. Quais são as vantagens de reciclar garrafas PET?

Q1.4. Que outros materiais recicláveis podem ser utilizados na confecção da caixa?

Geometria e Medidas

Q1.5. Quais formas geométricas podemos obter a partir de uma garrafa PET?

Q1.6. Como determinar as medidas ideais para a caixa?

Q1.7. Como calcular a capacidade (volume) da caixa de lembrancinha?

⁸⁷ As respostas completas encontram-se em anexo.

Q1.8. Como garantir que a tampa da caixa encaixe corretamente?

Técnicas e Procedimentos

Q1.9. Como cortar e moldar a garrafa PET para transformá-la em uma caixa?

Q1.10. Que tipos de adesivos ou colas são mais adequados para unir as partes da caixa?

Q1.11. Como reforçar a estrutura da caixa para que fique resistente?

Q1.12. Quais técnicas de acabamento podem ser utilizadas para melhorar a estética da caixa?

Criatividade e Personalização

Q1.13. Quais tipos de decoração podem ser aplicados à caixa de lembrancinha?

Q1.14. Como podemos personalizar a caixa para diferentes eventos (aniversários, casamentos etc.)?

Q1.15. Quais tintas ou materiais podem ser utilizados para colorir a caixa sem comprometer a reciclagem?

Usabilidade e Funcionalidade

Q1.16. Para quais tipos de lembrancinhas a caixa pode ser utilizada?

Q1.17. Como podemos garantir que a caixa seja prática e funcional?

Q1.18. Como tornar a caixa durável e reutilizável?

Matemática na Prática

Q1.19. Como podemos estimar a quantidade de garrafas PET necessária para confeccionar várias caixas?

Q1.20. Como calcular o custo aproximado da confecção de uma caixa utilizando materiais reciclados?

Fonte: Fonte: Elaborado pela primeira autora (jan., 2025).⁸⁸

No segundo diálogo, anexamos o texto de Chevallard (2009), o qual aborda sobre o percurso, e, em seguida, realizamos a pergunta (Protocolo 2).

Protocolo 2. Questões subsidiárias resultantes da Q⁹

Prompt: Pretendo desenvolver uma atividade investigativa de matemática nos moldes do Percurso de Estudo e Pesquisa com meus alunos, pela qual eles precisam encontrar a resposta para uma pergunta geradora. A proposta é que eles elaborem perguntas derivadas, que deverão ser respondidas, para que, ao final, seja possível responder à pergunta geradora. Por exemplo, se a pergunta geradora fosse “O que devo considerar para me prevenir de um tsunami?”, como pergunta derivada, o aluno poderia elaborar: “O que é um tsunami?”, “Como eles se formam?”, “Qual extensão de danos que o tsunami pode causar?” etc. Agora, elabore uma lista de possíveis perguntas derivadas para a seguinte pergunta geradora: O que devemos considerar para confeccionar uma caixa de lembrancinha reciclando uma garrafa pet?

ChatGPT disse:

Perguntas derivadas:

Q2.1. O que é uma garrafa PET e quais são suas características?

Q2.2. Quais tipos de garrafas PET podem ser utilizadas para a confecção da caixa?

Q2.3. Como cortar e modelar a garrafa PET para transformá-la em uma caixa?

Q2.4. Quais ferramentas e materiais são necessários para confeccionar a caixa?

Q2.5. Como garantir que a caixa tenha resistência e durabilidade?

Q2.6. Quais técnicas de fechamento podem ser usadas para a tampa da caixa?

Q2.7. Quais formas geométricas podem ser criadas a partir da garrafa PET?

Q2.8. Como decorar a caixa de forma criativa e sustentável?

Q2.9. De que maneira a reciclagem da garrafa PET contribui para o meio ambiente?

Q2.10. Como calcular o volume interno da caixa feita de PET?

Q2.11. Quais os custos envolvidos na produção de uma caixa de lembrancinha com material reciclável?

Q2.12. Como comparar a resistência de uma caixa de PET com uma de papelão ou outro material?

Q2.13. Quais são os principais desafios ao trabalhar com garrafa PET na confecção de caixas?

Q2.14. Como podemos personalizar a caixa para diferentes tipos de eventos?

Q2.15. Que tipo de cola ou fixação é mais eficiente para unir partes da caixa?

Q2.16. Como podemos tornar a caixa dobrável ou fácil de armazenar?

Q2.17. Como a matemática pode nos ajudar a planejar o *design* da caixa?

Q2.18. Como medir e cortar a garrafa PET com precisão para que a caixa fique simétrica?

Q2.19. Como podemos calcular quantas garrafas PET são necessárias para fazer um determinado número de caixas?

Q2.20. Como testar a funcionalidade da caixa após sua confecção?

Fonte: Elaborado pela primeira autora (jan., 2025).

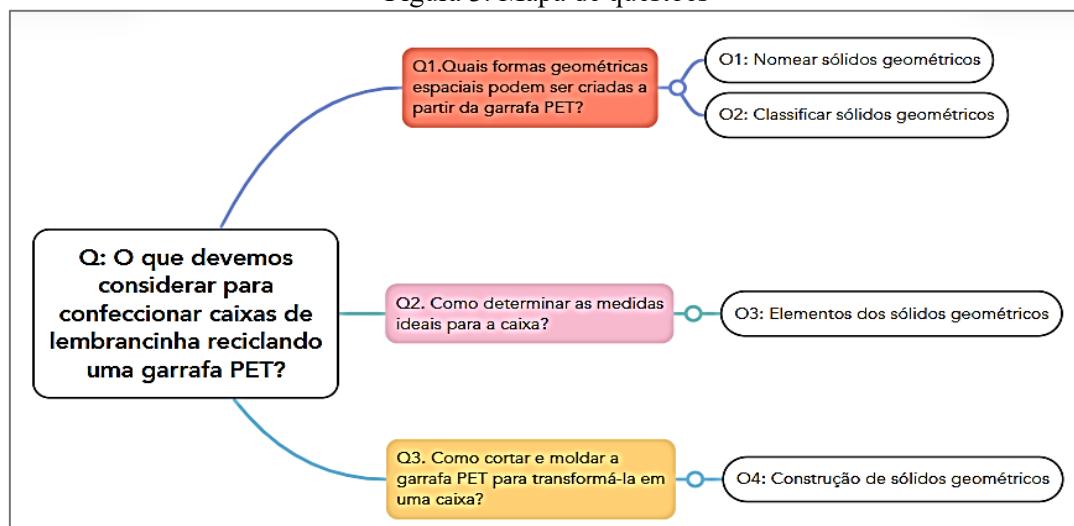
⁸⁸ A resposta foi modificada pelas autoras, as quais acrescentaram a indicação $Q_{i,j}$, onde i corresponde ao protocolo e j à ordem em que foram apresentadas na resposta da GenAI. O mesmo ocorreu para o protocolo 2.

Apesar de não ser a mesma resposta nos dois bate-papos, observamos similaridades quanto às respostas fornecidas. É válido ressaltar que os diálogos realizados com as GenAI, *NotebookLM* e *ChatGPT* foram realizados em duas contas diferentes da primeira autora. Ao relacionarmos as perguntas derivadas sugeridas pelo *ChatGPT* com os tipos de tarefas elencados na dissertação de Sena Santos (2021), observamos que nem todas as questões derivadas conduzem diretamente para o estudo em direção a todos os tipos de tarefas elencados.

As tarefas referentes ao objeto de estudo, nomenclatura dos sólidos geométricos, podem ser suscitadas a partir das questões derivadas Q1.5 e Q2.7. As tarefas referentes aos elementos dos sólidos geométricos podem ser exploradas a partir das questões Q1.6, Q1.5, Q2.7 e Q2.10. A classificação dos sólidos geométricos pode ser abordada enquanto se estudam as questões Q1.5, Q2.5 e Q2.7. Em relação à construção de sólidos geométricos, as questões Q1.9, Q1.10, Q1.11, Q2.3, Q2.6 levam as tarefas deste objeto de estudo, bem como a própria questão geradora que remete à confecção de uma caixa.

Não identificamos, dentre as questões derivadas sugeridas pelo *ChatGPT*, questões que claramente direcionem o estudo para tarefas de planificação da superfície de sólidos geométricos e da projeção e vistas ortogonais. Assim, elaboramos o mapa de questões preliminares com as questões derivadas que podem surgir durante o percurso, as quais suscitarão objetos de estudos (O_i) previstos para os anos finais do ensino fundamental.

Figura 3. Mapa de questões



Fonte: Elaborado pelos autores

Embora nosso propósito para este texto não tenha evidenciado a validação do PER, vale ressaltar que entendemos ser importante informar ao leitor que houve sua validação em uma

turma de Estágio Supervisionado no Ensino de Matemática II⁸⁹ do curso de Licenciatura em Matemática de um dos *campi* da Universidade Federal de Sergipe.

Ao ser apresentada a questão geradora para a turma, os discentes começaram a fazer perguntas, no intuito de compreender melhor a questão: Qual lembrancinha será colocada na caixa? Qual o tamanho da caixa? Qual parte da garrafa PET pode ser utilizada? Qual tipo de garrafa PET? Qual será o formato da caixa? Se observarmos as questões que surgiram na validação do PER, identificamos que elas são contempladas nas questões previstas pelo *ChatGPT*.

Para cada uma das questões derivadas, fomos dialogando com os discentes, a fim de esclarecer que o tamanho da caixa poderia ser de livre escolha como também a lembrancinha. Em relação ao formato da caixa, conversamos sobre quais seriam as possibilidades, chegando ao consenso de que seria em formato de bloco retangular (paralelepípedo). A turma formada por treze licenciandos, foi diluída em três grupos, para os quais informamos que poderiam utilizar a internet, incluindo sites de GenAI, visando solucionar as questões.

Como na primeira aula não foi possível responder às questões, a tarefa foi orientada para ser realizada em casa, de modo que na aula seguinte, cada grupo estaria apresentando as respostas para cada uma das questões derivadas, um protótipo da caixa e a explicação do passo a passo para a confecção, indicando a fonte utilizada. Apenas dois grupos participaram da segunda aula, ambos seguiram o mesmo passo a passo para a confecção. Um dos grupos utilizou o *Youtube* para pesquisar como confeccionar a caixa em formato de bloco retangular, enquanto o segundo grupo utilizou o *Gemini* (GenAI do *Google*) para auxiliar na busca.

Apesar de não ter comparecido na segunda aula, um dos componentes do terceiro grupo havia iniciado na primeira aula, o desenho da planificação da caixa no corpo da garrafa PET. Esse licenciando não deu sequência a sua ideia, mas evocou pensarmos em novas possibilidades para aprimorar a questão geradora proposta.

Após a apresentação do protótipo dos dois grupos que compareceram à segunda aula, iniciamos um debate por meio das respostas às questões secundárias. Em relação à questão sobre o formato da caixa, ambos os grupos confeccionaram uma caixa em formato de bloco retangular, conforme acordado na primeira aula. Para as perguntas, qual tipo de garrafa PET e qual parte da garrafa PET pode ser utilizada, os grupos responderam que deveriam ser utilizadas

⁸⁹ Trata-se de uma disciplina referente a um dos estágios obrigatórios na formação inicial desses licenciandos, cuja ementa constitui-se em elaboração de planos e exercício da docência em turmas de anos finais do ensino fundamental, preferencialmente, em escolas públicas.

duas garrafas PET iguais, com formato mais liso para ser recortada, ou seja, recortar o corpo da garrafa, cujo modelo seja liso.

Em relação à pergunta referente ao tamanho da caixa, para os dois grupos que cumpriram a tarefa, a confecção escolhida não possibilitava escolher as dimensões, dessa forma, após a confecção, os licenciandos mediram as arestas referente à altura, ao comprimento e à largura da caixa. Nesse momento, puderam comprovar que a caixa confeccionada se tratava de um cubo. Por último, no que se refere à lembrancinha que seria colocada na caixa, os discentes concordaram que a lembrancinha deveria ter no máximo as dimensões encontradas que respondem à questão anterior (Qual o tamanho da caixa?). Ou seja, as dimensões da lembrancinha deveriam ser proporcionalmente menores ao tamanho da caixa confeccionada por cada grupo.

No momento final da aula, realizamos um diálogo a respeito do trabalho desenvolvido por eles, explorando conceitos e propriedades acerca dos sólidos geométricos conforme objetos previstos na Figura 2 (nomeação, classificação, elementos e construção dos sólidos geométricos). Convém comentar que, embora a construção de sólidos geométricos não direcione necessariamente para a sua planificação, no trabalho realizado com essa turma, ou seja, durante o desenvolvimento do percurso, um dos licenciandos utilizou-se desse conceito para confeccionar sua caixa. Esse aspecto nos remete a considerar que a questão geradora escolhida pode ser melhorada para que o objeto de estudo – Planificação dos sólidos geométricos – possa fazer parte do percurso, bem como as tarefas referentes à projeção e vistas ortogonais. Assim, passamos a considerar a seguinte questão: Quais possibilidades existem para podermos projetar e confeccionar caixas de lembrancinha utilizando material reciclado como garrafa PET e papelão?

5. Considerações

A partir do diálogo realizado com as plataformas de GenAI, evidenciamos como o recurso depende de uma boa elaboração de *prompts* para que se obtenha um resultado satisfatório. Assim, observamos o quanto a criatividade do usuário pode ser desenvolvida durante o diálogo com a GenAI. Dessa forma, corroboramos o resultado já encontrado por Ribeiro et al. (2024, p. 240), quando, em sua análise sobre o potencial do uso de outras duas plataformas de GenAI, percebeu que “a criação de um *prompt* estruturado é fundamental para a precisão dos resultados esperados”.

Também foi possível perceber que, durante o diálogo, foi essencial a análise crítica dos resultados gerados para que houvesse a validação das informações recebidas. Assim, utilizar as GenAI pode contribuir para o desenvolvimento da criticidade dos estudantes da educação básica, ao passo que, durante o desenvolvimento do PER, será necessária a validação das respostas encontradas no decorrer do percurso. No nosso caso, buscamos validá-las em uma turma de formação inicial em Licenciatura Matemática.

Assim, o PER articula-se com o uso do GenAI, ao passo que este dispositivo não limita o ensino de matemática à simples transmissão de informações, mas envolve os alunos em um processo ativo de construção do conhecimento, incentivando o desenvolvimento de habilidades de pesquisa, pensamento crítico e autonomia (Menezes e Santos, 2015).

Um ensino baseado em questões geradoras, conforme propõe o PER, dá autonomia ao aluno, colocando-o como protagonista em busca de respostas para tais questionamentos. Assim, ao unirmos essas ferramentas (GenAI e PER), almejamos trabalhar com a formação de professores de modo a repensar o ensino da matemática, reconstruir praxeologias para que revelem sua razão de ser e despertar a motivação dos nossos alunos por meio da apropriação cultural e o debate sobre a sua cultura em sala de aula. Em outras palavras, é o desejo de implementar, na formação docente, práticas de questionamento de mundo para ensinar objetos matemáticos.

Referências

- ALMOLOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. Paraná: Editora da Universidade Federal de Paraná, 2022.
- ALVES, Lynn. Plataformas digitais, crianças e adolescentes – construindo interações com segurança e proteção de dados. **Revista de Educação Pública**, v. 31, p. 1-21, jan./dez. 2022.
- BARROS, José Emanuel Felipe. ABREU, Jair Dias de. Inteligência artificial na educação matemática: o que vem sendo pesquisado. **Com a Palavra, o Professor**: Vitória da Conquista (BA), v. 9, n. 25, setembro-dezembro/2024.
- CARRARO, Fabrício. **Inteligência artificial e ChatGPT**: da revolução dos modelos de IA generativa à engenharia de prompt. São Paulo: AOVS Sistemas de Informática, 2023.
- CARVALHO, Dierson Gonçalves de; SANTOS, Marilene Rosa dos. Paradigma do questionamento do mundo entre o didata Yves Chevallard e o pedagogo Paulo Freire. **REMATEC**, Belém (PA), v. 18, n. 43, 2023.
- CHEVALLARD, Yves. *Familière et problématique, la figure du professeur*. 1997. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Familiere_et_problematique.pdf. Acesso em: 28.jan/2025.
- CHEVALLARD, Yves. *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: l'approche anthropologique*. IUFM d'Aix-Marseille, 1998.
- CHEVALLARD, Yves. *Les TPE comme problème didactique*. 2001. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/YC_2001_-_Seminaire_national.pdf. Acesso em: 30.jan/2025.
- CHEVALLARD, Yves. *Passé et présent de la théorie anthropologique du didactique*. 2007. Disponível em: Acesso em: 30. jan/2025.

CHEVALLARD, Yves. *La notion de PER: problèmes et avancées*. 2009. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/La_notion_de_PER__problemes_et_avancees.pdf Acesso em: 30.jan/2025.

CHEVALLARD, Yves. *Teaching mathematics in tomorrow's society: a case for an oncoming counterparadigm*. 12th International Congress on Mathematical Education, 2012. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/RL_Chevallard.pdf Acesso em: 30. jan/2025.

CHEVALLARD, Yves. A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: ALMOLOUD, S. FARIAS, L. M. S. HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1 ed. Curitiba_PR: CRV, 2018.

CHEVALLARD, Yves. STRØMSKAG, Heidi. Condições de uma transição para o paradigma do questionamento do mundo. In: Almouloud, S.; Guerra, R. B.; Farias, L. M. S.; Henriques, A. Nunes, J. M. V. (Org.) **Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático**: fundamentos teórico-metodológicos para a formação. Vol.1, págs. 27-58. Curitiba: Editora CRV, 2022.

FARRAS, B. B. BOSCH, M. GASCÓN, J. *Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática*. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 15, n. 1, pp.1-28, 2013.

FIGUEROA, T. P. ALMOLOUD, S. A. Reflexões sobre um modelo epistemológico alternativo (MEA) considerando as análises das relações institucionais acerca do objeto matemático limites de funções. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 20, n. 3, pp. 72-96, 2018.

GASCÓN, J. *Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico: el caso del álgebra elemental*. **Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa**, Ciudad de Mexico, v. 14, n. 2, p. 203-231, 2011.

GÁSCON, Josep. Os modelos epistemológicos de referência como instrumentos de emancipação da didática e da história da matemática. In: ALMOLOUD, S. FARIAS, L. M. S. HENRIQUES, A. **A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos**. 1 ed. Curitiba: CRV, 2018.

GIRAFFA, Lucia. KOHL-SANTOS, Pricila. Inteligência artificial e educação: conceitos, aplicações e implicações no fazer docente. **Educação em Análise**, Londrina, v. 8, n., p. 116-134, JAN./JUL. 2023.

MATHERON, Yves. MÉJANI, Farida. Mudando o paradigma para o ensino da matemática: uma experiência em um sistema. In: Almouloud, S.; Guerra, R. B.; Farias, L. M. S.; Henriques, A. Nunes, J. M. V. (Org.) **Percursos de estudo e pesquisa à luz da teoria antropológica do didático**: fundamentos teóricos-metodológicos para a formação. Vol.1, págs. 27-58. Curitiba: Editora CRV, 2022.

PAIS, Luiz Carlos. **Didática da matemática**: uma análise da influência francesa. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

RIBEIRO *et al.* A criação de uma atividade voltada para o ensino de simetria com o uso da inteligência artificial generativa. **Educação Matemática em Pesquisa**, São Paulo, v. 26, n. 4, p. 239-263, 2024.

ROSSINI, Tatiana Stofella Sodré. SANTOS, Edméa. VELOSO, Maristela Midlej. Inteligências artificiais generativas na produção científica na pós-graduação stricto sensu: autoria, propriedade intelectual e educação online. In: SANTOS, Edméa. CHAGAS, Alexandre. BOTTENTUIT JR, João (ORG). **ChatGPT e educação na cibercultura**: fundamentos e primeiras aproximações com inteligência artificial. Vol. 1, p. 49-62. São Luís-MA: EDUFMA, 2024.

SANTOS, Edméa. CHAGAS, Alexandre. BOTTENTUIT JR, João (org). **ChatGPT e educação na cibercultura**: fundamentos e primeiras aproximações com inteligência artificial. Vol. 1. São Luís: EDUFMA, 2024.

SENA SANTOS, Nailys Melo. **Praxeologia para ensinar sólidos geométricos**: o caso de uma bolsista residente do curso Licenciatura em Matemática da UFS. Dissertação (Mestrado). Programa de pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, 2021.

SILVA, Andrey Camurça da. TANAKA FILHO, Mario Elaboração de itens de matemática com auxílio de inteligência artificial generativa. **Revista Nova Paideia - Revista Interdisciplinar em Educação e Pesquisa Brasília/DF**, v. 7 n. 1 p. 351-366 – jan./abr. 2025.

SHOUFAN, Abdulhadi. *Exploring Students' Perceptions of ChatGPT: thematic analysis and follow-up survey*. **IEEE Education Society Section**. Volume 11, p. 38805-38818, 2023.

TEIXEIRA, Bartira Fernandes. FARIAS, Luiz Márcio Santos. O percurso de estudo e pesquisa: contexto, gênese e fundamentos. **Caminhos da Educação Matemática em revista** (online)/IFS, p. 1-14, v. 12, n. 3, 2022.

URMENETA, Alex. ROMERO, Margarida. *Creative Applications of Artificial Intelligence in Education*. Switzerland: Palgrave Studies in Creativity and Culture, 2024. ISBN 978-3-031-55272-4 (eBook).

Anexo

Respostas de GenIA (<i>NotebookLM</i>)
Praxeologia Regional para o 9º Ano: Explorando Sólidos Geométricos
Nível de Determinação: Domínio: Geometria; Setor: Figuras Geométricas; Tema: Sólidos Geométricos.
Tarefa (T): Projetar e construir embalagens otimizadas para diferentes produtos, utilizando sólidos geométricos.
Considerações Iniciais:
<ul style="list-style-type: none">● Esta tarefa busca integrar conhecimentos de geometria sobre sólidos geométricos com a resolução de um problema prático e contextualizado, a criação de embalagens.● A tarefa pode ser dividida em etapas, permitindo explorar diferentes técnicas e tecnologias relacionadas aos sólidos geométricos.
Etapas da Tarefa e Elementos da Praxeologia:
1. Exploração e Classificação de Sólidos Geométricos:
<ul style="list-style-type: none">● Técnicas (tijk):<ul style="list-style-type: none">○ Nomear os sólidos geométricos: Os alunos devem identificar e nomear diferentes sólidos geométricos (cubo, paralelepípedo, prisma, pirâmide, cilindro, cone, esfera), utilizando materiais concretos (objetos do dia a dia, modelos geométricos) e recursos visuais (imagens, vídeos).○ Identificar os elementos dos sólidos: Reconhecer e nomear os vértices, faces e arestas de cada sólido geométrico.○ Quantificar os elementos: Contar e registrar o número de vértices, faces e arestas de cada sólido.○ Identificar os polígonos das faces: Classificar os polígonos que compõem as faces de cada sólido (triângulos, quadrados, retângulos, pentâgonos, hexágonos, círculos).○ Classificar os sólidos: Diferenciar e classificar os sólidos em poliedros e corpos redondos, com base em suas características.● Tecnologias (θjk): Definições e propriedades dos sólidos geométricos, nomenclatura geométrica, classificação de polígonos, relações entre os elementos dos sólidos (faces, vértices e arestas).● Teorias (Θk): Geometria Espacial, Geometria Euclidiana.
2. Planificação e Construção de Sólidos Geométricos:
<ul style="list-style-type: none">● Técnicas (tijk):<ul style="list-style-type: none">○ Corresponder sólidos à sua planificação: Dada a planificação de um sólido, identificar qual sólido ela representa.○ Desenhar a planificação: Desenvolver a planificação de diferentes sólidos geométricos, utilizando régua, compasso e transferidor para garantir a precisão das medidas e dos ângulos.○ Construir sólidos a partir da planificação: Recortar, dobrar e colar as planificações para construir os sólidos geométricos.● Tecnologias (θjk): Representação bidimensional de sólidos, técnicas de desenho geométrico, propriedades das figuras planas, habilidades manuais para a construção de modelos.● Teorias (Θk): Geometria Espacial, Geometria Plana.
3. Vistas Ortogonais de Sólidos Geométricos:
<ul style="list-style-type: none">● Técnicas (tijk):<ul style="list-style-type: none">○ Identificar o sólido a partir das vistas: Dadas as vistas frontal, lateral e superior de um sólido, identificar qual sólido elas representam.

- **Desenhar as vistas ortogonais:** Representar as vistas frontal, lateral e superior de diferentes sólidos geométricos, utilizando técnicas de projeção ortogonal.

- **Tecnologias (Θ_{jk}):** Projeção ortogonal, representação bidimensional de sólidos, convenções para o desenho de vistas ortogonais.

- **Teorias (Θ_k):** Geometria Descritiva, Geometria Espacial.

4. Projeto e Construção de Embalagens Otimizadas:

- **Técnicas (t_{ijk}):**

- **Analizar produtos e suas características:** Considerar as dimensões, forma, fragilidade e outras características dos produtos para os quais as embalagens serão projetadas.

- **Escolher sólidos geométricos adequados:** Selecionar os sólidos geométricos mais adequados para embalar cada produto, justificando a escolha com base nas características do produto e nas propriedades do sólido.

- **Calcular as dimensões da embalagem:** Determinar as dimensões mínimas da embalagem para acomodar o produto, considerando as medidas do sólido geométrico escolhido.

- **Desenvolver a planificação da embalagem:** Criar a planificação da embalagem, incluindo abas para colagem, considerando a estética e a funcionalidade.

- **Construir a embalagem:** Recortar, dobrar e colar a planificação para construir a embalagem.

- **Avaliar a otimização da embalagem:** Analisar a eficiência da embalagem em termos de espaço ocupado, quantidade de material utilizado, facilidade de montagem e adequação ao produto.

- **Tecnologias (Θ_{jk}):** Propriedades dos sólidos geométricos, cálculo de áreas e volumes, otimização de recursos, criatividade e habilidades para a resolução de problemas.

- **Teorias (Θ_k):** Geometria Espacial, Geometria Plana, Noções de Economia e Sustentabilidade.

Recursos Didáticos:

- Materiais concretos: objetos do dia a dia com diferentes formas geométricas, modelos geométricos de sólidos, embalagens de produtos.

- Recursos visuais: imagens de sólidos geométricos, vídeos explicativos sobre as propriedades dos sólidos, softwares de modelagem 3D para visualização e construção de sólidos.

- Materiais para construção: papel cartão, cartolina, tesoura, cola, régua, compasso, transferidor, estilete.

Avaliação:

- A avaliação da aprendizagem pode ser realizada ao longo das diferentes etapas da tarefa, considerando:

- A participação dos alunos nas discussões e atividades.

- A compreensão dos conceitos e propriedades dos sólidos geométricos.

- A habilidade na aplicação das técnicas para planificação, construção e representação de sólidos.

- A criatividade e o rigor na elaboração do projeto das embalagens.

- A capacidade de argumentação e justificativa das escolhas realizadas.

- A qualidade final das embalagens construídas.

Conexões com os Textos:

- A tarefa proposta conecta-se com as ideias de Chevallard sobre a importância de construir tarefas "motivadas" e "motivantes" que partam de um problema real e explorem diferentes níveis de complexidade.

- O exemplo de praxeologia global apresentado utiliza o conceito de "mixidade epistemológica", integrando a geometria com outras áreas do conhecimento como a arte, habilidades manuais e noções de economia e sustentabilidade.

- A ênfase na resolução de um problema prático, como a criação de embalagens, busca romper com a visão "monumentalista" da matemática, aproximando o conhecimento geométrico da realidade dos alunos.

Observações:

- É importante adaptar a complexidade da tarefa e os recursos utilizados de acordo com o nível de desenvolvimento dos alunos do 9º ano.
- O professor pode estimular a pesquisa e a investigação dos alunos sobre diferentes tipos de embalagens e materiais utilizados, promovendo uma aprendizagem mais significativa e contextualizada.
- A realização da tarefa em grupos de trabalho favorece a colaboração entre os alunos e a troca de ideias, enriquecendo o processo de aprendizagem.

Conclusões:

A praxeologia global proposta para o tema de sólidos geométricos no 9º ano do ensino fundamental busca promover uma aprendizagem mais significativa e engajadora, integrando conhecimentos geométricos com a resolução de um problema prático e contextualizado.

Ao longo da realização da tarefa, os alunos são desafiados a mobilizar diferentes técnicas, explorar tecnologias e aplicar teorias, desenvolvendo habilidades de raciocínio espacial, criatividade, resolução de problemas e trabalho em equipe.

Com base nas tarefas que constituem a razão de ser do tema sólidos geométricos, uma tarefa em nível global ou regional que pode desencadear o estudo das demais tarefas apresentadas no anexo "Razão de ser dos sólidos geométricos" poderia ser:

Tarefa: Projetar e construir uma maquete de uma cidade utilizando sólidos geométricos, considerando aspectos arquitetônicos e urbanísticos.

Essa tarefa engloba múltiplos aspectos que demandam a compreensão e aplicação das tarefas listadas no Quadro 1 do anexo "Razão de ser dos sólidos geométricos para os anos finais do ensino fundamental".

- **Nível Regional:** Essa tarefa pode ser considerada de nível regional porque exige o conhecimento da **geometria** (sólidos geométricos), mas também pode envolver outras áreas, como **matemática financeira**, por exemplo, para calcular os custos dos materiais utilizados. A tarefa também envolve um conhecimento do **mundo real** no qual os sólidos geométricos são utilizados. O conhecimento e a prática da geometria são necessários para a resolução da tarefa, mas não são o único objetivo da tarefa.

Como essa tarefa desencadeia o estudo das demais tarefas:

- **Nomear os sólidos geométricos (T23):** Os alunos precisarão identificar e nomear os diferentes sólidos geométricos que utilizarão na construção da maquete (cubos, paralelepípedos, prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas etc.). A nomeação dos sólidos é o primeiro passo para compreensão e utilização destes.
- **Identificar os vértices, faces e arestas de cada sólido geométrico (T24):** Para construir corretamente a maquete, os alunos precisarão identificar e manipular os elementos dos sólidos, como vértices, faces e arestas. Para encaixar as faces uns nos outros e construir os sólidos, será necessário esse conhecimento.
- **Quantificar os vértices, faces e arestas de cada sólido geométrico (T25):** A quantificação desses elementos ajudará na precisão da construção. A depender

do nível do projeto, pode ser necessário saber o número de vértices, faces e arestas para planejar a maquete.

- **Identificar os polígonos correspondentes a cada face dos sólidos geométricos (T26):** Os alunos deverão perceber que as faces dos sólidos são polígonos (quadrados, retângulos, triângulos etc.) e identificar cada um deles. O conhecimento dos polígonos é necessário para entender as faces dos sólidos geométricos.
- **Classificar os sólidos geométricos em poliedros ou corpos redondos (T27):** Será necessário classificar os sólidos usados na maquete, diferenciando aqueles que possuem faces planas (poliedros) daqueles que possuem superfícies curvas (corpos redondos). Os alunos vão precisar escolher quais sólidos melhor se adequam ao seu projeto.
- **Construir sólidos geométricos (T28):** A tarefa principal envolve a construção dos sólidos geométricos que farão parte da maquete.
- **Corresponder os sólidos geométricos à sua planificação (T29):** Para construir os sólidos, os alunos precisarão entender suas planificações e como montá-los a partir delas. Em alguns casos, os alunos podem precisar desenhar suas próprias planificações para os sólidos que eles queiram construir.
- **Desenhar a planificação da superfície dos sólidos (T30):** Em alguns casos, será necessário desenhar a planificação de sólidos específicos, principalmente se não forem sólidos regulares. Os alunos poderão ter que criar seus próprios sólidos e, consequentemente, suas planificações.
- **Identificar o sólido geométrico correspondente a determinadas vistas ortogonais (T31):** O projeto da maquete pode exigir o desenho ou identificação de vistas ortogonais para planejamento. Esta tarefa pode ser usada tanto para a criação do projeto quanto para a execução e posterior avaliação.
- **Desenhar as vistas ortogonais dos sólidos geométricos (T32):** Os alunos poderão precisar criar vistas ortogonais de suas construções, o que ajudará na visualização e no planejamento da maquete.

Ao desenvolverem essa tarefa, os alunos não apenas aplicarão os conhecimentos sobre os sólidos geométricos, mas também desenvolverão habilidades de **planejamento, criatividade, trabalho em equipe e resolução de problemas**. A tarefa pode ser usada para desenvolver um trabalho colaborativo e mais aprofundado sobre os sólidos geométricos, uma vez que o objetivo não é apenas responder perguntas, mas sim colocar os conhecimentos em prática para criar um produto concreto.

Essa tarefa permite também uma abordagem mais contextualizada e significativa para o aprendizado da geometria, conectando-a com situações reais e cotidianas. A partir dessa tarefa, o professor poderá conduzir discussões e reflexões sobre os diversos conceitos relacionados aos sólidos geométricos, bem como outras questões que poderão aparecer.

Além disso, ao propor uma tarefa como essa, o professor também poderá observar e analisar as relações que os alunos estabelecem com os objetos ($R(X, O)$) e como essa relação é influenciada pela relação institucional ($R(I, O)$) e pelo contrato institucional (C). Ao analisar as escolhas dos alunos e como eles se relacionam com os objetos, o professor também poderá avaliar as intencionalidades por trás dessas escolhas.

Capítulo 13

Grupos colaborativos no WhatsApp na abordagem da Educação Financeira na Educação de Jovens e Adultos

Érica Valeria Alves⁹⁰

Ana Lucia Silva Simas⁹¹

Deivisson Oliveira dos Santos⁹²

1. Introdução

Dentro de uma cultura permeada pela tecnologia digital buscamos respaldo em Kenski (2018) para definir a Tecnologia Digital. Segundo a autora, essa cultura (“compreendida como o somatório de conhecimentos, valores e práticas vivenciadas por um grupo em determinado tempo e, não necessariamente, o mesmo espaço”) “integra perspectivas diversas vinculadas à incorporação, inovações e avanços nos conhecimentos proporcionados pelo uso das tecnologias digitais e as conexões em rede para a realização de novos tipos de interação, comunicação, compartilhamento e ação na sociedade” (p. 139).

Mais do que um recurso pedagógico no contexto atual da educação, as tecnologias digitais constituem um elemento presente nas práticas sociais dos indivíduos. O uso da tecnologia transcende o papel de ferramenta de informação e comunicação, dentro dessa cultura digital. Os aparatos digitais propiciam que os “sujeitos participem como produtores, consumidores, e que, por isso, têm integrado a vida cotidiana e interferido nas relações materiais e simbólicas” (Bortolazzo, 2020).

A cultura digital vai além da ideia de tecnologia como um objeto de ensino, implicando na articulação “entre o modo de operar com as informações e o conhecimento na sociedade em rede e o fazer pedagógico no seio da escola” (Nonato, Sales e Cavalcante, 2022). As decisões tomadas pelos indivíduos sobre o “que aprender, quando e como” são independentes. O aplicativo *WhatsApp*, a nosso ver, pode desempenhar esse papel. A princípio o aplicativo visava

⁹⁰ Docente da Universidade do Estado da Bahia – UNEB, [eveleria@uneb.br](mailto:evaleria@uneb.br).

⁹¹ Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação de Jovens e Adultos – PPEJA – UNEB, analumestrado9@gmail.com.

⁹² Mestrando do Programa de Pós-Graduação em Educação de Jovens e Adultos – PPEJA – UNEB, deivisson.rizzon@gmail.com

trocas de mensagens. Esse aspecto foi superado, transformando-se em um “componente cultural”, dado que “a cultura digital se consolidou por proporcionar a criação de um espaço de interação discursiva a partir de trocas de informações entre pessoas” (Xavier e Serafim, 2020). O WhatsApp tornou-se um aplicativo que possibilita a seus usuários formas diferenciadas de comunicação que vão além da interação social. Por isso entendemos que pode tornar-se uma ferramenta funcional nas interações pedagógicas. Nesse sentido baseamos a investigação com o recurso ao *WhatsApp* na interação com estudantes da EJA.

No contexto de cultura digital, a EJA prescinde de possibilidades de inserção de seus sujeitos em processos de aprendizagem com potencialidade para integrá-los à sociedade de forma dinâmica, de modo que protagonizem suas práticas sociais. Nas palavras de Machado (*et al.*, 2022) esses podem ser chamados “processos diversos que incluem qualificação profissional, formação política e cultural, formação de identidades e reconhecimento social que fomenta um sentido positivo dos sujeitos.” Ao vislumbrar o protagonismo do sujeito da EJA, entendemos essa modalidade da educação básica como emancipatória, que proporciona ao sujeito a conscientização e tomada de atitudes que rompam com as relações de opressão. Nessa linha encontra-se também a educação matemática crítica dos sujeitos da EJA, que pode se constituir em instrumento de emancipação e promoção de autonomia.

Difundida a partir dos anos 1980, a Educação Matemática Crítica, decorrente dos estudos de Ole Skovsmose, tem como principal foco o desenvolvimento da “matemacia”-competência que favorece, para além do domínio de cálculos matemáticos, uma participação crítica em discussões acerca de questões políticas, ambientais e econômicas, nas quais a Matemática tem influência relevante. Desenvolver a educação matemática crítica na EJA, pressupõe superar modelos tradicionais de ensino, pautados na transmissão de informação e repetição de exercícios, o chamado pelo autor de paradigma do exercício. “Para a educação matemática crítica é importante criar ambientes de aprendizagem onde os alunos sejam convidados a fazer explorações e investigações. É importante criar alternativas à tradição da matemática escolar.” (Skovsmose; Scheffer, 2023).

O paradigma do exercício, como a Matemática frequentemente tem sido ensinada aos estudantes da educação básica, especialmente àqueles da Educação de Jovens e Adultos (EJA) nas aulas tradicionais, não promove o desenvolvimento adequado da matemacia. Para Skovsmose (2000), a abordagem da Matemática nesse modelo tradicional da aula geralmente segue duas etapas:

Primeiro o professor apresenta algumas ideias e técnicas matemáticas geralmente em conformidade com um livro-texto. Em seguida, os alunos fazem exercícios pela aplicação direta das técnicas apresentadas. O professor confere as respostas. Uma parte essencial do trabalho de casa é resolver exercícios do livro (Alro e Skovsmose, 2010, p. 51).

É nessa perspectiva que se fazem presentes as listas de atividades de fixação, criados por pessoas que não fazem parte da sala de aula e geralmente têm apenas uma resposta correta, sem conexão com as práticas sociais vividas pelos estudantes. Para o autor essas características enquadram a educação Matemática tradicional no paradigma do exercício” (Skovsmose, 2000).

Promover uma educação matemática crítica passa por explorar diversas outras situações. Skovsmose (2008) sugere que a tradição dos exercícios pode ser desafiada por abordagens mais exploratórias, como os "cenários para investigação". Consoante ao pensamento do autor, buscamos nesta investigação proporcionar aos estudantes da EJA um espaço de reflexão sobre o significado do salário-mínimo, suas implicações práticas e o poder de compra associado a ele. Mediante o desafio aos estudantes em considerar o que podem fazer com esse valor, o que podem adquirir com uma moeda de um real e como isso afeta suas vidas, pretendíamos promover não apenas a compreensão matemática, mas também a conscientização sobre questões econômicas e sociais relevantes.

Skovsmose (2005) destaca que nessa sociedade baseada em informação e conhecimentos como “recursos estratégicos”, o domínio da matemática ganha “status de nobreza”, estratificando a sociedade em função do domínio que o indivíduo apresenta. O autor destaca quatro diferentes níveis: os construtores (aqueles sujeitos responsáveis pela manutenção e desenvolvimento mais extensivos do “aparato da razão”; os produtores de conhecimento matemático), os operadores (que usam grande parte da matemática na preparação das pessoas para operarem, no dia-a-dia de seus empregos, processos permeados de matemática implícita; aqueles que propagam a matemática), os consumidores (cuja matemática os prepara para o consumo; essa educação matemática pode preparar os sujeitos para o exercício de uma cidadania, seja ela ativa ou passiva), e os descartáveis (aqueles que não que participam dessa economia informacional, sujeitos ditos “invisíveis” ou ainda, excluídos dessa sociedade pautada na informação e conhecimento).

E exatamente nesses estratos da sociedade, determinados pela educação matemática é que reside o papel de uma educação matemática crítica para a EJA. Comprendemos que a educação financeira constitui uma das temáticas mais relevantes no panorama atual para a promoção de uma educação matemática crítica de jovens e adultos. Em 2010, o Governo

Federal, por meio de Decreto Presidencial, institui a Estratégia Nacional de Educação Financeira⁹³, “um conjunto de discussões, políticas e estratégias para se discutir e fortalecer a cidadania da população e estimular a tomada de decisões financeiras mais conscientes, atribuindo grande valor à Educação Financeira neste processo” (De Assis; Torisu, 2021). Além disso, a Base Nacional Comum Curricular enfatiza que

Há hoje mais espaço para o empreendedorismo individual, em todas as classes sociais, e cresce a importância da educação financeira e da compreensão do sistema monetário contemporâneo nacional e mundial, imprescindíveis para uma inserção crítica e consciente no mundo atual (Brasil, 2018, p. 568).

Em uma visão crítica da Matemática o ensino de matemática financeira não pode tencionar seguir a lógica neoliberal, é preciso promover a emancipação das pessoas (Sachs *et al.*, 2023). Embora de modo inconsciente, o ensino de finanças tem tido grande responsabilidade na disseminação de ideias neoliberais, contribuindo para a mentalidade capitalista, na visão dos autores. Essa abordagem, além de promover os princípios e símbolos associados ao neoliberalismo, também conforma as maneiras como os indivíduos agem, ratificando a exploração de grupos sociais menos favorecidos pelo mundo.

É aí que as instituições de ensino podem romper com esse processo de transmissão ideológica, ao incluir o ensino financeiro como um componente curricular obrigatório, favorecendo a criticidade dos sujeitos na direção de uma competência democrática (Sachs *et al.*, 2023).

A abordagem da educação financeira como ferramenta de influência ideológica, precisa superar seus aspectos mais superficiais entrando em temas como o endividamento, a falta de planejamento, a falta de conhecimento sobre o sistema financeiro, dentre outros. Ou seja, é fundamental que os estudantes compreendam o papel do dinheiro no contexto do sistema capitalista. Mesmo que a moeda tenha surgido como uma forma de facilitar as trocas comerciais, antes do capitalismo, foi no capitalismo que ela adquiriu nova dimensão: a propriedade privada dos meios de produção e a comercialização do excedente para outras comunidades levaram o dinheiro deixar de representar apenas um meio de troca (*ibidem*).

E essa facilidade de acesso a produtos e serviços tem sido causa de endividamento, em circunstâncias vistas como possibilidade imediata para suprir necessidades e desejos. Isso leva à necessidade de educar financeiramente os sujeitos nessa sociedade, dando-lhes a possibilidade de tomada de consciência e posicionamento crítico perante as situações de consumo. O

⁹³ <https://www.bcb.gov.br/pre/pef/PORT/enef.asp?frame=1>

progresso tecnológico, o avanço das organizações e a globalização têm agravado o consumo desmedido, tornando grupos menos esclarecidos suscetíveis ao endividamento. Sem uma educação financeira adequada, indivíduos de diferentes culturas são instigados a buscar a satisfação de seus anseios por meio da malversação (Silva *et al.*, 2018).

A facilidade de compra e a disponibilidade de crédito, como apontado pelo autor, são impulsionadas pela multiplicidade de produtos no mercado e pelo suporte financeiro oferecido. No entanto, essa comodidade pode se transformar em um artifício para enganar para aqueles sem conhecimento financeiro, inaptos para gerenciar suas finanças de forma competente.

A Educação Financeira (EF), conforme definida pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE, 2004), é um processo que qualifica as pessoas a aprimorarem seu conhecimento sobre produtos financeiros. Através de informações, formação e orientação, indivíduos adquirem as habilidades necessárias para avaliar riscos e oportunidades, contribuindo para o bem-estar da sociedade. Com um compromisso voltado para o futuro, a EF possibilita escolhas mais acertadas e ações que promovem o bem-estar financeiro.

No ambiente escolar, os estudantes também precisam estar inseridos em cenários para investigação acerca das finanças, sendo motivados a compreender o tema, tornando-se competentes para tomar decisões adequadas em relação aos assuntos financeiros, tanto na vida privada, quanto na familiar ou comunitária (Da Silva; Powell, 2013).

Na mesma linha de Sachs *et al.* (2023), Souza e Flores (2022), afirmam que a educação financeira crítica é aquela que vai além da formação do *homo oeconomicus* - foca essencialmente na crítica ao sistema capitalista, para que o estudante entenda que cada decisão financeira que toma tem sempre como contexto o sistema capitalista.

Os autores também destacam que o conceito de "ser econômico" é aquele que se vê obrigado a trabalhar apenas para sobreviver, ou seja, sua atividade é impulsionada pela necessidade de evitar uma ameaça iminente à vida. O ser econômico desempenha um papel essencial na economia, sendo moldado pela sua história e cultura. Em uma visão clássica é visto como o principal agente de trocas. É através da educação matemática crítica que esse indivíduo tem a possibilidade de transcender sua condição de alienação. A educação financeira tem como objetivo principal formar um indivíduo consciente de sua posição como trabalhador dentro do sistema capitalista e, portanto, capaz de reconhecer suas contradições.

A escola tradicional exprime o indivíduo como alguém racional e calculista, agora visto como um empreendedor de si mesmo no contexto neoliberal. Isso significa que as pessoas

passam a encarar suas vidas como negócios, com estratégias financeiras e metas pessoais. No entanto, essa busca pela riqueza como principal motivador pode restringir a verdadeira liberdade, dado que as ações estão sempre condicionadas às regras do mercado (Souza e Flores, 2022).

Mediante essas ponderações, esta investigação buscou analisar as potencialidades para a promoção noções de educação financeira na EJA, dentro dos princípios da Educação Matemática Crítica, por meio de um grupo de discussões no aplicativo *WhatsApp*.

A investigação ocorreu mediante os seguintes procedimentos: inicialmente foi formado um grupo de *WhatsApp* envolvendo estudantes da EJA e os pesquisadores. A interação ocorreu a partir da questão: O salário-mínimo em 2024 é de R\$1412,00. O dá para fazer com um salário-mínimo? Ao final foi realizada a transcrição e análise das falas presentes na interação a fim de evidenciar os elementos centrais da investigação.

2. Metodologia

A investigação científica é o método mais eficaz para construir conhecimento sobre questões ainda sem resposta (Köche, 2016). Este estudo, portanto, busca compreender como os estudantes jovens e adultos percebem o ensino de educação financeira, sob a perspectiva de uma educação matemática crítica na escola, além de entender a abordagem utilizada no ambiente virtual definido pelo grupo do aplicativo WhatsApp.

Os resultados analisados neste estudo foram coletados por meio de dispositivos móveis, utilizando aplicativo *WhatsApp*. O processo envolveu as perguntas como “O que dá para fazer com um salário-mínimo que equivale as R\$ 1.412,00? e “ O que vocês conseguem fazer com um real?”. A interação dos estudantes e pesquisadores ocorreu em um grupo criado e intitulado como “Educação financeira e uso da tecnologia na EJA”.

Foram colaboradores da pesquisa doze estudantes de Ensino Fundamental I e II, na modalidade EJA de uma escola Municipal e uma Estadual do município de Salvador, com idades variando entre 18 e 60 anos. O grupo foi composto por homens e mulheres de diferentes etnias, sendo a maioria de baixa renda. Para a participação na intervenção os sujeitos foram convidados a ler textos jornalísticos, assistir vídeos, refletir e interagir com o grupo.

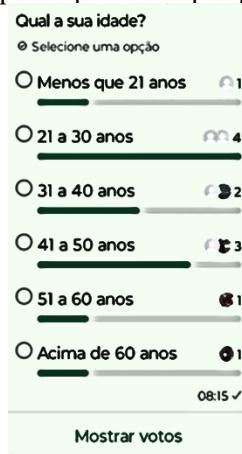
A pesquisa teve abordagem qualitativa, com análise inspirada na análise do discurso, que reflete sobre como a linguagem está materializada na ideologia e como a ideologia se manifesta na língua (Orlandi, 2007). As respostas descriptivas complementaram a investigação

e permitiram interpretar a realidade dos estudantes da EJA em relação à educação financeira nas aulas de matemática. Isso ajudou a entender como os estudantes tomam decisões financeiras, a percepção do valor do salário-mínimo e o poder de compra, além de promover uma formação crítica no que diz respeito à educação financeira.

3. Discussão dos resultados

Inicialmente foi feita a caracterização dos estudantes participantes deste estudo, por meio da ferramenta enquete. Dentre os 12 participantes um tinha menos que 21 anos, quatro estudantes tinham de 21 a 30 anos, dois entre 31 e 40 anos, três entre 41 e 50 anos um estudante com 51 a 60 anos e um estudante acima de 60 anos.

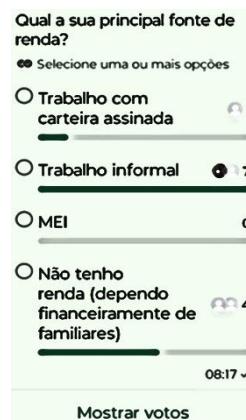
Figura 1 – Distribuição dos participantes da pesquisa de acordo com as idades



A partir dessa distribuição consideramos o grupo composto na sua maioria por pessoas adultas em idade considerada produtiva.

Quando questionados sobre a principal fonte de renda, apenas um dos participantes trabalha com carteira assinada. Sete dos participantes afirmaram que exercem trabalho informal e quatro deles afirmaram não ter renda e depender financeiramente de familiares.

Figura 2 – Distribuição dos participantes da pesquisa de acordo com a fonte de renda

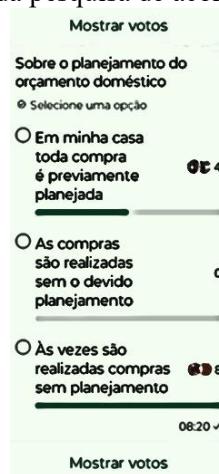


Essas características do grupo reforçam o panorama de exclusão social dos sujeitos da EJA e a demanda que apresentam por uma educação financeira. Destaca-se aqui que um terço deles depende financeiramente de outros familiares e nenhum deles exerce função de Microempreendedor Individual (MEI). Isso nos trouxe informação sobre a necessidade de abordar o tema empreendedorismo, como forma de possibilitar a conscientização dos participantes sobre meios para emancipação financeira.

Os participantes também foram perguntados sobre as compras da casa. Deles, seis informaram ser o principal responsável pelo custeio, quatro informaram que contribuem, mas não são os principais responsáveis pelo custeio e apenas dois disseram não contribuir com as compras da casa.

A fim de levantar informações sobre os conhecimentos relacionados à educação financeira, também foram questionados sobre o planejamento do orçamento doméstico. Quatro participantes afirmaram que toda compra é previamente planejada no domicílio, mas oito deles disseram que às vezes são realizadas compras sem planejamento.

Figura 3 – Distribuição dos participantes da pesquisa de acordo com o planejamento financeiro



Ter dois terços do grupo manifestando que nem sempre o planejamento está presente na realização das compras levou-nos a identificar a necessidade de continuidade da intervenção sobre educação financeira para o grupo. A partir dessas informações obtidas na caracterização dos participantes delineamos quais seriam os temas abordados ao longo da interação no grupo.

Perguntados sobre a fidelidade às marcas consumidas, seis deles afirmaram comprar os produtos que estão com preço menor, independente das marcas e outros seis afirmaram avaliar a relação custo-benefício na hora de escolher a marca.

Para identificar comportamentos de compra por impulso, questionamos sobre a última vez que compraram um produto eletrônico (*smartphone*, *smartv*, etc.). Apenas um dos participantes comprou nos últimos seis meses, cinco o fizeram no último ano e outros cinco há mais de um ano. Dentre as motivações para essa compra, quatro deles não tinham o produto antes da compra, dois deles afirmaram que o produto que tinham quebrou sem possibilidade de conserto e outros cinco afirmaram que o custo do conserto do produto que se danificou seria muito elevado. Finalmente, foram perguntados sobre o atual valor do salário mínimo no país. Nove deles afirmaram saber e dois que só saberiam pesquisando na internet.

Por meio da caracterização inicial dos participantes entendemos que o grupo era composto por sujeitos que, na maioria, atuavam no mercado laboral na informalidade, sem a garantia de direitos trabalhistas. Também tinham por característica a realização de compras sem a devida reflexão e planejamento. Esses resultados permitiram organizar as atividades posteriores a serem desenvolvidas.

Inicialmente foi apresentada uma página da internet com o título “Salário-mínimo 2024: veja o valor e o que muda com ele”⁹⁴. Foi selecionada uma página que permitia a escuta do áudio, considerando eventuais dificuldades dos participantes na leitura. Mediante essas informações foi levantada a seguinte questão: “O salário-mínimo em 2024 é de R\$1412,00. O dá para fazer com um salário-mínimo?”

A seguir, trazemos as reflexões elaboradas pelos participantes. Para preservar suas identidades, usaremos nomes de pedras brasileiras.

O primeiro a trazer sua contribuição é Ônix:

Depois dessa leitura ampla sobre o que se faz com um salário-mínimo de R\$ 1.412,00?
Na verdade, não tem muito o que explicar, eu diria que só agradecer a Deus.
Veja só em uma casa com 6 pessoas, tendo um salário-mínimo e um bolsa família de R\$780,00, vamos lá:
energia R\$ 230,00.
água R\$ 90,00.
gás R\$ 130,00.
wi-fi R\$ 100,00.
recarga de 4 celulares, cada um a R\$ 35,00, total de R\$ 140,00.
recarga de 2 celulares, cada um a R\$ 55,00, total de R\$ 110,00.
compras de remédios: para pressão, asma, alergia, antitérmicos, antibióticos, anti-inflamatório, analgésico. Total de R\$ 380,00.
recarga do cartão de meia passagem R\$ 180,00 p/ o tempo Integral.
recarga de 2 cartão de meia passagem, cada um R\$ 80,00, para o curso de trompete, total de R\$ 160,00.
compras de supermercado R\$ 600,00.
Total de R\$ 2.090,00

⁹⁴ <https://blog.cresol.com.br/salario-minimo-2024-veja-o-valor-e-o-que-muda/>

Para quem ganha R\$2.192,00,
Vou ficar com R\$ 102,00, pra tentar passear com as crianças.
Não é um milagre?
Por isso agradeço a Deus.
Nos meus cálculos só dá pra no máximo 2 pessoas viver melhor com um salário de hoje. (Ônix)

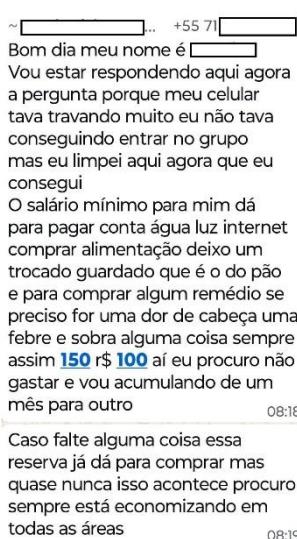
Ônix é um homem com idade entre 41 e 50 anos, cuja fonte principal de renda é o trabalho informal, sendo ele o principal provedor da casa. Nesse contexto em que ele apresentou a distribuição das despesas no domicílio justifica-se ter afirmado que todas as compras da casa são previamente planejadas. Chama-nos a atenção ele justificar as despesas de seis pessoas com R\$2.192,00 e entender que o salário mínimo de R\$1.412,00 é razoável para a subsistência de duas pessoas. Embora implícito, existe um raciocínio de que a renda *per capita* em seu domicílio de aproximadamente R\$365,00 não é razoável, mas uma renda *per capita* de R\$706,00 seria (a razão entre as rendas e o número de pessoas).

A seguir, apresentamos a apresentação de Ametista.

Nas minhas condições atualmente com um salário mínimo só tá dando pra pagar algumas contas como boletos de água, luz, gás e boleto de cartão de alimentação. E ainda falta um “bucadinho” aí fica em pendurado pro próximo mês i assim vai. (Ametista)

Destaca-se na afirmação da estudante a ausência de planejamento financeiro quando afirma deixar sempre uma parte dos gastos em aberto para pagamento posterior. Turmalina, uma mulher com 31 a 40 anos, que depende de familiares para viver, pois não tem renda, relatou que,

Figura 4 – Resposta de Turmalina à questão sobre o que é possível fazer com um salário-mínimo.



E ainda continuou: “E ainda tem o gás né; eu não coloquei no meu aí o gás porque como meu filho recebe a pensão do pai dele de dois em dois meses além da pensão ele bota o dinheiro do gás”. (Turmalina)

Turmalina difere de Ametista no sentido de acumular saldo positivo para o próximo mês. São posturas distintas em relação ao comportamento financeiro. Ainda assim, demanda uma educação financeira, no sentido de aprender a guardar, de modo que o saldo positivo não se perca com a inflação, permitindo que esse valor economizado evolua de forma segura.

Para colaborar na reflexão e conscientização dos sujeitos, apresentamos ao grupo um texto jornalístico denominado “39 maneiras de ganhar dinheiro enquanto está desempregado⁹⁵”. Uma das potencialidades do *WhatsApp* consiste exatamente nesse dinamismo que permite, mediante o rumo que a interação toma, a proposição de diferentes mídias, de modo a incrementar a discussão. O uso de um link dentro da discussão traz um elemento de autoformação para os sujeitos participantes da investigação. Uma vez constatado que na maioria dos depoimentos a renda era insuficiente para cobrir os gastos, o uso de uma mídia, disponível por meio do smartphone pode trazer aos sujeitos um elemento de construção de conhecimento dentro da perspectiva de uma educação financeira crítica.

Como síntese desse material, apresentamos as 39 ideias, organizadas de acordo com os interesses de cada um.

Maneiras de ganhar dinheiro desempregado

A seguir, vamos dar algumas ideias do que você pode fazer para ganhar dinheiro enquanto está desempregado, baseado em coisas que você pode gostar de fazer ou possuí conhecimento.

Para quem gosta de cozinhar

- Produzir e vender marmitas saudáveis
- Preparar doces caseiros para venda, como bolos e brigadeiros
- Oferecer cursos de culinária online

Para quem gosta de trabalhos manuais

- Criar e vender artesanato online, como tricô, crochê e bijuterias
- Desenvolver produtos personalizados sob encomenda, como caixas decoradas
- Ministrar oficinas virtuais de artesanato

Para quem gosta de maquiagem

- Oferecer serviços de maquiagem em domicílio
- Criar e vender cursos de automaquiagem online
- Fazer tutoriais de maquiagem para redes sociais

Para quem tem muita roupa em casa e quer desapegar

- Vender roupas usadas online através de plataformas de revenda
- Organizar um brechó virtual próprio
- Participar de eventos e feiras de troca de roupas

Para quem gosta de animais

- Trabalhar passeando com cães
- Trabalhar como pet sitting (cuidar de animais na ausência dos donos)

⁹⁵ <https://meuvalordigital.com.br/39-maneiras-de-ganhar-dinheiro-enquanto-esta-desempregado/>

- Oferecer serviços de banho e tosa em domicílio

Para quem gosta de mecânica

- Oferecer serviços de reparo e manutenção de veículos em domicílio
- Abrir uma oficina mecânica em casa focada em serviços rápidos ou especializados.
- Organizar workshops online ou presenciais sobre mecânica para iniciantes

Para quem sabe fazer serviços de reparos em casa

- Oferecer serviços de “marido de aluguel” para pequenos reparos domésticos
- Criar um blog ou canal no YouTube com dicas de façá você mesmo para manutenção da casa
- Oferecer consultorias online para ajudar pessoas a resolverem problemas domésticos específicos

Para quem sabe trabalhar com internet

- Prestar serviços de marketing digital para pequenas empresas
- Desenvolver websites e oferecer manutenção para negócios locais
- Oferecer treinamentos online sobre uso das redes sociais para marcas

Para quem tem conhecimento específico

- Criar cursos online em plataformas de ensino à distância sobre sua área de especialidade
- Oferecer tutoria individualizada ou em grupo via videoconferência
- Organizar webinars pagos sobre temas de interesse específico dentro de sua área de conhecimento

Para quem é bom em fotografia

- Oferecer serviços de fotografia para eventos, produtos ou retratos
- Vender fotografias para bancos de imagens online
- Ministrar cursos online de técnicas fotográficas para iniciantes e intermediários

Para quem tem habilidades artísticas

- Vender obras de arte ou ilustrações em plataformas de arte online
- Oferecer serviços de design gráfico para negócios e eventos
- Ministrar workshops online de desenho, pintura ou outras técnicas artísticas

Para quem é bom em escrever

- Oferecer serviços de redação e edição de textos freelance
- Criar e vender e-books sobre tópicos de sua especialidade ou interesse
- Escrever artigos para blogs e sites, cobrando por palavra ou projeto

Para quem gosta de esportes e atividades físicas

- Tornar-se um personal trainer online, oferecendo planos de treino personalizados
- Criar um canal no YouTube com dicas de exercícios e bem-estar
- Organizar eventos ou desafios fitness virtuais (<https://meuvalordigital.com.br/39-maneiras-de-ganhar-dinheiro-enquanto-esta-desempregado/>)

Embora algumas das atividades sugeridas demandam formações específicas, que não é o caso dos estudantes da EJA, boa parte dessas atividades não demandam escolarização ou formação. Essas sugestões poderiam despertar nos sujeitos a busca pela autonomia financeira, caso bem-sucedidos na realização de novos trabalhos. A partir desse material, Topázio tomou a palavra:

E respondendo a pergunta que foi feita aí a um dia atrás ou alguns dias atrás o que eu faço para ter uma renda extra eu faço crochê bolsa brinco e em época de festa tipo São João eu tenho um tio que é músico e ele me pede para eu fazer uns arranjos para ele (Topázio).

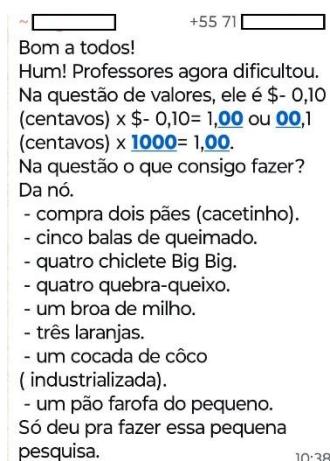
Topázio é uma mulher com idade entre 31 e 40 anos, que não tem renda fixa e depende de familiares, não contribuindo com as despesas da casa. Ela informou que todas as compras na casa são planejadas e que na hora da compra não é fiel a marcas, avaliando sempre o custo-

benefício. Nesse depoimento vemos como ela reconheceu em sua prática, muitas vezes inconsciente, uma possibilidade reconhecida de incremento na renda.

A partir daí mudamos nosso questionamento, perguntando. “Quanto vale um real? ” O objetivo era então, perceber se a partir das reflexões feitas anteriormente havia se modificado o nível de consciência dos participantes acerca do uso do dinheiro. Inicialmente os sujeitos mostraram-se hesitantes em darem uma resposta imediata, até que Turmalina iniciou: “Com um real eu consigo subir e descer o elevador Lacerda se eu não me engano não sei se ainda é, mas a última vez que eu peguei era 50 centavos”.

Interessante ressaltar que, primeiro ela não tem nem mesmo a informação exata acerca da tarifa (que na realidade é de R\$0,15). Mas o subir e descer é só uma forma de consumir o valor. Não há um propósito no uso do recurso financeiro. Mesmo após a discussão e reflexão realizada. Rutilo continua

Figura 5 – Resposta de Rutilo à questão sobre o que é possível fazer com um real.



Rutilo é um homem com idade entre 41 e 50 anos, cuja renda, que é a principal do domicílio, decorre de atividade informal. Ele traz uma lista de itens mais consciente do ponto de vista de consumo. Mas é interessante notar como os sujeitos da EJA têm dificuldade em reconhecer que o consumo, seja de quantias grandes ou pequenas, precisa de planejamento e consciência, embora Rutilo tenha afirmado que todas as compras que realiza são previamente planejadas.

Nem todos os participantes do grupo apresentaram contribuições no debate sobre as questões financeiras. No entanto, é relevante destacar que a partir da discussão no grupo, mesmo assim tiveram a possibilidade de conhecer as ideias dos demais. Sobre isso, Kenski (2012, p. 103) afirma que

O uso criativo das tecnologias pode auxiliar os professores a transformar o isolamento, a diferença e a alienação com que costumeiramente os estudantes frequentam as salas de aula, em interesse e colaboração, por meio dos quais eles aprendem a aprender, a respeitar, a aceitar, a serem pessoas melhores e cidadãos participativos.

Este foi um ponto de partida dentro de um projeto mais amplo sobre tecnologias digitais e educação financeira. As lacunas nas interações dos sujeitos, as contribuições no debate que evidenciaram pouco nível de consciência do consumo e uso da renda indicaram e necessidade de maior aprofundamento, seja do ponto de vista do recurso à tecnologia, seja da prática da educação financeira dos sujeitos da EJA.

O uso do *WhatsApp* como tecnologia digital permitiu a constituição de um grupo a partir do qual a interação proporcionou construção de conhecimento. Se bem desenvolvido e situado esse grupo pode vir a ser um projeto formativo de construção de conhecimentos, que contribua nos processos de ensino e aprendizagem ao considerar os efetivos propósitos sociocomunicativos que foram postos em prática por meio das interfaces tecnológicas de interação discursiva (Xavier, Serafim, 2020).

4. Considerações Finais

É inegável o papel que as tecnologias móveis digitais desempenham na vida das pessoas na contemporaneidade. Imersos nessa cultura digital, também os estudantes da EJA utilizam em seu cotidiano o smartphone e em particular, o aplicativo WhatsApp para comunicação. O que buscamos foi usar esse meio de interação e modo a produzir conhecimento. Igualmente inegável a demanda do sujeito da EJA por educação financeira. Em geral, como descrito neste grupo de participantes, têm situações laborais não formais, dependem financeiramente do auxílio de outros para subsistência.

Assim, este estudo teve como objetivo explorar as potencialidades da educação financeira na Educação de Jovens e Adultos, utilizando como base os princípios da Educação Matemática Crítica e a interação em um grupo de discussão no aplicativo *WhatsApp*. Os resultados obtidos indicaram uma realidade complexa enfrentada pelos participantes, com a maioria dependendo de trabalho informal ou apoio familiar para sobreviver, e enfrentando dificuldades para cobrir despesas básicas. Também foco da nossa investigação, observamos que a maioria deles não têm um planejamento financeiro claro, muitos deixam contas pendentes para o mês seguinte e nos casos em que conseguiam acumular pequenas economias não tinham estratégia clara de uso.

Esses resultados destacam a relevância da Educação Financeira, especialmente em contextos de exclusão social e vulnerabilidade econômica. O desconhecimento sobre finanças básicas e a ausência de hábitos de poupança eficazes podem contribuir para a perpetuação do ciclo de pobreza e endividamento. Ressaltamos que, apesar desses resultados anteriormente mencionados, encontramos no grupo potencial para o desenvolvimento de habilidades financeiras e conscientização sobre a importância da gestão do dinheiro, demonstrando estratégias de sobrevivência e resiliência.

Quanto ao recurso ao *WhatsApp* como suporte pedagógico por meio de um grupo de discussão para promover a Educação Financeira Crítica dos sujeitos da EJA, ratificamos nossos pressupostos sobre suas potencialidades pedagógicas, observando que o mesmo superou a concepção de interface interativa, permitindo articulação da cultura digital e educação, suporte de diferentes mídias, trocas de experiências e construção de conhecimentos.

Quanto às questões propostas pela investigação, os resultados sobre o que é possível fazer com um salário mínimo, na visão dos sujeitos indicaram que embora seja desafiador, é possível administrar as despesas básicas com criatividade e esforço. Quando perguntados sobre possibilidades de uso de um real, houve hesitação entre os participantes, destacando a necessidade de uma compreensão mais clara do poder de compra e do valor real do dinheiro.

Em continuidade ao projeto, planejamos aprofundar as estratégias de sobrevivência e resiliência dos participantes e investigar a eficácia de intervenções educacionais específicas para melhorar a gestão financeira na EJA. Um tema não abordado nesse momento foram as políticas de distribuição de renda. Consideramos importante considerar como as políticas públicas podem apoiar a educação financeira nessas comunidades.

Em síntese, a partir desta investigação destacamos a importância da educação financeira na EJA e ressaltamos a necessidade de abordagens pedagógicas sensíveis ao contexto socioeconômico dos participantes. Trazer aos sujeitos da EJA a possibilidade de educar-se financeiramente pode não apenas fornecer ferramentas práticas para lidar com seus desafios diários, mas também possibilitá-los a tomar decisões conscientes, promovendo um maior bem-estar econômico e social. Constatamos ainda ser possível o uso de aplicativos de comunicação como forma de constituir grupos colaborativos em ambiente digital de modo a promover a construção de conhecimento.

Referências

- Alro, H., & Skovsmose, Ole. **Diálogo e aprendizagem em Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.
- BRASIL. (2018). Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular. Brasília, 2018.
- BORTOLAZZO, Sandro Faccin. DAS CONEXÕES ENTRE CULTURA DIGITAL E EDUCAÇÃO: PENSANDO A CONDIÇÃO DIGITAL NA SOCIEDADE CONTEMPORÂNEA. **ETD - Educ. Temat. Digit.**, Campinas, v. 22, n. 2, p. 369-388, abr. 2020 . Disponível em <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1676-25922020000200369&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 18 mar. 2024. Epub 27-Jun-2021. <https://doi.org/10.20396/etd.v22i2.8654547>.
- DA SILVA, Amarildo Melchiades; POWELL, Arthur Belford. Um programa de educação financeira para a matemática escolar da educação básica. **Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática**, 2013.
- DE ASSIS, Samuel Alves; TORISU, Edmilson Minoru. Desvelando diálogos entre educação financeira e educação matemática crítica: uma pesquisa envolvendo dissertações de mestrados profissionais. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v. 14, n. 2, p. 212-221, 2021.
- KENSKI, Vani Moreira. Cultura digital. **Dicionário crítico de educação e tecnologias e de educação a distância**. Campinas: Papirus, p. 139-144, 2018.
- MACHADO, Soraia Sales Baptista da Costa et al. INDAGAÇÕES NA/COM A EJA NO CONTEXTO DE PANDEMIA: UMA EXPERIÊNCIA EM CÍRCULOS DE CULTURA DIGITAIS. **Práx. Educ.**, Vitória da Conquista, v. 17, n. 45, p. 117-136, abr. 2021 . Disponível em <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2178-26792021000200117&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 18 mar. 2024. Epub 03-Maio-2022. <https://doi.org/10.22481/praxiesedu.v17i45.8337>.
- MINAYO, Maria Cecília de Souza. O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde. 14ª edição. São Paulo: Hucitec Editora, 2014.
- JACINTO, Aline de Sousa. **Educação financeira a partir do tema inflação: uma investigação com estudantes do ensino médio à luz da educação matemática crítica**. Dissertação (Mestrado Acadêmico). Universidade Federal de Ouro Preto. Departamento de Educação Matemática 2023. 159 f.
- KENSKI, V. M. **Educação e tecnologias**: o novo ritmo da informação. Campinas: Editora Papirus, 2012.
- KÖCHE, J. C. **Fundamentos de metodologia científica**: Teoria da ciência e iniciação à pesquisa. 23. ed. Vozes: Rio de Janeiro, 2006.
- MINAYO, M. C. de S. **O desafio do conhecimento: Pesquisa qualitativa em saúde**. 12. ed. Hucitec: São Paulo, 2010. 407 p
- NONATO, Emanuel do Rosário Santos; SALES, Mary Valda Souza; CAVALCANTE, Társio Ribeiro. CULTURA DIGITAL E RECURSOS PEDAGÓGICOS DIGITAIS: UM PANORAMA DA DOCÊNCIA NA COVID-19. **Práx. Educ.**, Vitória da Conquista, v. 17, n. 45, p. 8-32, abr. 2021 . Disponível em <http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2178-26792021000200008&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em 18 mar. 2024. Epub 03-Maio-2022. <https://doi.org/10.22481/praxiesedu.v17i45.8309>.
- OCDE (Organização de Cooperação e de Desenvolvimento Econômico). *OECD's Financial Education Project*. Assessoria de Comunicação Social, 2004. Disponível em: <www.oecd.org>. Acesso em 18 mar. 2024.
- ORLANDI, E. P. Análise de discurso: princípios & procedimentos. Campinas, SP: Pontes, 2007.
- SACHS, L. et al. Crítica da Educação Financeira na Educação Matemática. **Bolema**: Boletim de Educação Matemática, v. 37, n. 76, p. 449-478, 2023. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/bolema/a/4vRnkVb398mSXy53MycxHYk/#ModalHowcite>. Acesso em: 11 maio 2024.
- SILVA, D. M. V.; JUNIOR, N. R. C.; VAZ, R. F. N. Uma experiência vivida com estudantes do ensino médio: reflexões sobre Educação Financeira à luz da Educação Matemática Crítica. **Boletim de Educação Matemática**, Joinville, v. 4, n. 7, p. 82-100, ago./dez. 2016.
- SOUZA, J. I. DE.; FLORES, C. R. Educação matemática e a formação do homo oeconomicus. **Educação e Pesquisa**, v. 48, p. e244997, 2022. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/ep/a/nKk4qYT83dWSwLN6ypzP64C/#ModalHowcite>. Acesso em: 11 maio 2024.

SKOVSMOSE, O.; SCHEFFER, N. ENTREVISTA: OLE SKOVSMOSE E A EDUCAÇÃO MATEMÁTICA. *Educação Matemática Sem Fronteiras: Pesquisas em Educação Matemática*, v. 4, n. 2, p. 83-91, 21 jan. 2023.

SKOVSMOSE, Ole. **Desafios de reflexão em educação matemática crítica**. Campinas: Papirus editora, 2008.

SKOVSMOSE, Ole. Guetorização e globalização: um desafio para a Educação Matemática. *Zetetiké*, v. 13, n. 2, p. 113-142, 2005.

SKOVSMOSE, Ole. Cenários para investigação. **Bolema-Boletim de Educação Matemática**, v. 14, pág. 66-91, 2000.

SOUZA, Jéssica Ignácio de; FLORES, Cláudia Regina. Educação matemática e a formação do homo oeconomicus. *Educação e Pesquisa*, v. 48, p. e244997, 2022.

XAVIER, Manassés Morais; SERAFIM, Maria Lúcia. O WhatsApp impactando novas possibilidades de ensinar e de aprender no contexto acadêmico. **São Paulo: Mentes Abertas**, 2020.

Lista de autores e mini currículo

Nº	Nome completo	Mini currículo
01	Franck Bellemain	Possui graduação em Mathématiques (1985), mestrado em Didactique Des Mathématiques (1986) e doutorado em Didactique des Mathématiques (1992) pela Universite Joseph Fourier (Grenoble I). Autor do software educativo cabri-géomètre e desenvolvedor das suas versões I, II e II plus nas plataformas MS-DOS, Windows, Macintosh e específicas para calculadoras da Texas Instruments. Atualmente é professor adjunto da Universidade Federal de Pernambuco. Tem experiência nas áreas de Matemática e informática, com ênfase em Geometria e Tecnologia Educativa (pesquisa e desenvolvimento) e ensino e divulgação da matemática e das ciências.
02	Deusarino Oliveira Almeida Júnior	Possui Graduação em Matemática (1997) pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Especialização em Matemática do Ensino Básico (2008) pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Mestrado em Ensino de Matemática (PMPEM - 2018) pela Universidade do Estado do Pará (UEPA). Atualmente é Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemáticas (PPGECM) do Instituto de Educação Matemática e Científica (IEMCI) da Universidade Federal do Pará (UFPA). Tem experiência nas áreas de Matemática, Modelagem Matemática, Educação Matemática e Tecnologias da Informação e Comunicação na Educação. Participa dos projetos de pesquisa do Grupo de Pesquisas em Ensino da Matemática e Tecnologias (GPEMT/UEPA) desde 2016 e do Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática das Matemática (GEDIM/UFPA) desde 2018
03	José Messildo Viana Nunes	Graduado em Licenciatura Plena Em Matemática pela Universidade do Estado do Pará (UEPA 1998); com Aperfeiçoamento em Informática Educativa (UEPA, 1999); Especialização em Educação Matemática (UEPA, 2000); Mestrado em Educação em Ciências e Matemáticas (UFPA, 2007) e Doutorado em Educação Matemática pala Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP). Professor da Universidade Federal do Pará, com experiência na área de Matemática, com ênfase em Matemática e Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Argumentação em Matemática, História da Matemática, Didática da Matemática, Aprendizagem Significativa e Formação de Professores
04	Saul Rodrigo da Costa Barreto	Professor de Matemática Aplicada da Universidade do Estado do Pará (UEPA). Possui Graduação em Matemática (2008) pela Universidade Federal do Pará (UFPA), Especialização em Educação Matemática (2016), pela Universidade do Estado do Pará (UEPA), Mestrado em Ensino de Matemática (PMPEM - 2018) pela Universidade do Estado do Pará (UEPA) e Doutorado em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM - 2023) pela Universidade Federal do Pará (UFPA). Tem experiência nas áreas de Matemática, Matemática Aplicada, Educação Matemática e Informática para a Educação. Participa dos projetos de pesquisa Grupo de Estudos e Pesquisas em Matemática e Tecnologia (GPEMT/UEPA) desde 2016 e Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática das Matemáticas (GEDIM/UFPA) desde 2017. Professor de Matemática Aplicada na Universidade do Estado do Pará (UEPA)
05	Teodora Pinheiro Figueiroa	Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (1997), mestrado em Engenharia Mecânica pela Universidade de São Paulo (2000) e doutorado em Engenharia Mecânica pela Universidade de São Paulo (2005), Pós-doutorado em Educação Matemática (2019). É membro do Grupo de Estudos e Pesquisas da Didática da Matemática (GEDIM) da Universidade Federal do Pará

		(UFPA) e membro do GT-14 Didática da Matemática da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Professora na classe de professor associado, nível 4 da Universidade Tecnológica Federal do Paraná- UTFPR, campus Pato Branco. Atua na área de Matemática Aplicada e Educação Matemática, mais especificamente em Didática da Matemática e Interdisciplinaridade a nível de ensino fundamental, médio e superior
06	Saddo Ag Almouloud	Concluiu o doutorado em Matemática e Aplicações pela Universidade de Rennes I em 1992 - França. Foi professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo de abril 1994 a março de 2020, e da Fundação Santo André de 2000 a 2020. Atualmente é professor colaborador da PUC-SP e da UFBA. Foi professor colaborador da UFPA. Foi professor visitante da UFBA (agosto de 2021 a agosto de 2023), também da UFSC (2020-2021). Atualmente é professor titular livre da UFPA. Publicou mais de 60 artigos em periódicos especializados e mais de 83 trabalhos em anais de eventos. Possui mais de 10 capítulos de livros e 12 livros publicados. Possui 1 software e mais de 62 itens de produção técnica. Participou de vários eventos no exterior e mais de 112 no Brasil.
07	Gerson Pastre de Oliveira	é graduado em Ciência da Computação e é mestre e doutor em Educação (USP). É professor e coordenador do curso de Ciência da Computação da UNIP Jundiaí. É líder do grupo de pesquisa Educação e Tecnologia (Edutec/UNIP) e membro do grupo de pesquisa "Processo de Ensino e Aprendizagem em Matemática" (PEA-MAT). É professor da Fatec Jundiaí (CEETEPS), instituição na qual leciona disciplinas ligadas à ciência da computação. Foi professor do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP), atuando como orientador de mestrado e doutorado por 15 anos. Atuou como professor autor e responsável por disciplina no curso superior de tecnologia em Gestão Pública (CPS/Univesp). Seus interesses de pesquisa incluem avaliação da aprendizagem em cursos online, matemática no Ensino Superior e na Educação Básica, tecnologias na Educação Matemática, programação de computadores e estrutura de dados. É autor e organizador de livros na área de Educação Matemática e Tecnologias. Possui diversos artigos publicados em periódicos científicos e em anais de congressos, nacionais e internacionais. É membro de conselhos editoriais e científicos de periódicos nas áreas de Tecnologia e Educação Matemática.
08	Maria José Ferreira da Silva	Possui graduação em Bacharelado e Licenciatura em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1988), graduação em Jornalismo não concluindo pela Universidade Católica de Santos (1972), Mestrado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1997) e Doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2005). Atualmente é professora da Graduação, do Programa de Estudos Pós-graduados em Educação Matemática, vice-líder do grupo de pesquisa do CNPq O elementar e o superior em matemática e vice-líder do grupo PEA-Mat, Processos de Ensino e Aprendizagem em Matemática, ambos da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. Tem experiência na área de Educação Matemática atuando, principalmente, nos temas: ensino e aprendizagem de Matemática, Tecnologia da Informação e Comunicação e formação de professores de matemática.
09	Naum de Jesus Serra	Mestre em Educação Matemática e Ciências (EMCI-UFPa - 2022). Possui Graduação em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPA-2000). Graduação em Física (UFPA-2016). Graduação em Pedagogia pelo Centro Internacional Universitário (UNINTER-2022). Especialização em Educação Matemática (2004-IEMCI-UFPa). Formação Continuada de Professores em Educação Matemática para os anos Finais do Ensino Fundamental (IEMCI-UFPa-2008). Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática e da Física pela Faculdade de São Vicente (FSV -2019). Especialização em

		Metodologia de Ensino de Ciências e de Matemática pela Faculdade de Paraíso do Norte (FAPAN-2019). Especialização em Tópicos Especiais em Matemática pela Faculdade Única de Ipatinga (2019). Experiência nas áreas de Matemática e Física na Educação básica. Membro do "Grupo de Estudos e Pesquisa em Didática das Matemáticas" (GEDIM/IEMCI/UFPa) desde março de 2018
10	Marco Aurélio Kalinke	Doutor em Educação Matemática pela PUC-SP, tem pós-doutorado pela Universidade de Milão (Clínica del Lavoro Luigi Devoto), mestrado em Educação pela UFPR e graduação em Matemática pela UTP-PR. É professor Associado DE da UTFPR e membro do corpo docente do Programa de Pós-graduação em Formação Científica, Educacional e Tecnológica (PPGFCET) da UTFPR. Foi professor permanente do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da UFPR entre 2011 e 2023. Atuou como Coordenador Adjunto do PPGFCET, presidente da Comissão de Implantação do curso de doutorado e da comissão de Internacionalização no mesmo programa, membro do Conselho do Campus Curitiba, da Comissão Central para Homologação dos Processos de Reconhecimento de Diplomas Stricto Sensu e de diversas outras comissões e colegiados tanto na graduação quanto na pós-graduação. Atualmente é membro da comissão de avaliação de diplomas estrangeiros do PPGFCET e professor responsável pelas atividades de internacionalização do Curso de Licenciatura em Matemática.
11	Eloisa Rosotti Navarro	Pós-doutorado em Educação em Ciências e em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), na linha de pesquisa "História, Sociologia, Filosofia, Educação em Ciências e Matemática", sendo bolsista Capes. Doutora em Educação pela Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), na linha de pesquisa "Educação Matemática". Mestre em Educação em Ciências e em Matemática pela Universidade Federal do Paraná (UFPR), nas linhas de pesquisa "Formação de Professores que ensinam Ciências e Matemática" e "Tecnologias da Informação e Comunicação no Ensino de Ciências e Matemática área de Tecnologia e Educação Matemática", sendo bolsista Capes. Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual de Maringá (UEM). Atualmente, é Professora Colaboradora do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) e professora substituta no Setor de Educação Profissional e Tecnológica (SEPT) da Universidade Federal do Paraná (UFPR). Atua, também, como coordenadora de Matemática da Fundação Getúlio Vargas (FGV). É membro líder do GPTEM - Grupo de Pesquisa sobre Tecnologias na Educação Matemática, vinculado à UTFPR e à UFPR. É participante dos grupos: GPEM - Grupo de Pesquisa em Educação Matemática, vinculado à UFPR; GPEFCom - Grupo de Pesquisa Formação Compartilhada de Professores: Escola e Universidade, vinculado à UFSCar; GPEMTD - Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e trabalho docente, vinculado à Unioeste. Atua, principalmente, no tema: Teoria Histórico-Cultural, Pensamento Computacional, Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação na Educação, Formação Continuada de professores e a Reforma do Ensino Médio
12	Renata Oliveira Balbino	Doutoranda em Educação Matemática pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e em Matemática (PPGECM) da UFPR com projeto que visa o desenvolvimento de uma proposta para a concepção da interface de uma plataforma para construção de Objetos de Aprendizagem. Mestre em Educação Matemática pelo mesmo programa. Com especialização para professores de Matemática e graduação em Licenciatura em Matemática, ambos pela UFPR. Professora de Matemática da rede Estadual de ensino no Estado do Paraná e atua nos anos finais do Ensino Médio. Membro do Grupo de Pesquisa sobre Tecnologias na Educação Matemática (GPTEM).

13	Liliane Neves	Xavier	Bacharel em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC) (2003), Mestre em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (2006) na subárea Geometria Diferencial e Doutora em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (2020). Foi professora Assistente da Universidade Federal da Bahia atuando entre os anos de 2008 e 2012. Atualmente é professora Titular da Universidade Estadual de Santa Cruz (2012), atuando como colaboradora no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da UESC (PPGECM). Além disso, é líder do Grupo de Pesquisa em Educação Matemática e Tecnologias Digitais (GPEMTec), pesquisadora colaboradora do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e do Grupo de Articulação, Investigação e Pesquisa em Educação Matemática (GAIPEM). Foi coordenadora de projeto de Matemática vinculado ao Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID-UESC) entre os anos de 2013 e 2015.
14	Afonso Henriques		Possui graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Paraíba (1996), mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (1999) e doutorado em Matemática e Informática pela Universidade Joseph Fourier Grenoble - França (2006), revalidado no Brasil pela Universidade Federal de Pernambuco UFPE (2010). Atualmente é Professor Pleno na Universidade Estadual de Santa Cruz UESC/BA, Brasil. Líder do Grupo de Pesquisa em Ensino e Aprendizagem da Matemática em Ambiente Computacional (GPEMAC) e do Laboratório de Visualização Matemática (L@VIM) da UESC. Professor do Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) e do Programa da Pós-Graduação em Educação em Ciências e Matemática (PPGECM) da UESC. Membro do GT 14 da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM). Tem experiência na área de Matemática, Didática e Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Pesquisa e Desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral com um enfoque computacional, TIC, Produção de Modelos de Projetos de Construção de Objetos Concretos (PCOC) como materiais didáticos, Gestão de códigos de modelos para impressora 3D, Ensino e Aprendizagem, Registros de Representação Semiótica, Antropologia Didática, Abordagem Instrumental, Geometria Dinâmica, Análise Institucional e Sequências Didáticas.
15	Marcos Rogério Neves		Possui Doutorado (2007) e Mestrado (2002) em Educação e Licenciatura Plena em Matemática (1999) pela Universidade Federal de São Carlos. Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual de Santa Cruz. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação, cultura e sociedade; formação de professores que ensinam matemática; concepções, processos e práticas curriculares em Educação Matemática.
16	Osnildo Andrade Carvalho		Doutor em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela UFBA. Mestre em Matemática pela UFRB (Universidade Federal do Recôncavo da Bahia). Especialista em Educação Matemática com novas tecnologias pela FTC (Faculdade de Tecnologia e Ciências). Graduado em Matemática pela UEFS (Universidade Estadual de Feira de Santana - Bahia). Atualmente é professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - IFBA (antigo Centro Federal de Educação, Ciência e Tecnologia - CEFET). Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Didática da Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: pesquisa e desenvolvimento de situações didáticas para o ensino de Matemática, Teoria Antropológica do Didático -TAD, pesquisa e desenvolvimento de situações didáticas com ênfase nos softwares GEOGEBRA e DESMOS. Também Avaliação

		Formativa, Ambientes Virtuais, Ensino de Cálculo Diferencial e Integral e Matemática Discreta.
17	Hugo Costa Pereira e Souza	Mestre em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB (Capes 5). Pós - graduação Lato Sensu em Matemática e Estatística pela Universidade Federal de Lavras-UFLA, Pós - graduado em Educação a Distância pela Universidade Estadual de Montes Claros - UNIMONTES e graduação em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Estadual de Montes Claros-UNIMONTES. Atualmente sou professor de ensino superior no Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Montes Claros-UNIMONTES
18	Maria Deusa Ferreira da Silva	Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz - UESC (1995), com Mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP Rio Claro (1999) e Doutora em Educação - Linha de Educação Matemática pela Universidade Federal do Rio Grande do Norte UFRN (2010). Pós-Doutorado em Educação Matemática -UNESP Rio Claro (2016). Professora Titular na Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia - UESB - Campus de Vitória da Conquista (BA). Atua na área de Matemática, com ênfase no ensino de Geometria, Geometria Analítica e Cálculo Diferencial e Integral e na área de Educação Matemática desenvolvendo pesquisas nas seguintes linhas: Tecnologias Digitais no Ensino, Formação de Professores de Matemática e História da Matemática
19	Nailys Melo Sena Santos	Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (NPGECEIMA) pela Universidade Federal de Sergipe (UFS). Pós-graduada em Didática do Ensino de Matemática e em Metodologia do Ensino de Matemática pela UniBf. Graduada em Licenciatura Plena em Matemática na Universidade Federal de Sergipe (UFS/São Cristóvão). Graduanda em Pedagogia na UAB/Universidade Estadual de Alagoas. Membro do grupo de pesquisa Núcleo Colaborativo de Prática e Pesquisa em Educação Matemática (NCPPEM/UFS).
20	Denize da Silva Souza	Doutora em Educação Matemática pela Universidade Anhanguera de São Paulo. Mestre em Educação pela Universidade Federal de Sergipe. Especialista em Arteterapia pela FIZO-ALQUIMYART e Licenciada em Matemática pela Universidade Federal de Sergipe. É professora adjunta da Universidade Federal de Sergipe no Departamento de Matemática (Campus São Cristóvão) e professora permanente nos Programas de Pós-Graduação: Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIMA/UFS) e Doutorado em Ensino na Rede Nordeste de Ensino - RENOEN/UFS. Autora de artigos e coautora de capítulos de livros, artigos em periódicos na área de ensino de Ciências e Matemática e na área de Educação Matemática. Organizadora de livros (impresso e-books), destacando-se temáticas sobre pesquisas em livros didáticos, currículo, atividades matemáticas para o ensino na educação básica e inclusão.
21	Érica Valeria Alves	possui graduação em Matemática pela Universidade Estadual de Campinas (1994), mestrado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (1999) e doutorado em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (2005). Atualmente é professor adjunto da Universidade do Estado da Bahia, na licenciatura em Pedagogia e no Mestrado Profissional em Educação de Jovens e Adultos. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase em Psicologia da Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: educação matemática, solução de problemas, formação de professores, ensino de matemática, educação de jovens e adultos e educação matemática de jovens e adultos.
22	Ana Lucia Silva Simas	Possui graduação em Licenciatura em Pedagogia pela Universidade Católica do Salvador (2002) e graduação em Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal da Bahia (2014). É especialista em Educação Matemática pela Universidade Católica do Salvador

		(2004), em Educação Inclusiva e Diversidade pelo Instituto Superior de Educação de Afonso Cláudio (2016), em Direitos Humanos na Escola pela Faculdade de Ciências da Bahia - FACIBA (2021) e Especialista em alfabetização e letramento com ênfase em EJA pela Faculdade de Vitória (2024). Efetiva na Secretaria Municipal de Ensino de Salvador, atualmente exerce cargo de vice gestora e professora regente na modalidade Educação de Jovens e Adultos e séries iniciais do Ensino Fundamental. Trabalhou como professora de Matemática das séries finais do Ensino Fundamental na rede Municipal de Ensino em Salvador e rede Estadual da Bahia no período compreendido entre fevereiro de 20016 a dezembro de 2019.
23	Deivisson Oliveira dos Santos	Possui graduação em Matemática pela UCSal (Universidade Católica do Salvador) Graduado Lic. em Pedagogia pela UNICSUL Especialização em Metodologia do Ensino da Matemática e da Física (FSV -SP) Especialização em Psicopedagogia - Clínica e Institucional (UCSal) Especialização de Ensino de Matemática - Matem@tica na Pr@atica (IFBA) Mestrando no MPEJA (Educação de jovens e Adultos) pela Universidade Estadual da Bahia (UNEB) Associado a SBM (Sociedade Brasileira de Matemática) matrícula: 2019.0342 Atuei como Orientador Pedagógico de exatas da UNINTER (Graduação à Distância) Membro do Grupo de Pesquisa Educação Matemática na EJA UNEB - Campus I , orientado Dr. Erica Valeria Alves Tem experiência na área de Educação Matemática na EJA e Ensino Regular , atuante como professor SEC-BA
24	Celina Aparecida Almeida Pereira Abar	Doutorado em Lógica Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1985). Especialista em Tecnologias Interativas Aplicadas à Educação (PUC-SP-2000); em Design Instrucional para Educação On-Line (UFJF-2007) e em Entornos Virtuais de Aprendizaje (OEI-2010). Possui graduação em Licenciatura e Bacharelado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1973), Mestrado em Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (1979). Professora titular da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo atuando na Graduação, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP. Os projetos de pesquisas em desenvolvimento abordam tecnologias digitais, realidades virtual e aumentada, ensino híbrido, contexto STEM e STEAM. Disciplinas realizadas no curso de especialização Inteligência Artificial na Educação da Universidade Federal de São Carlos. Coordenadora da Implantação do Curso de Licenciatura em Matemática na Modalidade a Distância da PUC-SP no 1oSem/2009. Coordenadora do Instituto GeoGebra de São Paulo. Vice-Coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP (2020-2023). Editora da Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo e da Revista UNIÓN - Revista IberoAmericana de Educación Matemática - FISEM de 2005 a 2020.
25	José Manuel dos Santos	Concluiu o Doutoramento em Álgebra Computacional em 05/10/2019 pela Universidade Aberta (UAb), o Mestrado em Ensino de Matemática em 2000 pela Faculdade de Ciências da Universidade do Porto (FCUP) e a Licenciatura em Matemática (Ramo Educativo) em 1993 pela FCUP. Em 2017 concluiu o curso de Estudos Avançados em Álgebra Computacional na UAb. Conclui o Curso Europeu de Doutoramento em Ensino e Divulgação de Ciências na FCUP em 2012. É investigadora do Instituto Politécnico do Porto, Escola Superior de Educação, do Centro de Investigação e Inovação & Desenvolvimento em Matemática e Aplicações (CIDMA). É também o Investigador Principal do Instituto GeoGebra em Portugal. Gere vários projetos com a Organização dos Estados Ibero-americanos para a Educação em Ciência e Cultura (OEI) e a Faculdade de Ciências Exatas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, tendo também desenvolvido projetos com a Fundação Calouste Gulbenkian, tendo estes projetos visado colaborar com a Formação de Professores nos Países de Língua Portuguesa. Foi

		investigador do Centro de Matemática Computacional e Estocástica da Universidade de Lisboa. Orientou trabalhos de mestrado e pós-doutorado na área de Educação Matemática com ênfase no uso de tecnologias. Atua na(s) área(s) de Ciências Exatas com ênfase em Matemática e Ciências com ênfase em Educação em Ciências Aplicadas. Em suas atividades profissionais, interagiu com 14 colaborador(es) em coautoria de artigos científicos. No seu currículo na Ciência Vitae, os termos mais frequentes no contexto da produção científica, tecnológica e artístico-cultural são: Geometria esférica; Ladrilhos esféricos; GeoGebra; Funções Complexas; TIC; Projeção Estereográfica; Análise Complexa; Análise multivariada; Coloração de domínio; Visualização; Questões de Educação Matemática.
26	Marcio Vieira de Almeida	Possui formação acadêmica e experiência nas áreas de Matemática, Educação Matemática e Tecnologias no Ensino. Ele possui doutorado em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (2017). Graduou-se em Licenciatura em Matemática pela Universidade de São Paulo (2009). Tem experiência na área de Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: tecnologias digitais no ensino de matemática, pensamento computacional, inteligência artificial e formação de professores. Atualmente é Professor Visitante no Programa PROFMAT do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo (IFSP) - Câmpus São Paulo e do Professor do PEPG em Educação Matemática da PUC-SP.

Akademy
EDITORIA